

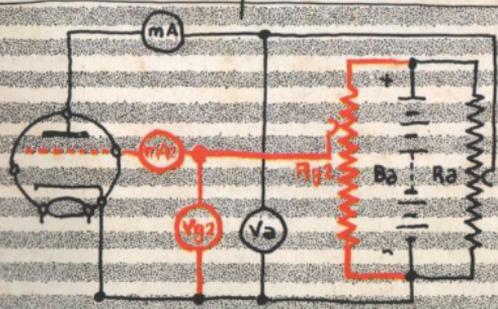
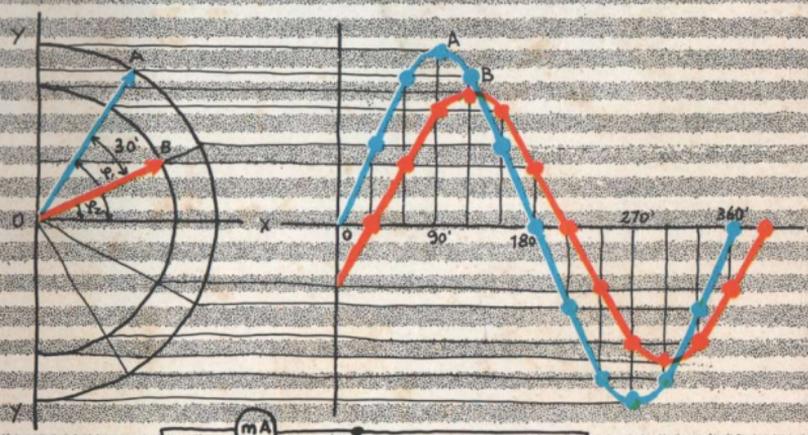
FAUSTO MONDANI

# RADIOELETRONICA

Trevisini - Milano

RADIOELETRONICA - I

Fausto Mondani



TREVISINI EDITORE - MILANO



RADIOELETTRONICA

ELETTROTECNICA

ED

ELETTRONICA

EDIZIONE LEIGH TRUBINI  
MILANO



FAUSTO MONDANI

# RADIOELETRONICA

*Volume Primo*

## ELETTROTECNICA ED ELETTRONICA



CASA EDITRICE LUIGI TREVISINI  
MILANO

L'ARTISTICO MONDIALE

RADIOELETTRONICA

Volume Primo

ELETTROTECNICA

Proprietà letteraria riservata

ELETTRONICA



CASA EDITRICE L. TREVISINI

---

Coi tipi della Casa Editrice L. Trevisini - Milano

## Prefazione

*Nel contesto del Corso di Elettronica applicata alla ricezione radio e televisiva, questo primo volume vuole fornire agli studenti e agli studiosi che abbiano il sufficiente grado di preparazione matematica, una trattazione rigorosamente scientifica dei fondamenti di elettrotecnica e una presentazione dei tubi elettronici, dei diodi a semiconduttori e dei transistori.*

*Dopo una prima parte introduttiva dedicata all'esame dei fenomeni elettrici di base, il testo tratta delle correnti in regime continuo e transitorio, delle cariche elettriche in equilibrio statico, degli effetti chimici e magnetici della corrente, delle correnti alternate, dei circuiti risonanti ed oscillanti, dei quadripoli passivi in regime sinusoidale e rettangolare e, per ultimo, dei tubi elettronici e dei dispositivi a semiconduttori limitatamente al loro funzionamento statico, alle loro caratteristiche e ai loro parametri. Un cenno sulle macchine elettriche completa lo studio dei fondamenti dell'elettrotecnica.*

*Per facilitare l'apprendimento dei fenomeni elettrici anche in forma quantitativa, la trattazione matematica è quasi sempre preceduta da quella intuitiva, ed è sviluppata, di sovente e compiutamente, a due livelli per dar modo al lettore di rivolgere la sua attenzione agli sviluppi matematici dopo aver appreso il significato fisico e pratico dei fenomeni.*

*In tal modo, il testo risulta pienamente accessibile anche alla vasta schiera di tecnici che non posseggono ancora la cultura di scuole superiori.*

F. M.

# Prólogo

1900

El presente libro es el resultado de un trabajo que he realizado durante los últimos años de mi vida profesional, en el que he tratado de reunir y ordenar los datos que se refieren a la historia de la medicina en España, desde los tiempos más antiguos hasta el presente. He procurado ser lo más exacto posible en la recopilación de los hechos, y he procurado también ser lo más claro y sencillo en la exposición de los mismos. He procurado también ser lo más completo posible en la recopilación de los datos, y he procurado también ser lo más claro y sencillo en la exposición de los mismos. He procurado también ser lo más completo posible en la recopilación de los datos, y he procurado también ser lo más claro y sencillo en la exposición de los mismos.

## INDICE DELLE MATERIE

### CAP. 1° — Cenni sulla costituzione della materia e sulla natura dell'elettricità.

1-1	Le molecole .....	pag.	1
1-2	Gli atomi .....	»	2
1-3	Gli elettroni .....	»	2
1-4	Il nucleo centrale .....	»	3
1-5	Gli strati elettronici .....	»	3
1-6	Gli ioni .....	»	7
1-7	Le forze coulombiane .....	»	7
1-8	Il potenziale, la differenza di potenziale .....	»	8
1-9	La corrente elettrica, la quantità di elettricità, la densità .....	»	8

### CAP. 2° — La conduzione elettrica nei solidi, nei liquidi e nei gas.

2-1	Conduttori, semiconduttori ed isolanti .....	»	13
2-2	La conduzione elettrica nei metalli .....	»	14
2-3	La conduzione elettrica nei semiconduttori intrinseci .....	»	16
2-4	La conduzione elettrica nei semiconduttori inquinati .....	»	19
2-5	La conduzione elettrica nelle giunzioni e nei contatti .....	»	22
	a) <i>tra due semiconduttori n-p</i> .....	»	22
	b) <i>tra due metalli diversi</i> .....	»	26
	c) <i>tra un metallo e un semiconduttore</i> .....	»	26
2-6	La conduzione elettrica nei liquidi .....	»	27
2-7	La conduzione elettrica nei gas a pressione atmosferica .....	»	29
	a) <i>per riscaldamento</i> .....	»	30
	b) <i>per grande d.d.p.</i> .....	»	31
	c) <i>per bombardamento</i> .....	»	31
2-8	La conduzione elettrica nei gas rarefatti (vuoto medio) .....	»	32
2-9	L'effetto luminoso della scarica elettrica nei gas .....	»	32
2-10	La conduzione elettrica nell'aria .....	»	33

	PAG.
2-11 La conduzione elettrica nei gas ultrararefatti (vuoto spinto) »	34
2-12 L'emissione elettronica .....	34
a) <i>termoelettronica</i> .....	36
b) <i>fotoelettronica</i> .....	39
c) <i>secondaria</i> .....	40
d) <i>di campo</i> .....	41

### CAP. 3° — La resistenza elettrica nei conduttori solidi liquidi e gassosi.

3-1 La resistenza elettrica dei conduttori solidi .....	42
3-2 La resistenza elettrica dei semiconduttori .....	45
3-3 La resistenza elettrica dei conduttori liquidi .....	46
3-4 La resistenza elettrica nei gas normali e rarefatti .....	47
3-5 La resistenza elettrica nei gas ultrararefatti .....	48
3-6 Conduttori solidi di uso comune .....	48
3-7 Esercizi da risolvere .....	52

### CAP. 4° — Elettrodinamica.

4-1 La legge di Ohm per una resistenza .....	53
4-2 Il circuito elettrico elementare .....	55
4-3 L'energia o lavoro elettrico e la potenza elettrica .....	60
4-4 L'effetto termico della corrente - Legge di Joule .....	63
4-5 Effetti termoelettrici Seebeck e Peltier .....	65
4-6 Carichi elettrici passivi ed attivi .....	66
4-7 Rendimenti elettrici di un circuito .....	68
a) <i>del generatore</i> .....	68
b) <i>della linea</i> .....	69
c) <i>dell'utilizzatore</i> .....	70
d) <i>totale del circuito</i> .....	70
4-8 Raggruppamenti delle resistenze elettriche (carichi passivi) »	72
a) <i>collegamento serie</i> .....	72
b) <i>collegamento parallelo</i> .....	76
c) <i>collegamento misto</i> .....	79
4-9 Regolatori ohmici di tensione di corrente .....	81
a) <i>resistenza addizionale</i> .....	81
b) <i>reostato potenziometrico</i> .....	81
c) <i>resistenza derivata</i> .....	83
d) <i>reostato serie</i> .....	84

	PAG.
4-10 Caratteristica esterna dei generatori - Generatori di corrente .....	86
4-11 Raggruppamenti di generatori uguali .....	90
a) <i>collegamento serie</i> .....	90
b) <i>collegamento parallelo</i> .....	91
c) <i>collegamento misto</i> .....	92
4-12 Raggruppamenti di generatori disuguali .....	94
a) <i>collegamento serie</i> .....	94
b) <i>collegamento parallelo</i> .....	95
4-13 Circuiti elettrici generali - Principi risolutivi .....	99
a) <i>principi di Kirchhoff</i> .....	99
b) <i>principi di Millman</i> .....	102
c) <i>principi di Thevenin</i> .....	102
d) <i>principi di Norton</i> .....	104
e) <i>principi di sovrapposizione degli effetti</i> .....	105
4-14 Esercizi da risolvere .....	108

#### CAP. 5° — Cenni di elettrochimica.

5-1 L'elettrolisi .....	110
5-2 Le pile voltaiche .....	115
a) <i>pila Daniell</i> .....	118
b) <i>pila Leclanché</i> .....	119
c) <i>pila Weston</i> .....	119
d) <i>pila al mercurio</i> .....	120
5-3 Gli accumulatori elettrici .....	120
1) <i>accumulatori al piombo</i> .....	121
2) <i>accumulatori al ferro-nichel</i> .....	125
3) <i>accumulatori al cadmio-nichel</i> .....	125
5-4 Esercizi da risolvere .....	126

#### CAP. 6° — Elettrostatica.

6-1 Il campo elettrico .....	127
a) <i>effetto dinamico su una carica elettrica</i> .....	128
b) <i>induzione elettrostatica</i> .....	129
c) <i>polarizzazione dielettrica</i> .....	130
6-2 L'intensità del campo elettrico o gradiente di potenziale - Rigidità dielettrica .....	131
6-3 Distribuzione delle cariche elettriche sui conduttori e schermi elettrostatici .....	134

	PAG.
6-4 Il condensatore elettrico .....	» 135
6-5 L'energia del campo elettrico di un condensatore .....	» 141
6-6 Risposta di un circuito RC ad una tensione a gradino .....	» 143
1) leggi di carica di un condensatore .....	» 144
2) leggi di scarica di un condensatore .....	» 148
6-7 Raggruppamenti di condensatori elettrici .....	» 151
a) collegamento serie sotto generatore .....	» 151
b) collegamento parallelo sotto generatore .....	» 154
c) collegamento misto sotto generatore .....	» 156
d) collegamento parallelo di condensatori precaricati .....	» 158
e) collegamento serie di condensatori precaricati .....	» 161
6-8 Caratteristiche di alcuni materiali dielettrici di uso comune .....	» 162
6-9 Esercizi da risolvere .....	» 165

#### CAP. 7° — Elettromagnetismo.

7-1 Il campo magnetico .....	» 167
a) di una corrente rettilinea indefinita .....	» 168
b) di una corrente circolare .....	» 170
c) di un solenoide cilindrico rettilineo .....	» 170
d) di un solenoide toroidale .....	» 171
7-2 L'intensità del campo magnetico e forza magnetomotrice .....	» 171
a) per un conduttore rettilineo .....	» 172
b) per una spira .....	» 173
c) per un solenoide rettilineo .....	» 174
d) per un solenoide toroidale .....	» 175
7-3 Induzione magnetica - Permeabilità - Flusso magnetico .....	» 175
7-4 Le proprietà magnetiche della materia .....	» 177
7-5 Isteresi magnetica .....	» 183
7-6 I circuiti magnetici elementari e la legge di Hopkinson .....	» 186
a) circuiti omogenei .....	» 187
b) circuiti eterogenei .....	» 189
7-7 Energia dei campi magnetici .....	» 194
7-8 Forze coulombiane ed azioni dinamiche tra polarità magnetiche .....	» 194
a) le azioni magnetodinamiche .....	» 195
b) le azioni magnetoeltriche .....	» 197
c) le azioni elettromagnetiche .....	» 199
d) le azioni elettrodinamiche .....	» 200
7-9 Campo magnetico terrestre e schermi magnetici .....	» 202

	PAG.
7-10 L'induzione elettromagnetica .....	» 204
7-11 Il fenomeno di autoinduzione .....	» 210
7-12 Risposta di un circuito RL ad una tensione a gradino .....	» 215
1) leggi di chiusura del circuito RL .....	» 216
2) leggi di apertura del circuito RL .....	» 218
7-13 L'energia intrinseca della corrente .....	» 221
7-14 Il fenomeno di mutua induzione .....	» 222
7-15 Le correnti parassite o di Foucault .....	» 227
7-16 Caratteristiche di alcuni materiali ferromagnetici di uso comune .....	» 230
7-17 Esercizi da risolvere .....	» 233

### CAP. 8° — La corrente alternata.

8-1 Generalità sulle grandezze alternate .....	» 235
8-2 Rappresentazione vettoriale delle grandezze sinusoidali .....	» 239
8-3 Operazioni elementari con vettori di grandezze sinusoidali aventi medesima frequenza .....	» 241
1) Somme e differenze di due vettori .....	» 243
2) Moltiplicazione e divisione tra due vettori .....	» 247
8-4 Scomposizione di grandezze alternative non sinusoidali .....	» 249
8-5 Calcolo dei circuiti a corrente alternata sinusoidale .....	» 251
a) circuito puramente ohmico .....	» 251
b) circuito puramente induttivo .....	» 252
c) circuito puramente capacitivo .....	» 256
d) circuito ohmico-induttivo .....	» 259
e) circuito ohmico-capacitivo .....	» 263
f) circuito ohmico-induttivo-capacitivo .....	» 264
8-6 Le potenze della corrente alternata .....	» 267
1) nei circuiti puramente ohmici .....	» 268
2) nei circuiti puramente reattivi .....	» 270
3) nei circuiti ohmici-reattivi .....	» 273
8-7 Raggruppamento di impedenze .....	» 279
a) impedenze collegate in serie .....	» 279
b) impedenze collegate in parallelo .....	» 285
c) impedenze in collegamento misto .....	» 293
8-8 Cenni sul rifasamento della corrente .....	» 298
8-9 L'effetto pellicolare nei conduttori a c.a. ....	» 302
8-10 I fenomeni di autoinduzione e di mutua induzione in cor- rente alternata .....	» 303

	PAG.
8-11 Cenni sulle correnti trifasi .....	» 304
a) <i>collegamento a stella</i> .....	» 307
b) <i>collegamento a triangolo</i> .....	» 310
8-12 Esercizi da risolvere .....	» 313

#### CAP. 9° — Cenni sulle macchine elettriche.

9-1 Trasformatori elettrici .....	» 315
a) <i>funzionamento a vuoto</i> .....	» 317
b) <i>funzionamento a carico</i> .....	» 319
c) <i>l'autotrasformatore</i> .....	» 322
9-2 Calcolo pratico di piccoli trasformatori .....	» 324
9-3 Generatori elettrici .....	» 331
1) <i>gli alternatori</i> .....	» 331
2) <i>le dinamo</i> .....	» 336
a) <i>ad eccitazione indipendente</i> .....	» 343
b) <i>ad eccitazione derivata</i> .....	» 344
c) <i>ad eccitazione in serie</i> .....	» 344
d) <i>ad eccitazione composta</i> .....	» 345
9-4 Motori elettrici .....	» 345
1) <i>motori a corrente continua</i> .....	» 346
2) <i>motori sincroni</i> .....	» 350
3) <i>motori asincroni</i> .....	» 352

#### CAP. 10° — La risonanza e le oscillazioni elettriche.

10-1 Circuiti risonanti serie .....	» 364
10-2 Circuiti risonanti parallelo .....	» 375
10-3 Circuiti oscillanti .....	» 385
1) <i>ideale</i> .....	» 386
2) <i>reale</i> .....	» 389
10-4 Circuiti risonanti aperti .....	» 397
10-5 Esercizi da risolvere .....	» 400

#### CAP. 11° — Quadripoli passivi in regime sinusoidale e rettangolare.

11-1 Quadripoli adattatori di impedenza .....	» 402
1) <i>ad accoppiamento diretto resistivo</i> .....	» 403
2) <i>ad accoppiamento indiretto a trasformatore in BF</i> .....	» 406
3) <i>ad accoppiamento indiretto a trasformatore in AF</i> .....	» 410

	PAG.
4) ad accoppiamento indiretto a circuiti accordati .....	» 413
5) ad accoppiamento diretto autoinduttivo e capacitivo .....	» 421
11-2 I filtri elettrici .....	» 424
1) filtri passa-basso .....	» 426
2) filtri passa-alto .....	» 434
3) filtri passa-banda .....	» 439
4) filtri eliminatori di banda .....	» 443
11-3 Quadripoli sottoposti ad onda rettangolare .....	» 444
1) a rete RC e CR .....	» 444
2) a rete RL e LR .....	» 447
3) a rete RLC .....	» 448
11-4 Esercizi da risolvere .....	» 449

#### CAP. 12° — I tubi elettronici.

12-1 Classificazione dei tubi elettronici .....	» 451
12-2 Generalità sui tubi termoelettrici ad alto vuoto .....	» 452
12-3 Il diodo ad alto vuoto .....	» 459
12-4 Il triodo ad alto vuoto .....	» 467
12-5 Il tetrodo ad alto vuoto .....	» 478
12-6 Il pentodo ad alto vuoto .....	» 484
12-7 Il tubo a fascio elettronico .....	» 486
12-8 I tubi a pendenza variabile .....	» 488
12-9 I tubi multipli .....	» 490
12-10 I tubi elettrici a gas .....	» 491
12-11 Affinatore di vuoto o getter .....	» 497

#### CAP. 13° — Diodi a semiconduttori e transistori.

13-1 Generalità sui diodi a semiconduttori .....	» 499
1) a punta di contatto .....	» 501
2) a giunzione .....	» 503
3) a contatto metallo-semiconduttore .....	» 504
13-2 Caratteristiche dei diodi a semiconduttori .....	» 505
13-3 Diodi speciali a semiconduttori .....	» 509
1) diodo zener .....	» 506
2) diodo tunnel .....	» 510
3) diodo varicap .....	» 511
13-4 Generalità sui transistori .....	» 513

	PAG.	
13-5	Curve caratteristiche dei transistori p-n-p ad emettitore comune .....	» 523
	a) <i>caratteristica di uscita</i> .....	» 525
	b) <i>caratteristica di trasferimento</i> .....	» 527
	c) <i>caratteristica di ingresso</i> .....	» 528
	d) <i>caratteristica di reazione</i> .....	» 529
13-6	Parametri caratteristici dei transistori .....	» 531
	a) <i>resistenza di uscita</i> .....	» 531
	b) <i>coefficiente di amplificazione</i> .....	» 532
	c) <i>resistenza di ingresso</i> .....	» 533
	d) <i>coefficiente di controreazione</i> .....	» 534
13-7	Stabilizzazione termica dei transistori .....	» 536

## Capitolo Primo

### Cenni sulla costituzione della materia e sulla natura della elettricità

La fisica moderna, con i suoi perfetti mezzi di indagine scientifica, ha accertato che l'elettricità ha sede nei corpi e sarebbe formata da corpuscoli estremamente piccoli, che entrano nella costituzione della materia.

#### 1.1. LE MOLECOLE

La materia, che costituisce ogni corpo, non è continua, o infinitamente divisibile, ma ha struttura granulare. È formata cioè da un insieme di granuli o di particelle piccolissime chiamate molecole, intendendo per molecola *la più piccola parte che si può ottenere da un corpo senza mutarne la natura e cioè le proprietà fisiche e chimiche.*

Le molecole nel corpo non sono fisse, ma in continuo movimento vibratorio. Tale agitazione molecolare varia:

- a) con la temperatura e precisamente aumenta con l'aumentare di questa;
- b) con la forza di coesione che tiene legate le molecole nel corpo: più alta è la coesione e minore è l'agitazione.

La materia si presenta sotto tre stati fisici di aggregazione:

- a) stato solido (ghiaccio, rame, legno, ecc.);
- b) stato liquido (acqua, olio, benzina, ecc.);
- c) stato gassoso (aria, vapore, idrogeno, ecc.).

Lo stato fisico di qualsiasi sostanza è determinato dalla mobilità e dalla velocità delle molecole e dalla distanza che le separa.

**Allo stato solido**, le molecole, per la grande coesione che esiste tra loro, vibrano sul posto che occupano, ossia intorno a posizioni di equilibrio, senza che possano allontanarsi l'una dall'altra. Per questo i corpi solidi hanno volume e forma propria.

**Allo stato liquido**, le molecole, legate da debole coesione, possono scorrere le une sulle altre in tutti i sensi, con una velocità di qualche centimetro al se-

condo. Il cammino libero che ciascuna percorre in linea retta prima di urtarne un'altra è dell'ordine di frazioni di millimetro. Il liquido, pur mantenendo il volume, non ha forma propria, ma assume quella del recipiente che lo contiene.

Allo stato gassoso, le molecole, a causa della debolissima coesione che esiste tra loro, si spostano, si urtano e si respingono in tutti i sensi con una velocità di parecchie centinaia di metri al secondo (1.625 m/sec per l'idrogeno). Il gas allora non può avere né volume né forma propri, ma assume quelli del recipiente, assolutamente chiuso, che lo contiene.

Il percorso libero che ciascuna molecola può compiere prima di urtare altre molecole è però brevissimo. Per l'aria a pressione atmosferica è di  $10^{-4}$  mm, dato il grande numero di molecole ( $30 \cdot 10^{18}$ ) contenute in un  $\text{cm}^3$ .

Aumentare o diminuire la pressione significa accrescere o diminuire il numero delle molecole per ogni unità di volume e quindi significa diminuire od aumentare il percorso libero delle molecole.

## 1.2. GLI ATOMI

Le molecole non sono il granulo più piccolo di materia. Esse sono divisibili in particelle ancor più piccole, chiamate *atomi*.

Si conoscono 92 atomi diversi, esclusi i transuranici.

Se le molecole in un corpo sono costituite da atomi uguali, il corpo si dice *semplice* o *elemento*, per cui gli elementi sono anche essi in numero di 92. I corpi costituiti invece di molecole formate da atomi diversi si chiamano *composti*, e sono in numero grandissimo.

L'atomo, che etimologicamente significa *non divisibile*, non è in realtà un blocco compatto di materia, ma è costituito da particelle o granellini semplici di materia disposti e ripartiti secondo un ordine naturale.

L'atomo è cioè costituito da un *nucleo centrale*, in cui è concentrata quasi tutta la materia, attorno al quale ruotano ad una velocità di parecchie migliaia di giri al secondo, uno o più granellini di materia, chiamati *elettroni*.

## 1.3. GLI ELETTRONI

Gli elettroni in tutti gli atomi, sono uguali fra loro. Essi rappresentano non solo la più piccola parte elementare della materia (la loro massa è di  $9,1 \cdot 10^{-28}$  grammi), ma anche la carica elementare di elettricità negativa. Possiedono infatti una carica elettrica negativa che crea attorno ad essi un campo elettrico. Tale carica è di  $-1,6 \cdot 10^{-19}$  coulomb.

Gli elettroni oltre che orbitare attorno al nucleo, girano su se stessi. Le loro orbite, che si immaginano circolari od ellittiche, non sono complanari, ma si spostano su piani diversi che avvolgono completamente il nucleo centrale.

#### 1.4. IL NUCLEO CENTRALE

Il nucleo centrale è costituito fondamentalmente da:

- a) **protoni**, che sono particelle di materia di massa 1.845 volte maggiore di quella dell'elettrone. Possiedono la carica elementare di elettricità positiva (positrone) ossia una carica positiva uguale in valore assoluto a quella dell'elettrone;
- b) **neutroni**, che sono particelle di materia la cui massa è dello stesso ordine di grandezza della massa del protone. Sono elettricamente neutri, cioè non possiedono carica elettrica.
- c) **altre particelle** (mesoni pesanti, mesoni leggeri, ecc.) che non vengono qui discusse per lo scarso interesse che hanno nello studio della elettrotecnica e per il mistero che ancor oggi avvolge la reale costituzione del nucleo.

In un atomo il numero dei protoni corrisponde esattamente al numero degli elettroni, per cui l'atomo è un insieme elettricamente neutro. Il numero dei neutroni è leggermente superiore a quello dei protoni, tranne che nell'atomo di idrogeno, che non ne contiene (un protone e un elettrone), e in quello dell'elio che ne possiede in numero uguale (due protoni, due neutroni, due elettroni).

Gli atomi differiscono tra loro:

- a) per il numero degli elettroni che orbitano attorno al nucleo;
- b) per la costituzione del nucleo centrale.

#### 1.5. GLI STRATI ELETTRONICI

Gli elettroni che ruotano attorno al nucleo, chiamati *planetari* oppure *orbitanti*, sono disposti su strati o livelli energetici, ciascuno dei quali può contenere un determinato numero di elettroni.



Fig. 1.1 - Gli strati elettronici.

Infatti è dimostrato che i singoli strati o cortecce o nuvole elettroniche, e che si distinguono con le lettere dalla *K* alla *Q*, a partire dal nucleo, contengono al massimo il seguente numero di elettroni (fig. 1.1): lo strato *K*, 2; lo strato *L*, 8; lo strato *M*, 18; lo strato *N*, 32; lo strato *O*, 18; lo strato *P*, 10; lo strato *Q*, 6.

Ogni elemento ha un suo preciso numero di elettroni orbitanti e quindi un determinato numero di strati.

È importante osservare che di questi strati, l'ultimo e cioè quello più lontano dal nucleo, non può contenere più di otto elettroni (per cui gli strati da *M* a *P* si devono pensare suddivisi in sottostrati). Tutti i fenomeni elettrici avvengono per il particolare comportamento degli elettroni di questo strato esterno.

La distribuzione graduale degli elettroni determina l'ordine degli elementi a partire dall'idrogeno, che conta un solo elettrone sullo strato *K*, fino all'uranio che conta 92 elettroni orbitanti.

La tabella di Mendelejeff, che non è necessario riportare, elenca in ordine di numero atomico crescente tutti gli elementi noti, intendendo per numero atomico il numero delle cariche elementari possedute dal nucleo, che, nell'atomo in condizioni normali di equilibrio, corrisponde al numero degli elettroni orbitanti.

La teoria di questi strati elettronici è molto più complessa di quella esposta, ma questa è sufficiente a chiarire i concetti su cui si basano i fenomeni elettrici.

La distanza fra strato e strato e tra questi e il nucleo è enorme in confronto

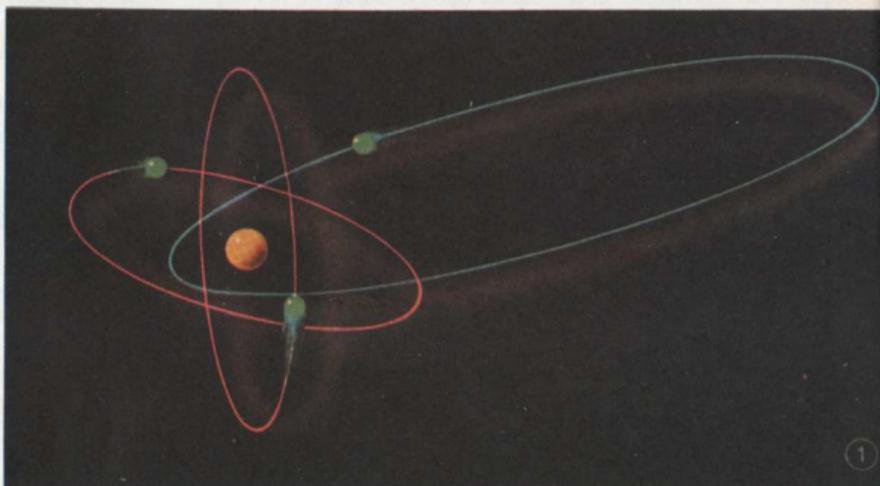


Tavola N. 1 - Rappresentazione schematica di un atomo di litio con i suoi elettroni ruotanti attorno al nucleo (Documento Philips).

alle dimensioni del nucleo e degli elettroni, per cui la materia e cioè il nucleo e gli elettroni occupano una piccolissima parte dello spazio occupato dall'atomo. A ciascun strato compete una determinata quantità di energia: l'energia minore è posseduta dallo strato più vicino al nucleo.

L'atomo è in condizioni normali di equilibrio quando ogni elettrone si muove nell'orbita dello strato che gli compete, secondo un perfetto equilibrio energetico.

L'elettrone può tuttavia saltare da un'orbita interna ad una più esterna e quindi di maggior energia, se la quantità di energia ricevuta corrisponde a quella necessaria al salto.

L'atomo ha però tendenza a ristabilire l'equilibrio, per cui l'elettrone ritorna nella sua orbita restituendo l'energia ricevuta sotto forma di radiazione.

Ecco alcuni esempi di come sono distribuiti gli elettroni orbitanti di alcuni elementi:

L'atomo dell'alluminio *Al* consiste di un nucleo di 14 neutroni e di 13 protoni, attorno al quale ruotano 13 elettroni distribuiti su tre strati: due sullo strato *K*, otto sullo strato *L*, e tre sullo strato *M*. (fig. 1.2). L'atomo di rame *Cu* è costituito da un nucleo di 34 neutroni e 29 protoni e da 29 elettroni orbitanti: 2 sullo strato *K*, 8 sullo strato *L*, 18 sullo strato *M* e 1 sullo strato *N* (fig. 1.3). L'atomo di cloro *Cl* consiste di un nucleo di 18 neutroni e di 17 protoni e di 17 elettroni orbitanti distribuiti su tre orbite: 2 sullo strato *K*, 8 sullo strato *L* e 7 sullo strato *M* (fig. 1.4).

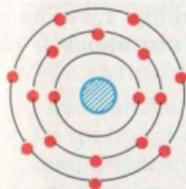


Fig. 1.2 - Struttura dell'atomo di alluminio, *Al*.

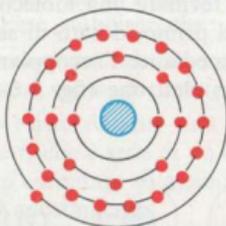


Fig. 1.3 - Struttura dell'atomo di rame, *Cu*.

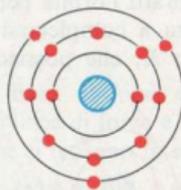


Fig. 1.4 - Struttura dell'atomo di cloro, *Cl*.

La struttura dell'atomo caratterizza le proprietà fisiche e chimiche di un elemento, mentre la stabilità di un atomo è determinata dal numero degli elettroni dei suoi strati. Se gli strati sono completi, l'atomo è stabile ed inerte e quindi non può partecipare a reazioni chimiche e non produce spontaneamente fenomeni elettrici.

L'elio, il neon, l'argon, per esempio, la cui struttura atomica è rappresentata in fig. 1.5, sono gas inerti perché le orbite dei loro atomi sono complete.

## 1.8. IL POTENZIALE, LA DIFFERENZA DI POTENZIALE

Un corpo, quando assume una carica elettrica positiva o negativa per la perdita o per l'acquisto di elettroni, si dice *elettrizzato*, perché ha acquistato un *potenziale elettrico* positivo o negativo, intendendo per potenziale l'energia elettrica che il corpo possiede in virtù delle sue cariche in eccesso o in difetto.

Quando due corpi non sono allo stesso potenziale e cioè sono elettrizzati con quantità di cariche diverse, tra loro esiste una *differenza di potenziale* (d.d.p.), che in seguito potrà essere chiamata anche tensione e forza elettromotrice.

La d.d.p. esiste non solo tra un corpo caricato negativamente e un altro caricato positivamente, ma anche tra due corpi entrambi elettrizzati, per esempio, negativamente, purché l'uno abbia densità di cariche maggiori dell'altro. Il corpo meno negativo si deve considerare positivo rispetto all'altro.

La d.d.p. è la diretta conseguenza delle forze coulombiane. Più propriamente la d.d.p. è la pressione elettrica che le forze esercitano tra due corpi diversamente elettrizzati, pressione che costringerà gli elettroni a passare dal corpo a potenziale negativo al corpo a potenziale positivo.

La d.d.p. si manifesta:

- a) *spontaneamente*, tra due corpi in contatto che possiedono diverso numero di elettroni periferici (effetto Volta);
- b) *artificialmente*, tra i morsetti del generatore elettrico.

Il generatore è una macchina che aspira gli elettroni da un morsetto, che diventa positivo, per addensarli sull'altro morsetto, che diventa negativo. È un trasformatore di energia di una forma qualsiasi in energia elettrica. Praticamente si hanno:

- a) generatori chimici (pile e accumulatori) che trasformano l'energia chimica in energia elettrica;
- b) generatori meccanici (dinamo o alternatori) che trasformano l'energia meccanica in energia elettrica;
- c) generatori termici (pile termoelettriche) che trasformano l'energia calorifica in energia elettrica.

L'unità di misura del potenziale e della differenza di potenziale è il *volt*, il cui simbolo è V.

## 1.9. LA CORRENTE ELETTRICA, LA QUANTITÀ DI ELETTRICITÀ, LA DENSITÀ

Consideriamo due corpi *A* e *B* tra i quali esiste una differenza di potenziale e cioè una pressione elettrica, collegati tra loro mediante un mezzo opportuno (conduttore) che permette il passaggio di elettroni (fig. 1.7).

Se  $A$  è negativo e  $B$  è positivo, gli elettroni scorrono attraverso il mezzo di collegamento da  $A$  a  $B$ , per riempire il posto degli elettroni mancanti in questo ultimo.

Si ha perciò, attraverso il conduttore, una *corrente di elettroni*, detta comunemente *corrente elettrica*.

Naturalmente, pur essendo la forza di attrazione tra gli elettroni di  $A$  e gli ioni positivi di  $B$  reciproca, non saranno mai gli ioni positivi a doversi spostare verso gli elettroni, per la grande massa di cui sono dotati in confronto a quella degli elettroni, e perché, almeno nei conduttori solidi, essi sono vincolati nel reticolo molecolare della materia.

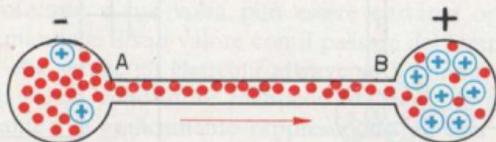


Fig. 1.7 - Gli elettroni passano da  $A$  a  $B$ .

La corrente di elettroni va dunque dal meno al più, dal negativo al positivo, anche se è ancora in uso la convenzione, dovuta a vecchie teorie, di stabilire il senso della corrente elettrica dal positivo al negativo. Il senso della corrente comunque non influisce sui fenomeni e sulle leggi dell'elettricità.

La corrente è la causa diretta di tutti i fenomeni elettrici. È la corrente che attraversando opportuni apparecchi, trasforma l'energia elettrica in energia calorifica (ferri da stiro, lampade elettriche, ecc.), in energia chimica (galvanostegia, accumulatori, ecc.), in energia meccanica (altoparlanti, motori elettrici, ecc.). Propriamente la corrente elettrica produce tre effetti principali:

- a) effetto termico;
- b) effetto chimico;
- c) effetto magnetico.

La corrente elettrica durerà fino a che esisterà d.d.p. tra i corpi  $A$  e  $B$ , fino a che cioè il corpo  $A$  avrà elettroni in eccesso rispetto a  $B$ . Quando però entrambi i corpi avranno acquistato lo stesso potenziale o saranno diventati neutri per effetto del passaggio degli elettroni eccedenti di  $A$  negli ioni positivi di  $B$ , non si avrà più passaggio di corrente.

Perché questa possa durare non solo per il brevissimo tempo impiegato dai corpi  $A$  e  $B$  a divenire equipotenziali o neutri, occorre, mediante un generatore elettrico  $G$  (fig. 1.8) aspirare gli elettroni da  $B$  e riportarli in  $A$ , onde mantenere la d.d.p. e cioè il dislivello elettrico tra i due corpi, come farebbe una pompa  $P$  aspirante-premente (fig. 1.9) applicata ai due vasi comunicanti  $A$  e  $B$  per mantenere tra essi il dislivello d'acqua  $H$ .

Il generatore elettrico per poter compiere il lavoro che richiede lo spostamento degli elettroni deve attingere ad altre forme di energia, come detto nel paragrafo precedente.

L'unità di misura della corrente elettrica è l'*ampere* il cui simbolo è *A*.

L'intensità *I* della corrente elettrica dipende dalla velocità di scorrimento degli elettroni lungo il conduttore, dipende cioè dal numero degli elettroni che passano nel conduttore in un minuto secondo.

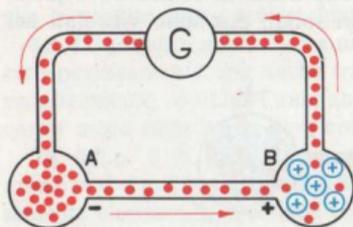


Fig. 1.8 - Il generatore *G* mantiene la *d.d.p.* tra *A* e *B*.

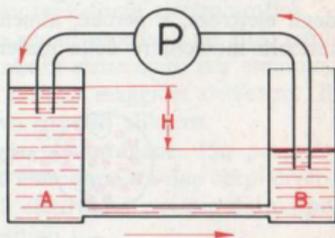


Fig. 1.9 - La pompa *P* mantiene il dislivello *H* tra *A* e *B*.

Indicando con *Q* la carica complessiva degli elettroni o quantità di elettricità o quantità di corrente e con *t* il tempo durante il quale gli elettroni scorrono nel conduttore, l'intensità *I* della corrente è data da:

$$I = \frac{Q}{t} \quad \text{da cui} \quad Q = I \cdot t. \quad (1.3)$$

Un ampere è quindi un coulomb al secondo, è il flusso cioè di  $6,25 \cdot 10^{18}$  elettroni al secondo.

Considerando che tanti sono gli elettroni che entrano nel conduttore in un secondo, altrettanti devono essere gli elettroni che ne escono nello stesso tempo, si comprende che in un conduttore la intensità di corrente è la medesima in ogni punto, anche se il conduttore varia di sezione e di resistività.

Ciò conduce a stabilire che nella sezione minore del conduttore si avrà il massimo addensamento di elettroni, con conseguente aumento dell'intensità di corrente *I* per ogni unità di superficie *s*.

Si chiama appunto *densità di corrente d* il rapporto tra l'intensità *I* e la sezione *s* del conduttore, e cioè:

$$d = \frac{I}{s}. \quad (1.4)$$

L'unità di misura della densità è l'*ampere per mm<sup>2</sup>* (A/mm<sup>2</sup>).

Studieremo in seguito che la corrente elettrica può dipendere anche dal movimento di ioni negativi e di ioni positivi contemporaneamente. L'intensità

della corrente è in tal caso la somma della quantità di elettricità negativa che attraversa il conduttore in un senso e di quella positiva che si sposta in senso opposto, nell'unità di tempo, in quanto il movimento di una carica positiva in un senso equivale al movimento di una eguale carica negativa in senso opposto.

La corrente elettrica infine può essere:

- a) **continua**, quando è prodotta da elettroni che si spostano sempre nello stesso senso;
- b) **alternativa**, quando è prodotta dallo spostamento di elettroni ora in un senso ora nell'altro senso.

La corrente continua a sua volta può essere costante oppure variabile. È costante quando mantiene il suo valore con il passare del tempo. Significa allora che il generatore che spinge gli elettroni attraverso il conduttore ha una d.d.p. costante e che lo stesso conduttore mantiene inalterate le sue caratteristiche. La corrente costante  $I$  è graficamente rappresentata da una retta parallela all'asse dei tempi  $t$  (fig. 1.10).

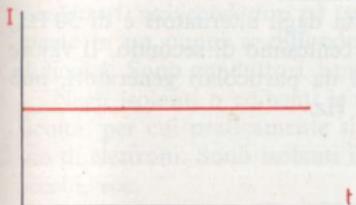


Fig. 1.10 - Corrente continua costante.



Fig. 1.11 - Corrente continua variabile.

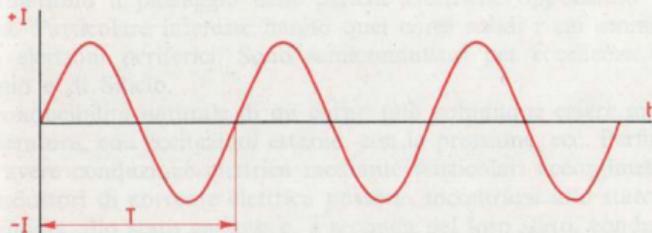


Fig. 1.12 - Corrente alternata.

È variabile quando cambia il suo valore con il passare del tempo. La corrente modulata, per esempio, di un microfono a carbone è variabile unisenso (fig. 1.11), perché generata da una d.d.p. costante che spinge gli elettroni in un conduttore di caratteristiche variabili.

I generatori di corrente continua sono le pile, gli accumulatori e le dinamo.

Tipica corrente alternativa è la corrente alternata prodotta dagli alternatori. Questi producono una d.d.p. che inverte periodicamente la sua polarità, secondo una legge sinusoidale che verrà studiata in seguito, per cui gli elettroni sono costretti a scorrere nel conduttore periodicamente ora in un senso, ora in senso opposto. La fig. 1.12 rappresenta il grafico dell'andamento della corrente alternata. È necessario anticipare ora il concetto di una grandezza legata alla corrente alternata e cioè quello di frequenza. Dalla fig. 1.12 si rileva che le variazioni e le inversioni della corrente si ripetono con periodicità dopo ogni tempo  $T$ , detto *periodo* o *ciclo*. Il numero di questi periodi per ogni minuto secondo si chiama *frequenza*  $f$ , che si calcola con la formula:

$$f = \frac{1}{T}. \quad (1.5)$$

La frequenza, che dimensionalmente è l'inverso di un tempo, si misura in hertz (Hz) o in *periodi al secondo* o *cicli al secondo*.

Il valore della frequenza industriale, prodotta dagli alternatori è di 50 Hz; ciò significa che la corrente si inverte ad ogni centesimo di secondo. Il valore delle frequenze usate in campo radio prodotte da particolari generatori, può variare da qualche decina di Hz a milioni di Hz.

## Capitolo Secondo

### La conduzione elettrica nei solidi nei liquidi e nei gas

#### 2.1. CONDUTTORI, SEMICONDUTTORI ED ISOLANTI

Non tutti i corpi permettono il libero passaggio della corrente elettrica. A seconda della loro struttura atomica e molecolare e a seconda del loro stato fisico, conducono l'elettricità in gradi e in modo diversi, fino ad impedire quasi totalmente il passaggio di elettroni.

Pur non potendo fare una netta divisione tra loro, essi si distinguono in corpi *conduttori*, *semiconduttori* ed *isolanti*. Nei conduttori le cariche elettriche comunicate in un punto si diffondono rapidissimamente senza incontrare sensibile difficoltà. Sono conduttori i metalli, le soluzioni acide e saline, il carbone, ecc.

Negli isolanti o coibenti le cariche elettriche si diffondono con enorme difficoltà, per cui praticamente si dice che gli isolanti non permettono il passaggio di elettroni. Sono isolanti il vetro, la resina, la gomma, l'olio, l'aria e i gas secchi, ecc.

Occorre osservare che non esistono però né perfetti conduttori né perfetti isolanti, ma solo buoni conduttori e buoni isolanti.

Tra i conduttori e gli isolanti vi sono alcuni elementi, detti *semiconduttori*, che permettono il passaggio delle cariche elettriche opponendo una discreta difficoltà. Particolare interesse hanno quei corpi solidi i cui atomi possiedono quattro elettroni periferici. Sono semiconduttori per eccellenza i cristalli di Germanio e di Silicio.

La conducibilità naturale di un corpo può comunque essere modificata con la temperatura, con eccitazioni esterne, con la pressione, ecc. Perfino nel vuoto si può avere conduzione elettrica mediante particolari accorgimenti e sistemi.

I conduttori di corrente elettrica possono incontrarsi allo stato solido, allo stato liquido, allo stato gassoso e, a seconda del loro stato, conducono la corrente in modo diverso l'uno dall'altro.

Occorre però stabilire anzitutto che, qualunque sia lo stato fisico del corpo, la conduzione elettrica avviene:

- a) se il corpo è ionizzato, se cioè in esso vi è formazione di ioni;
- b) se al conduttore è applicata una differenza di potenziale, che spinge gli elettroni a spostarsi in un determinato senso.

Occorre anche ammettere, per l'esatta comprensione del meccanismo della conduzione, che un elettrone non può saltare da una estremità all'altra del conduttore (tranne che nei gas ultra rarefatti), ma passa solo da un atomo ad un'ione positivo vicino.

## 2.2. LA CONDUZIONE ELETTRICA NEI METALLI

La conduzione elettrica nei solidi può avvenire in modi diversi a seconda della configurazione dell'aggregato atomico e molecolare costituente il corpo. Più propriamente la conduzione può avvenire:

- per mezzo di elettroni liberi come nei conduttori metallici;
- per mezzo di elettroni in eccesso e di elettroni in difetto (lacune) come nei semiconduttori.

I metalli sono costituiti da atomi che possiedono meno di quattro elettroni periferici. Questi sono pochissimo vincolati al nucleo e quindi sono instabili, per cui senza alcuna forza esterna (è sufficiente la temperatura ambiente) abbandonano i loro atomi che diventano ioni positivi, per trasferirsi su altri ioni positivi vicini, che ridiventano atomi. Si ha cioè un continuo scambio di elettroni fra gli atomi. Il corpo risulta spontaneamente ionizzato. Difatto un buon conduttore è costituito da:

- atomi (cariche neutre);
- elettroni liberi o vaganti (ioni negativi);
- atomi in difetto di elettroni (ioni positivi).

Il numero degli elettroni liberi o dei corrispondenti ioni positivi è però piccolissimo rispetto al numero degli atomi.

Lo spostamento degli elettroni vaganti avviene in tutti i sensi ma con perfetta simmetria, (fig. 2.1), per cui la risultante delle debolissime correnti che producono è nulla. Pertanto il conduttore, considerato nel suo insieme, è neutro.

Se si stabilisce invece una d.d.p. alle estremità del conduttore, mediante un generatore elettrico, gli elettroni liberi vengono respinti dalla polarità negativa

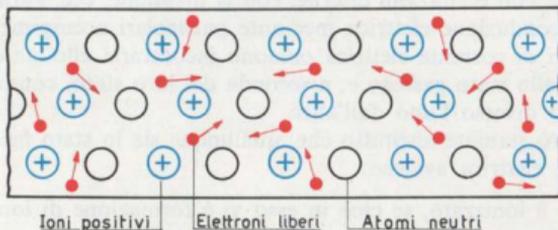


Fig. 2.1 - Gli elettroni si spostano simmetricamente in tutti i sensi.

e attratti dalla polarità positiva, per cui alle velocità termiche, dirette in tutte le direzioni, si sovrappone una componente di trasporto diretta in un unico senso (verso il polo positivo) e che determina nel conduttore una corrente elettrica, ossia uno scorrimento di elettroni da un atomo ad uno ione positivo vicino, detto *corrente di conduzione* (fig. 2.2).

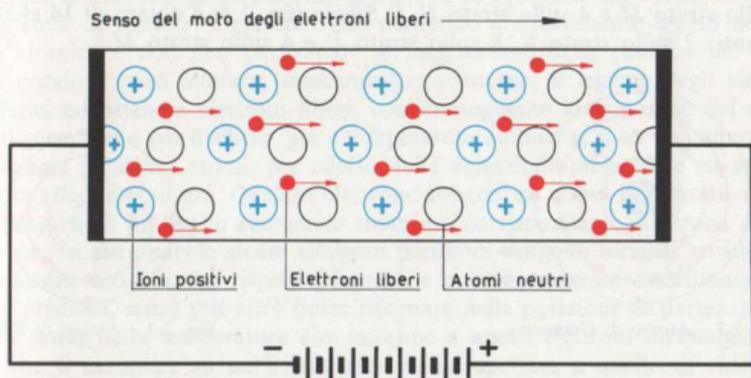


Fig. 2.2 - Gli elettroni si spostano nello stesso senso.

Osserviamo che la conduzione elettrica nei metalli è di natura elettronica perché dovuta allo scorrimento di soli elettroni liberi; infatti gli ioni positivi, pur risultando sottoposti alle forze di attrazione del polo negativo e di repulsione del polo positivo, non possono scorrere perché vincolati nel reticolo molecolare.

La componente di trasporto è tanto più intensa quanto più grande è la d.d.p. applicata al conduttore, perciò anche la velocità e il numero degli elettroni fluenti dal polo negativo al polo positivo, e quindi l'intensità della corrente elettrica, crescono, per un medesimo conduttore, con l'aumentare della d.d.p.

Occorre però distinguere la velocità di scorrimento degli elettroni, dovuta alla d.d.p., dalla velocità di propagazione dell'energia elettrica nel conduttore. Mentre la prima, nei conduttori solidi, è dell'ordine di qualche cm/sec, la velocità di propagazione lungo il conduttore, ossia degli scambi tra elettroni ed atomi, è dell'ordine di quella della luce (300.000 km/sec).

Consideriamo un conduttore lungo 1.000 metri sottoposto ad una d.d.p. Se all'estremità negativa entra un elettrone, all'estremità positiva esce un altro elettrone dopo un trecentomillesimo di secondo, mentre lo spostamento materiale degli elettroni liberi è di una frazione piccolissima di millimetro. La velocità di propagazione e cioè del movimento d'impulso lungo il conduttore è dunque grandissima, mentre la velocità di scorrimento degli elettroni è di soli pochi cm/sec.

### 2.3. LA CONDUZIONE ELETTRICA NEI SEMICONDUTTORI INTRINSECI

I semiconduttori sono elementi, i cui atomi possiedono quattro elettroni periferici, come, ad esempio, il Germanio ed il Silicio. Infatti il Germanio ha 32 elettroni orbitanti (fig. 2.3) così distribuiti: 2 sullo strato *K*, 8 sullo strato *L*, 18 sullo strato *M* e 4 sullo strato *N*. Il Silicio (fig. 2.4) è dotato di 14 elettroni orbitanti: 2 sullo strato *K*, 8 sullo strato *L* e 4 sullo strato *M*.

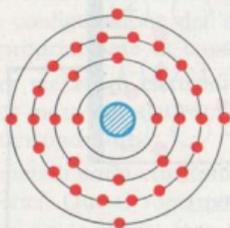


Fig. 2.3 - Atomo di Germanio.

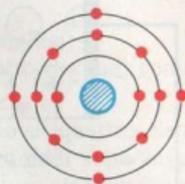


Fig. 2.4 - Atomo di Silicio.

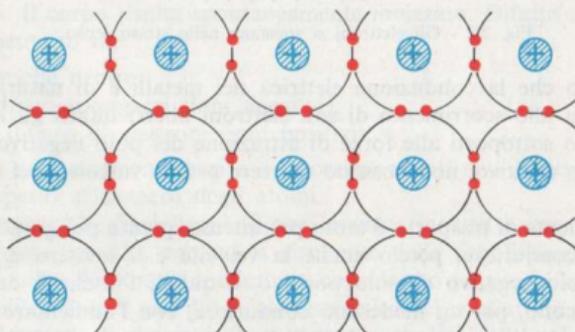


Fig. 2.5 - Legami atomici nei semiconduttori.

I semiconduttori presentano una conducibilità elettrica molto minore di quella dei metalli a causa della diversa configurazione del reticolo atomico e del diverso comportamento elettronico degli elementi che li costituiscono. Infatti, se si prescinde dalla eccitazione che la temperatura ambiente può produrre nei legami degli atomi di germanio e di silicio, i quattro elettroni periferici servono a legare tra loro gli atomi e precisamente legano 4 atomi adiacenti, per cui ogni atomo risulta legato ad un altro con una coppia di elettroni (legami di valenza). Considerando poi che gli elettroni degli strati più interni sono tanto vincolati al nucleo, da determinare un cosiddetto *nocciolo ionico positivo* stabile,

di carica positiva  $+4$ , la struttura atomica e di legame può essere rappresentata con il modello bidimensionale di figura 2.5. Gli elettroni periferici si trovano allora impegnati a legare tra loro gli atomi, cioè a tenere assieme il corpo. Non possono perciò abbandonare l'atomo, non possono essere liberi e dare origine alla ionizzazione naturale o spontanea, come avviene nei conduttori metallici. Si dice che questi elettroni si trovano in equilibrio sul livello energetico della zona di valenza. Ogni elettrone periferico è strettamente legato nell'edificio atomico e non può partecipare al meccanismo della conduzione.

È possibile però alterare, mediante forze esterne, il legame degli elettroni periferici ed ottenere elettroni liberi, con conseguente ionizzazione del corpo. Per il germanio e per il silicio, già a temperatura ambiente, si ha una alterazione nei legami di alcuni atomi, per effetto della agitazione molecolare ed atomica dovuta alla temperatura. Qualche elettrone abbandona allora la zona di valenza, per passare ad un livello energetico superiore corrispondente alla zona di conduzione. In altre parole alcuni elettroni periferici vengono espulsi, a causa dell'agitazione termica, dai rispettivi legami, e possono migrare disordinatamente per il cristallo, senza per altro poter ritornare nella posizione di partenza, sempre a causa della temperatura che imprime a questi elettroni un'energia cinetica che li mantiene su un livello energetico superiore a quello di valenza.

Questi elettroni liberi prendono il nome di *elettroni in eccesso* e sottoposti ad una d.d.p., si dirigono dalla polarità negativa a quella positiva, come per i metalli, dando origine ad una *conduzione per mezzo di elettroni*.

Contemporaneamente avviene nel semiconduttore un'altra forma di conduzione. Quando un elettrone ha abbandonato il legame di valenza, in questa è rimasto un posto libero, un buco o cavità, o come si dice comunemente una *lacuna*, che deve essere considerata una carica elettrica positiva di valore uguale e contrario ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  coulomb) a quella dell'elettrone.

È possibile allora agli elettroni, rimasti nella zona di valenza, spostarsi per colmare le lacune formatesi (fig. 2.6: A elettroni, B lacune). Perciò, per ogni

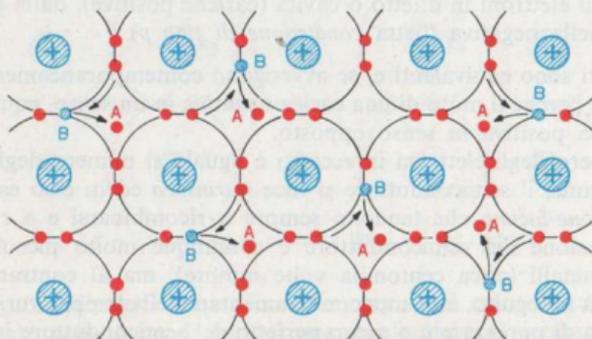


Fig. 2.6 - Formazione di elettroni liberi e di lacune.

elettrone che abbandona il legame per trasferirsi nella zona di conduzione, vi sarà un elettrone della zona di valenza che andrà a saturare la lacuna, dando origine ad uno spostamento disordinato delle lacune in senso opposto a quello degli elettroni e quindi ad una *conduzione per mezzo di lacune*. Di fatto ogni elettrone che colma una lacuna, ne crea un'altra nell'atomo contiguo e dato che questo processo si ripete continuamente, si può parlare veramente di un moto di lacune.

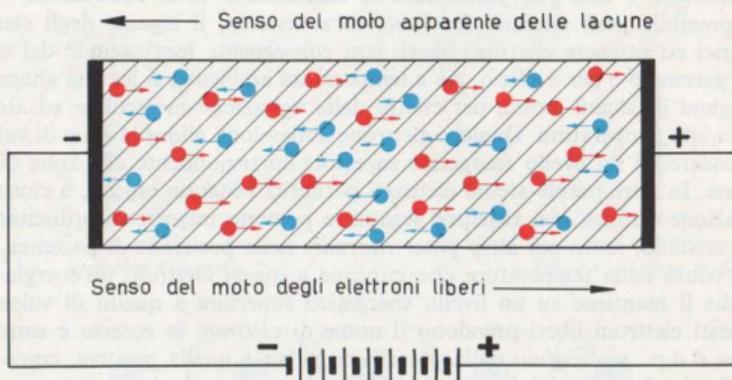


Fig. 2.7 - Conduzione intrinseca. Moto degli elettroni e delle lacune.

Se ora al semiconduttore si applica una d.d.p. si ottiene una conducibilità intrinseca (fig. 2.7), dovuta:

- a) al moto di elettroni liberi o in eccesso (cariche negative), dalla polarità negativa a quella positiva (detta *conduzione di tipo n*);
- b) al moto di elettroni in difetto o cavità (cariche positive), dalla polarità positiva a quella negativa (detta *conduzione di tipo p*).

I due moti sono equivalenti e, se avvengono contemporaneamente, gli effetti si sommano, perché il moto di una carica negativa in un senso, equivale al moto di una carica positiva in senso opposto.

Se il numero degli elettroni in eccesso è uguale al numero degli elettroni in difetto o lacune, il semiconduttore si dice *intrinseco* ed in esso esistono allora *coppie elettrone-lacuna* che tendono sempre a ricombinarsi e a riformarsi.

La conduzione del semiconduttore è comunque molto piccola rispetto a quella dei metalli (circa centomila volte minore), ma al contrario di questi, come si vedrà in seguito, aumenta con l'aumentare della temperatura. Ma soprattutto lo stato di purezza più o meno perfetto del semiconduttore influisce enormemente sulla sua conducibilità.

## 2.4. LA CONDUZIONE ELETTRICA NEI SEMICONDUTTORI INQUINATI

La debole conducibilità dei semiconduttori intrinseci può essere notevolmente aumentata introducendo nei cristalli di germanio o di silicio (elementi tetravalenti = quattro elettroni periferici) allo stato chimicamente puro, pochi atomi di un altro elemento pentavalente (cinque elettroni periferici) oppure trivalente (tre elettroni periferici).

Si viene in tal modo a rompere l'equilibrio della formazione elettroni liberi e lacune, per cui il semiconduttore, detto *inquinato*, acquista una conducibilità dovuta o ai soli elettroni in eccesso oppure alle sole lacune.

Se la conducibilità è dovuta agli elettroni liberi o in eccesso, il semiconduttore è di *tipo n*, perché la conduzione è dovuta agli elettroni (cariche negative), se invece è dovuta a lacune (cariche positive), il semiconduttore è di *tipo p*.

Il fenomeno si spiega con il passaggio di alcuni elettroni dalla zona di valenza a quella di conduzione se le impurità introdotte nel semiconduttore intrinseco sono pentavalenti, e alla creazione elettroni-cavità se l'impurità aggiunta è trivalente.

Infatti se in un semiconduttore, per esempio, di germanio puro, si introduce un elemento pentavalente, ossia dotato di cinque elettroni periferici, come ad esempio l'arsenico (trentatré elettroni orbitanti: 2 sulla strato *K*, 8 sullo strato *L*, 18 sullo strato *M*, 5 sullo strato *N*), il fosforo (quindici elettroni orbitanti: 2 sullo strato *K*, 8 sullo strato *L*, 5 sullo strato *M*), l'antimonio, ecc., si ha una perturbazione nei legami del reticolo atomico, in quanto dei cinque elettroni periferici dell'elemento pentavalente, solo quattro possono essere legati con

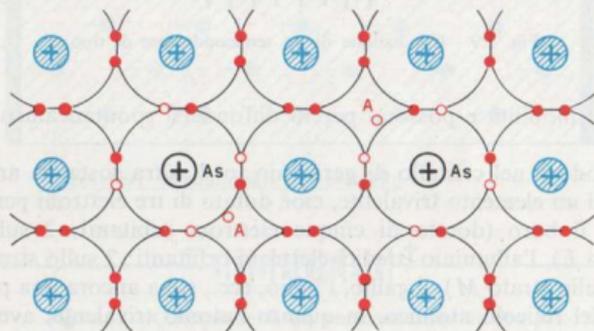


Fig. 2.8 - Formazione di elettroni liberi nel Ge di tipo n.

gli atomi di germanio nella zona di valenza, per cui il quinto elettrone rimane libero di vagare nella zona di conduzione, conferendo al germanio una *conduttività di tipo n*. L'atomo pentavalente, avendo perduto un elettrone periferico,

diventa uno ione positivo di carica  $+1$ , presenta perciò una lacuna che però rimane immobilizzata nella struttura cristallina e non può partecipare alla conduzione (fig. 2.8).

Il cristallo, che nel complesso è neutro perché possiede tanti elettroni quanti sono i protoni, sottoposto ad una d.d.p. presenta una conduzione dovuta allo scorrimento di elettroni liberi dalla polarità negativa a quella positiva, come avviene per i metalli (fig. 2.9).

L'atomo dell'elemento pentavalente, che dona elettroni liberi, prende il nome di *datore*.

È importante insistere sul fatto che i datori rimangono immobilizzati nella struttura cristallina, rimangono cioè fissi, mentre gli elettroni donati hanno

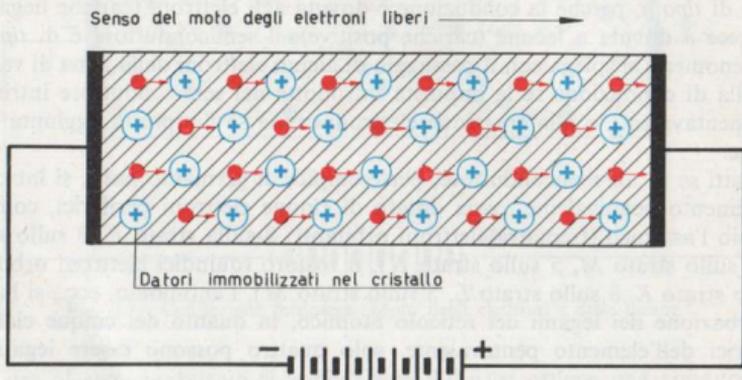


Fig. 2.9 - Conduzione di un semiconduttore di tipo *n*.

una notevole mobilità e possono perciò diffondersi spontaneamente in tutto il materiale.

Se si introduce nel cristallo di germanio (o di altra sostanza analoga) qualche atomo di un elemento trivalente, cioè dotato di tre elettroni periferici, come ad esempio il boro (dotato di cinque elettroni orbitanti: 2 sullo strato *K*, 3 sullo strato *L*), l'alluminio (tredici elettroni orbitanti: 2 sullo strato *K*, 8 sullo strato *L*, 3 sullo strato *M*), il gallio, l'indio, ecc., si ha ancora una perturbazione nei legami del reticolo atomico, in quanto l'atomo trivalente, avendo un elettrone in meno di quelli che occorrono per completare tutti i legami con gli atomi di germanio, lascia una lacuna (fig. 2.10). Questa cattura allora, per completare il legame, un elettrone ad un atomo contiguo, creando in questo una lacuna, che verrà neutralizzata da un elettrone di un altro atomo.

Vi è pertanto formazione di coppie elettrone-lacuna che si spostano disordinatamente nella massa cristallina. La lacuna corrisponde ad una carica posi-

tiva mobile, si comporta cioè come un elettrone positivo che conferisce al germanio una *conduttività di tipo p*.

L'atomo dell'elemento trivalente, per il fatto di catturare un elettrone e di generare una lacuna, diventa uno ione negativo immobilizzato nella struttura cristallina e prende il nome di *accettore*. Per cui, come per i datori, l'accettore è fisso, mentre le lacune generate hanno una notevole mobilità.

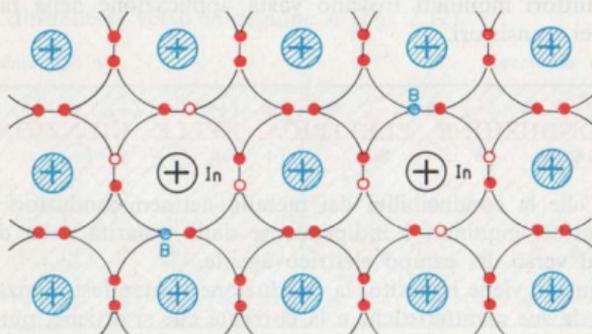


Fig. 2.10 - Formazione di lacune nel germanio di tipo *p*.



Fig. 2.11 - Conduzione di un semiconduttore di tipo *p*.

Il germanio di tipo *p*, sottoposto ad una d.d.p., presenta allora una conduzione dovuta al movimento apparente di lacune dalla polarità positiva a quella negativa (fig. 2.11).

La presenza di elettroni liberi nel semiconduttore di tipo *n* e di lacune nel semiconduttore di tipo *p*, dovuta alle impurità aggiunte, rispettivamente penta-

valenti e trivalenti, aumenta notevolmente la conduttività del semiconduttore inquinato, rispetto al semiconduttore intrinseco. Normalmente la percentuale di datori e di accettori immessi nel germanio è molto bassa (1 atomo per ogni  $10^5 \div 10^6$  atomi di cristallo puro).

Infine la conduttività dei semiconduttori varia sensibilmente al variare delle radiazioni termiche e luminose.

I semiconduttori inquinati trovano vasta applicazione nella fabbricazione dei diodi e dei transistori.

## 2.5. LA CONDUZIONE ELETTRICA NELLE GIUNZIONI E NEI CONTATTI

Si è detto che la conducibilità dei metalli, dei semiconduttori intrinseci e dei semiconduttori inquinati è indipendente dalla polarità della d.d.p. applicata, ossia dal verso del campo elettrico agente.

Anche se questo viene invertito, la conduzione si manifesta senza differenze, mantiene cioè le sue caratteristiche e la corrente che si ottiene, pur invertendo il senso, mantiene costante, fermo restando il valore della d.d.p. applicata, la sua intensità.

Se invece due metalli o semiconduttori diversi vengono messi a contatto, la conducibilità dell'insieme varia di valore a seconda del senso del campo elettrico agente, per effetto del particolare comportamento delle cariche elettriche che si trovano nelle immediate vicinanze della superficie di contatto.

Consideriamo brevemente e con una interpretazione semplificata dei fenomeni:

### a) la conduzione attraverso la giunzione tra un semiconduttore di tipo p e un semiconduttore di tipo n.

È opportuno anzitutto fare una distinzione fra giunzione e contatto, sebbene i fenomeni che essi comportano siano molto simili fra loro e sia a volte difficile attribuirli all'una o all'altro.

Due corpi si dicono a contatto quando aderiscono con una superficie ben levigata e pulita.

La giunzione invece è una unione più intima: è una superficie di demarcazione tra un semiconduttore di tipo *p* e un semiconduttore di tipo *n*, ottenuti inquinando un unico cristallo semiconduttore allo stato di purezza, mediante opportuni procedimenti.

Consideriamo, per esempio, un cristallo puro di germanio, che venga inquinato per metà con delle impurità pentavalenti che conferiscono una conduzione di tipo *n*, e per l'altra metà con delle impurità trivalenti che conferiscono una conduzione di tipo *p*, in modo che le due regioni inquinate risultino divise

da una ben definita superficie di demarcazione. Si è ottenuta una giunzione di tipo *n-p*.

Nella giunzione si manifesta il seguente fenomeno:

- gli elettroni liberi, in numero preponderante nella sezione *n*, tendono spontaneamente a diffondersi verso la regione *p*;
- le lacune, in numero preponderante nella regione *p*, tendono spontaneamente a diffondersi verso la regione *n* (fig. 2.12).

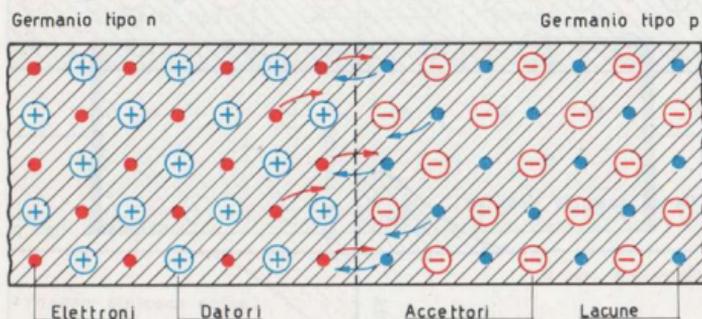


Fig. 2.12 - Diffusione degli elettroni liberi e delle lacune.

Come gli elettroni liberi e le lacune vengono a contatto attraverso la giunzione, si neutralizzano, lasciando in una zona, relativamente ristretta ( $10^{-4} \div 10^{-6}$  cm), da parte e parte della giunzione, un vuoto di cariche mobili (elettroni liberi e lacune). A tale zona si dà il nome di *strato di sbarramento*.

Ricordando che gli accettori e i donatori sono ioni fissi rispettivamente negativi e positivi, si comprende come nella stessa zona da parte e parte della giunzione, si determini una *carica spaziale positiva* nella regione *n* e una *carica spaziale negativa* nella regione *p* (fig. 2.13).

Si manifesta così spontaneamente una d.d.p. detta *barriera di potenziale*, tra le due regioni *n* e *p*, che ha polarità opposta a quella corrispondente al moto degli elettroni.

La barriera di potenziale  $V_0$  aumenta di valore con il fluire degli elettroni liberi verso la regione *p* e delle lacune verso la regione *n*, fino a controbilanciare e quindi ad impedire ogni ulteriore spostamento di cariche da una regione all'altra.

Sottoponendo i due semiconduttori in giunzione ad una d.d.p. esterna  $V$ , si ottiene un diverso comportamento della conduttività a seconda del verso della d.d.p. applicata.

Infatti la giunzione risulta ora sottoposta a due d.d.p.: quella intrinseca o barriera di potenziale  $V_0$  che ha verso fisso dalla regione *p* alla regione *n* e

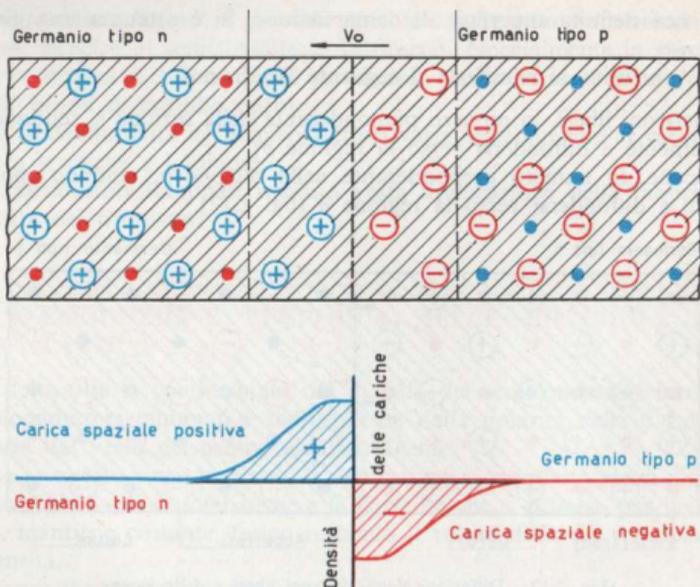


Fig. 2.13 - Formazione della barriera di potenziale.

quella applicata  $V$  che può agire in un senso o in senso opposto. Se si collega il polo negativo del generatore al semiconduttore di tipo  $n$  e il polo positivo al semiconduttore di tipo  $p$ , le due d.d.p. agiscono in senso contrario (fig. 2.14), per cui la *barriera di potenziale globale*  $V_t$  è data da:

$$V_t = V_0 - V, \quad (2.1)$$

da cui si deduce che la barriera di potenziale può essere diminuita, o annullata, o addirittura invertita, a seconda che la  $V$  applicata è inferiore, uguale o maggiore della  $V_0$ . In quest'ultimo caso viene favorita la diffusione e quindi il moto degli elettroni liberi dalla regione  $n$  alla regione  $p$  e delle lacune dalla regione  $p$  alla regione  $n$ , ottenendo conseguentemente una intensa corrente, detta *corrente diretta*, fra le due regioni.

Diremo in seguito che la giunzione presenta una bassa resistenza interna e che la corrente diretta dipende dalla densità dei portatori, dall'area della giunzione e dal potenziale applicato.

Se invece le due d.d.p. agiscono nello stesso senso (fig. 2.15) la barriera di potenziale globale  $V_t$  diventa:

$$V_t = V_0 + V. \quad (2.2)$$

La conducibilità attraverso la giunzione risulta allora enormemente indebolita in quanto la d.d.p. esterna concorre con quella intrinseca ad ostacolare il passaggio delle cariche elettriche. La corrente che si ottiene, detta *corrente inversa*, può risultare centinaia o migliaia di volte meno intensa di quella diretta, ed è dovuta alla diffusione, attraverso la superficie di giunzione, di qualche elettrone della regione *p* che viene attratto dalla regione *n* a potenziale positivo e di qualche lacuna della zona *n* attratta dalla regione *p* a potenziale negativo.

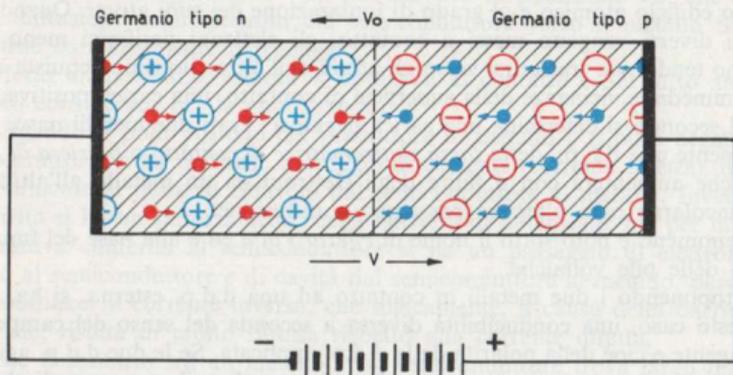


Fig. 2.14 - La giunzione conduce in senso diretto.

Verrà meglio specificato in seguito che la giunzione si comporta come una grande resistenza elettrica con in parallelo un condensatore dovuto alla barriera di potenziale e perciò allo strato di sbarramento.

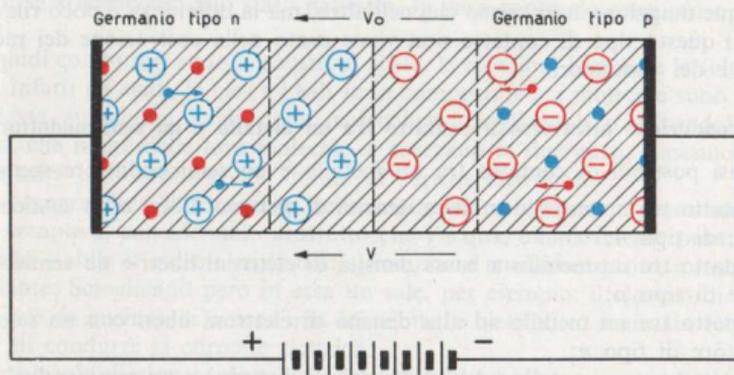


Fig. 2.15 - La giunzione conduce in senso inverso.

Si conclude allora che la giunzione tra due semiconduttori di tipo  $n$  e di tipo  $p$  costituisce un raddrizzatore, in quanto praticamente permette il passaggio della corrente elettrica in un senso solo. Per questo viene usata nella costruzione dei diodi a cristallo, le cui caratteristiche verranno descritte in seguito.

#### b) la conduzione attraverso il contatto tra due metalli diversi.

Ogni metallo ha un suo potenziale intrinseco, dovuto alla configurazione del suo edificio atomico e al grado di ionizzazione dei suoi atomi. Quando due metalli diversi vengono messi a contatto, gli elettroni periferici meno legati dell'uno tendono a trasferirsi verso gli atomi dell'altro. Il primo acquista allora, nelle immediate vicinanze della superficie di contatto, una carica positiva, mentre nel secondo si determina una carica negativa. Tra i due metalli nasce spontaneamente una d.d.p., detta *forza elettromotrice di contatto* o *barriera di potenziale*, che aumenterà con il fluire degli elettroni da un metallo all'altro, fino ad ostacolare ogni ulteriore passaggio o diffusione.

Il fenomeno è noto sotto il nome di *effetto Volta* ed è alla base del funzionamento delle pile voltaiche.

Sottoponendo i due metalli in contatto ad una d.d.p. esterna, si ha, anche in questo caso, una conducibilità diversa a seconda del senso del campo elettrico agente e cioè della polarità della d.d.p. applicata. Se le due d.d.p. agiscono nello stesso senso, concorrono entrambe ad ostacolare il passaggio di elettroni attraverso la superficie di contatto, salvo a permettere un passaggio inverso di elettroni dal secondo metallo al primo per effetto della polarità positiva applicata (corrente inversa). Se invece le due d.d.p. agiscono in senso contrario, quando quella esterna ha superato in valore assoluto quella intrinseca, si ha un intenso passaggio di elettroni dal primo al secondo metallo (corrente diretta).

La conducibilità attraverso la superficie di contatto tra due metalli diversi è dunque maggiore in un senso che nell'altro, ma la differenza è poco rilevante, per cui questo tipo di contatto non viene usato nella costruzione dei raddrizzatori e dei transistori.

#### c) la conduzione attraverso il contatto tra un metallo e un semiconduttore.

I casi possibili di contatto tra un metallo e un semiconduttore sono:

- 1) contatto tra un metallo a bassa densità di elettroni liberi e un semiconduttore di tipo  $n$ ;
- 2) contatto tra un metallo a bassa densità di elettroni liberi e un semiconduttore di tipo  $p$ ;
- 3) contatto tra un metallo ad alta densità di elettroni liberi con un semiconduttore di tipo  $n$ ;
- 4) contatto tra un metallo ad alta densità di elettroni e un semiconduttore di tipo  $p$ .

Dei quattro casi consideriamo quello di più facile interpretazione, perché molto simile alla giunzione  $n-p$ , e cioè il contatto tra un metallo a bassa densità di elettroni liberi e un semiconduttore di tipo  $n$ . Gli elettroni liberi del semiconduttore tendono allora a diffondersi nel metallo lasciando nel semiconduttore le cariche positive dei donatori che rimangono vincolate nel reticolo atomico.

Per l'aumentata densità di cariche positive determinatasi nel semiconduttore e di elettroni determinatasi nel metallo, nasce lungo la superficie di contatto, come per una giunzione  $n-p$ , una barriera di potenziale  $V_0$ , che cresce con la diffusione degli elettroni dal semiconduttore verso il metallo fino ad impedirne completamente il passaggio.

L'effetto di una d.d.p. esterna  $V$  applicata al contatto è del tutto analogo a quello considerato per la giunzione  $n-p$ .

Collegando il polo positivo del generatore al metallo e il polo negativo al semiconduttore, si ha un facile passaggio di corrente (corrente diretta), dovuta principalmente al fluire di elettroni dal semiconduttore al metallo. Invertendo la polarità si ha un rafforzamento della barriera di potenziale, ma per la polarità positiva conferita al semiconduttore si ha un passaggio di elettroni dal metallo al semiconduttore e di cavità dal semiconduttore al metallo, passaggio che costituisce la corrente inversa, che logicamente, a causa della barriera di potenziale, risulta di molto ridotta rispetto alla corrente diretta.

Anche il contatto tra un metallo e un semiconduttore trova largo impiego nella costruzione dei diodi raddrizzatori.

## 2.6. LA CONDUZIONE ELETTRICA NEI LIQUIDI

I liquidi riescono a condurre la corrente elettrica, e perciò sono buoni conduttori, se si ionizzano allo stato naturale. In caso contrario sono più o meno isolanti.

I liquidi conduttori sono le soluzioni acide, le soluzioni basiche e le soluzioni saline. Infatti gli acidi, le basi e i sali sono composti le cui molecole sono instabili. Basta aumentare l'agitazione molecolare sciogliendoli o diluendoli nell'acqua, che molte delle loro molecole si spezzano in due parti, ciascuno delle quali risulta elettrizzata e cioè dotata di cariche elettriche.

Per comprendere il fenomeno della ionizzazione naturale o spontanea di questi composti, consideriamo anzitutto che l'acqua, chimicamente pura, è un composto stabile le cui molecole non si ionizzano spontaneamente, è insomma un isolante. Sciogliendo però in essa un sale, per esempio, il cloruro di sodio  $NaCl$  (sale da cucina), si ottiene una soluzione (o elettrolito) ionizzata e quindi capace di condurre la corrente elettrica.

La molecola di cloruro di sodio è costituita da due atomi: uno di cloro  $Cl$  e uno di sodio  $Na$ .

L'atomo di cloro è costituito di un nucleo di 18 neutroni e di 17 protoni, attorno al quale orbitano 17 elettroni disposti su tre strati: 2 sullo strato *K*, 8 sullo strato *L* e 7 sullo strato *M*. Quest'ultimo strato tende a completarsi a 8 elettroni.

L'atomo di sodio ha un nucleo composto di 12 neutroni e di 11 protoni, attorno al quale orbitano 11 elettroni su tre strati: 2 sullo strato *K*, 8 sullo strato *L* e 1 sullo strato *M*.

L'atomo di cloro ha allora tendenza a combinarsi con un atomo di sodio, trascinandolo nella sua orbita esterna l'unico elettrone periferico del sodio. Si ottiene una molecola *NaCl* (fig. 2.16) piuttosto instabile, perché costituita da due atomi di massa rilevante, legati da un solo elettrone.

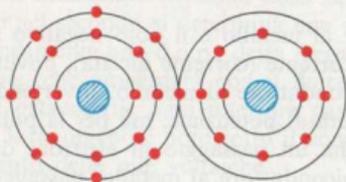


Fig. 2.16 - Molecola di *NaCl*.

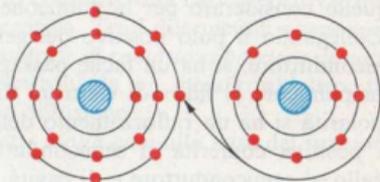
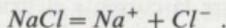


Fig. 2.17 - Scomposizione della molecola *NaCl* nei due ioni  $\text{Na}^+$  e  $\text{Cl}^-$ .

Fino a che rimane allo stato solido, il *NaCl* si mantiene in equilibrio, poiché l'agitazione molecolare è minima. Se invece viene sciolto in acqua esso partecipa all'agitazione molecolare dei liquidi, che è di entità rilevante, per cui le sue molecole si frazionano in due: il cloro trattiene però l'elettrone periferico del sodio e diviene ione negativo e il sodio di conseguenza diventa ione positivo (fig. 2.17).

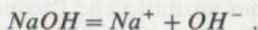


Analogo fenomeno avviene per gli acidi e per le basi.

L'acido solforico  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , per esempio, diluito in acqua si ionizza così:



L'idrato di sodio *NaOH* (base) si ionizza in quest'altro modo:



L'elettrolito dunque si ionizza spontaneamente e risulta costituito da:

- a) molecole di acqua (neutre);
- b) ioni positivi;
- c) ioni negativi.

Gli ioni negativi e positivi, pur vagando liberamente in tutti i sensi, si mantengono uniformemente distribuiti in tutto il liquido. Applicando una d.d.p. all'elettrolito mediante due elettrodi (fig. 2.18), si ha un movimento di ioni e precisamente i *cationi* (ioni positivi) respinti dall'*anodo* (elettrodo positivo) sono attirati dal *catodo* (elettrodo negativo), dove recuperano l'elettrone o gli elettroni perduti, ridiventando atomi; gli *anioni* (ioni negativi) respinti dal catodo, sono attirati dall'anodo, al quale cedono gli elettroni in eccesso, ridiventando atomi. Avviene cioè che gli elettroni escono dal catodo ed entrano nell'anodo, come se attraversassero il liquido direttamente dal catodo all'anodo.

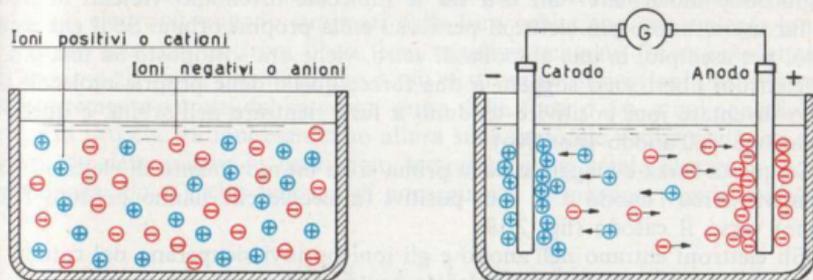


Fig. 2.18 - Gli ioni positivi vanno al catodo, i negativi all'anodo.

Il passaggio di corrente si ha fino a che il liquido rimane ionizzato, cioè fino a che nell'elettrolito è presente l'acqua, perché anche le molecole dell'acqua, sotto l'urto violento degli ioni, fortemente attratti dagli elettrodi, si spezzano in ioni positivi di idrogeno  $H$  e in ioni negativi di  $O$ . I primi attratti dal catodo recuperano gli elettroni perduti, i secondi attratti dall'anodo cedono gli elettroni in eccesso, ed entrambi ridiventano atomi che si liberano dall'elettrolito sotto forma di bollicine di gas o entrano in combinazione con le altre sostanze che compongono l'elettrolito. La concentrazione dell'elettrolito va così aumentando fino al suo massimo.

Mentre nei solidi la corrente elettronica di conduzione è dovuta allo scorrimento di elettroni, nei liquidi la corrente elettrica, detta *corrente di convezione*, è dovuta allo scorrimento di ioni positivi in un senso e di ioni negativi in senso opposto, e cioè alla somma degli effetti delle cariche di segno opposto, e dà luogo ad un trasporto di materia.

Studieremo in seguito l'effetto chimico della corrente nei liquidi.

## 2.7. LA CONDUZIONE ELETTRICA NEI GAS A PRESSIONE ATMOSFERICA

I gas a pressione atmosferica a temperatura ambiente sono isolanti. Difatto le loro molecole, più mobili che nei liquidi, si urtano meno violentemente in

quanto, non trattenute per coesione in nessuna direzione, possono sotto l'urto retrocedere, attutendolo. Considerando poi che l'energia cinetica che le molecole in movimento acquistano è debolissima, a causa del brevissimo percorso libero che ciascuna può compiere prima di scontrarsi con un'altra, si comprende come l'urto non sia sufficiente alla rottura delle molecole in due ioni.

Perché il gas possa divenire conduttore occorre allora una causa ionizzante esterna e precisamente il gas a pressione atmosferica si ionizza:

a) Se viene **riscaldato**. L'aumento di temperatura produce un aumento dell'agitazione molecolare. Gli urti tra le molecole diventano violenti al punto da far uscire uno o più elettroni periferici dalla propria orbita. Se il gas contenuto, per esempio, in una ampolla di vetro, viene ora sottoposto ad una d.d.p., gli elettroni liberi sono soggetti a due forze: quella delle proprie molecole che sono diventate ioni positivi e tendono a farli rientrare nell'orbita, e quella di attrazione dell'anodo (positivo).

Se questa forza è maggiore della prima si ha un movimento di elettroni (ioni negativi) verso l'anodo e di ioni positivi (molecole che hanno perduto l'elettrone) verso il catodo (fig. 2.19).

Gli elettroni entrano nell'anodo e gli ioni positivi recuperano dal catodo gli elettroni perduti ridiventando molecole neutre. Si ha così una corrente elettrica attraverso il gas, dovuta allo scorrimento di elettroni in un senso e di ioni positivi in senso opposto, e una corrente di conduzione (elettronica) nel circuito esterno.

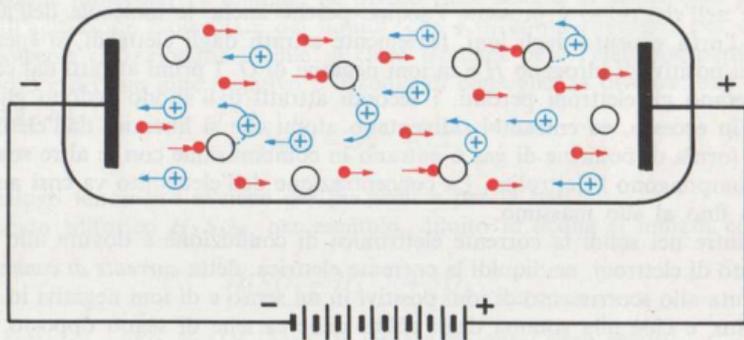


Fig. 2.19 - Corrente nei gas.

A seconda del valore della d.d.p. applicata agli elettrodi, gli ioni sono attratti più o meno fortemente dagli elettrodi stessi. Se nel loro percorso urtano violentemente altre molecole e altri atomi si ha formazione di altri ioni (ionizzazione per urto). Questi, attratti a loro volta, urtano altre molecole ancora, ionizzandole, per cui in uno spazio di tempo assai breve la formazione di ioni diventa

infinitamente grande (valanga ionica) con conseguente grande aumento della conducibilità del gas.

*b) Se viene sottoposto ad una grande d.d.p.* Se la d.d.p. applicata alla colonna di gas dell'ordine di 10.000 volt per centimetro, la ionizzazione del gas avviene anche a temperatura ambiente. Infatti a tale temperatura e allo stato naturale di pressione gli urti molecolari, anche se insufficienti a proiettare gli elettroni periferici fuori dalla loro orbita, riescono a deviare leggermente il loro percorso, allontanandoli momentaneamente dal nucleo (fig. 2.20). Se la forza di attrazione che l'anodo esercita sugli elettroni deviati supera quella diminuita dei nuclei, gli elettroni vengono strappati dalla loro orbita con conseguente ionizzazione del gas. Gli elettroni liberi (ioni negativi) vengono fortemente attratti dall'anodo e gli atomi privati di uno o più elettroni periferici (ioni positivi) vengono fortemente attratti dal catodo a causa della forte d.d.p. a cui sono sottoposti. Gli urti che gli ioni esercitano allora sulle molecole neutre risultano così violenti da determinare in brevissimo tempo la quasi totale ionizzazione del gas (valanga ionica), che acquista di conseguenza la massima conducibilità.

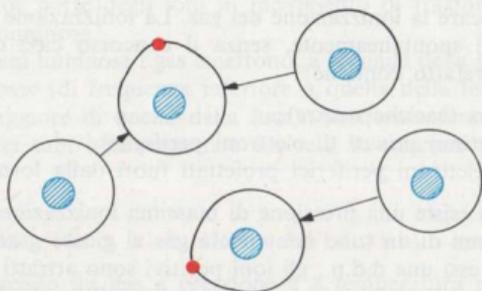


Fig. 2.20 - L'elettrone viene deviato sotto l'urto dall'orbita periferica.

*c) Se viene «bombardato» da particelle veloci.* I gas a pressione e a temperatura normale possono essere ionizzati se sottoposti al bombardamento da parte di particolari radiazioni, quali i raggi X, i raggi  $\beta$  e i raggi  $\alpha$ .

I raggi X sono della stessa natura della luce (onde elettromagnetiche), ma di frequenza molto più alta e sono capaci di provocare violenti urti sulle molecole di gas. I raggi  $\alpha$  sono particelle costituite da nuclei di elio (due protoni e due neutroni) fortemente proiettati. I raggi  $\beta$  non sono altro che elettroni emessi con velocità elevate.

Queste radiazioni o particelle veloci, immerse nel gas, provocano urti assai più violenti di quelli della naturale agitazione molecolare, con conseguente ionizzazione del gas. Applicando una d.d.p. ai due elettrodi, gli elettroni peri-

ferici proiettati fuori dalla loro orbita vanno all'anodo e gli ioni positivi vanno al catodo. Gli ioni del gas attratti dagli elettrodi concorrono, con i loro urti sulle molecole, ad aumentare la formazione ionica.

Tutto avviene come nel caso precedente per cui in breve spazio di tempo il gas diventa un ottimo conduttore.

## 2.8. LA CONDUZIONE ELETTRICA NEI GAS RAREFATTI (VUOTO MEDIO)

Un gas si dice rarefatto quando la sua pressione è compresa tra quella atmosferica ( $30 \cdot 10^{18}$  molecole al centimetro cubo) e quella di inizio del vuoto molecolare ( $4 \cdot 10^{13}$  molecole al centimetro cubo).

A parità di volume, il numero delle molecole del gas rarefatto è di molto inferiore a quello del gas a pressione atmosferica. Lo spazio libero che ogni molecola può percorrere prima dell'urto con altre, è aumentato al punto da permettere alla molecola di acquistare una velocità e quindi una energia cinetica sufficienti a provocare la ionizzazione del gas. La ionizzazione nel gas rarefatto si produce quindi spontaneamente, senza il concorso cioè di alcuna azione esterna. Il gas rarefatto contiene:

- a) molecole di gas (cariche neutre);
- b) ioni positivi (atomi privati di elettroni periferici);
- c) ioni negativi (elettroni periferici proiettati fuori dalla loro orbita).

Per ciascun gas esiste una pressione di massima ionizzazione. Mettendo due elettrodi agli estremi di un tubo contenente gas al giusto grado di rarefazione ed applicando ad essi una d.d.p., gli ioni positivi sono attratti dal catodo dove recuperano gli elettroni e gli ioni negativi passano sull'anodo dal quale entrano nel circuito esterno. Anche in questo caso la formazione di ioni aumenta grandemente in breve spazio di tempo a causa della valanga ionica, con conseguente rapido aumento della conducibilità.

## 2.9. L'EFFETTO LUMINOSO DELLA SCARICA ELETTRICA NEI GAS

Un gas ionizzato sottoposto ad una d.d.p. di opportuno valore (detta tensione di innesco) determina, per effetto della ionizzazione a valanga, il passaggio di una corrente di notevole intensità (scintilla o scarica elettrica) a cui si accompagnano fenomeni luminosi. Infatti nel processo di ionizzazione per urto si presentano due casi concomitanti:

- a) l'urto ionico è violentissimo, sufficiente quindi a proiettare elettroni periferici fuori dalla loro orbita (ionizzazione);

b) l'urto ionico è violento, ma non sufficiente alla ionizzazione: gli atomi non perdono elettroni ma vengono *eccitati*.

Gli elettroni cioè, sotto l'azione dell'urto, non abbandonano l'atomo, ma saltano su orbite più lontane (di maggiore energia) per ritornare in un tempo infinitamente piccolo nelle loro posizioni di equilibrio stabile, emettendo dei fotoni o quanti di luce e cioè restituendo l'energia acquistata sotto forma di radiazioni elettromagnetiche di una determinata frequenza (colore) a seconda del gas contenuto nel tubo.

Il neon, ad esempio, dà un colore rosso arancione, l'argon un azzurro chiaro, il vapore di mercurio un azzurro verdastro, l'azoto dà un colore giallo, ecc.

Quando il gas in cui avviene la scarica è a pressione atmosferica, la scintilla si manifesta con una sottile striscia luminosa che va da un elettrodo all'altro seguendo diversi percorsi leggermente tortuosi ed è accompagnata da un caratteristico scoppiettio.

Riducendo la pressione, la scarica diventa silenziosa e la striscia luminosa si allarga. Per ogni gas si può realizzare il giusto grado di rarefazione che permette alla maggior parte degli ioni in movimento di trasformare l'energia di urto in energia luminosa.

Con le radiazioni luminose i gas emettono, a seconda della loro natura, anche radiazioni infrarosse (di frequenza inferiore a quella della luce) e ultraviolette (di frequenza maggiore di quella della luce). Su questo fenomeno è basato il funzionamento dei tubi luminescenti e dei tubi fluorescenti.

## 2.10. LA CONDUZIONE ELETTRICA NELL'ARIA

L'aria, pur essendo un gas a pressione e a temperatura normali, presenta, anche se asciutta, una debole conducibilità dovuta a tracce di sostanze radioattive, a raggi ultravioletti e soprattutto a raggi cosmici, cioè a particelle fortemente elettrizzate provenienti dagli spazi interplanetari. Se poi è umida, la conducibilità aumenta grandemente per la presenza degli ioni in cui si scompongono le molecole del vapor d'acqua.

La ionizzazione non è però uniforme in tutta l'atmosfera terrestre. Infatti il grado di umidità e delle radiazioni varia da punto a punto anche relativamente vicini.

Soprattutto nelle nubi si ha una forte formazione di ioni, per cui tra un punto e l'altro dell'atmosfera, tra nube e nube, tra nubi e terra si manifestano delle differenze di potenziale che possono assumere valori anche di milioni di volt.

Quando questa differenza di potenziale arriva al valore della tensione d'inesco si ha un passaggio violento di cariche elettriche attraverso l'aria, avviene cioè la scarica luminescente (fulmine), accompagnata dal caratteristico tuono. Il fenomeno verrà meglio compreso quando verranno studiati i campi elettrici.

## 2.11. LA CONDUZIONE ELETTRICA NEI GAS ULTRARAREFATTI (VUOTO SPINTO)

Un gas si dice ultrararefatto quando la sua pressione è inferiore a  $4 \cdot 10^{13}$  molecole per centimetro cubo (inizio del vuoto molecolare).

Via via che la pressione diminuisce, le molecole contenute in ogni unità di volume, si fanno sempre più rade, per cui il percorso libero che ciascuna può compiere prima di scontrarsi con un'altra, diventa enorme e minori sono le probabilità di urto.

A partire da un certo grado di rarefazione si può quindi ritenere che le molecole non possano più urtarsi. Di conseguenza non c'è più possibilità di ionizzazione né spontanea né forzata, come se nel recipiente, che contiene gas ultrararefatto, vi fosse il vuoto assoluto e cioè l'assenza assoluta di molecole, anche se in realtà vi è ancora un'esigua quantità di gas, che determina il cosiddetto *vuoto spinto* o *vuoto molecolare*.

Pertanto, se agli elettrodi posti agli estremi di un'ampolla a vuoto spinto e cioè contenente un gas ultrararefatto, si applica una d.d.p. che non superi un determinato valore, non c'è passaggio di corrente.

Si conclude che in un gas ultrararefatto non è possibile ottenere la conduzione elettrica, almeno con i mezzi e con i modi visti finora e cioè per effetto della ionizzazione spontanea, oppure provocata, delle molecole e degli atomi.

È possibile però produrre nell'ampolla una certa quantità di elettroni liberi ossia di ioni negativi, i quali sottoposti ad una d.d.p., si dirigono dall'elettrodo negativo all'elettrodo positivo, determinando una corrente elettronica attraverso il vuoto spinto. La produzione di questi elettroni prende il nome di *emissione elettronica*.

## 2.12. L'EMMISSIONE ELETTRONICA

Si chiama emissione elettronica l'estrazione da un conduttore solido di elettroni liberi in esso contenuti. Questi, in condizioni normali, sono costretti a rimanere nel corpo, non sono cioè in grado di abbandonare la superficie del conduttore, per effetto della *barriera di potenziale* agente lungo la superficie del conduttore stesso, dovuta all'intenso campo elettrico delle cariche positive.

Per provocare allora un'emissione elettronica, è necessario conferire agli elettroni liberi un'energia sufficiente a superare la barriera di potenziale, occorre cioè spendere un *lavoro di estrazione*, che varia da sostanza a sostanza conduttrice, in relazione alla diversità della loro struttura atomica, e quindi delle forze con cui gli atomi legano gli elettroni periferici.

Più propriamente il lavoro di estrazione è l'energia necessaria ad estrarre un elettrone da una sostanza.

Se  $V$  è la d.d.p. che esiste alla superficie del metallo quale barriera di potenziale, ed  $e$  è la carica di un elettrone, il lavoro di estrazione  $W$  è dato da:

$$W = V \cdot e, \quad (2.3)$$

e si misura in volt-elettrone.

Usualmente la caratteristica delle diverse sostanze impiegate per l'emissione elettronica, viene data, anziché in volt-elettrone, semplicemente in volt, considerato che la carica dell'elettrone è una costante ( $1,6 \cdot 10^{-19}$  coulomb). Il lavoro di estrazione è sostituito allora dal *potenziale di estrazione*.

Dicendo però che il potenziale di estrazione di un corpo è per esempio di 3 V, non si deve intendere che occorrono 3 V per ottenere l'emissione elettronica, ma si deve intendere che l'energia occorrente per espellere un elettrone dal metallo considerato è di  $3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}$  joule (il joule è l'unità di misura dell'energia, che verrà spiegata in seguito). Logicamente anche il potenziale di estrazione è diverso da metallo a metallo.

Si è detto che gli elettroni liberi in un metallo possiedono una certa velocità, per effetto della temperatura ambiente. Infatti l'agitazione atomica e molecolare, e quindi la velocità degli elettroni liberi, dipendono dalla temperatura. Si suppone che alla temperatura dello zero assoluto ( $-273$  °C) non vi sia nel corpo alcuna agitazione. A temperatura ambiente essa è tale da produrre nei metalli la ionizzazione spontanea e cioè la formazione di elettroni liberi.

Questi però non possiedono ancora una velocità e quindi una energia cinetica sufficiente ad attraversare la barriera di potenziale del corpo per penetrare nello spazio circostante.

Per ottenere allora l'emissione elettronica, ossia la fuoriuscita di elettroni dal corpo, è necessario aumentare convenientemente la velocità degli elettroni, onde conferire ad essi un'energia cinetica che eguagli almeno il lavoro di estrazione:

$$(\text{energia cinetica}) \frac{1}{2} mv^2 = Ve \text{ (lavoro di estrazione)}, \quad (2.4)$$

dove  $m$  è la massa dell'elettrone,  $v$  la velocità a cui esso deve arrivare,  $V$  il potenziale di estrazione proprio del materiale usato ed  $e$  la carica dell'elettrone.

L'energia occorrente per aumentare la velocità degli elettroni e per ottenere quindi l'emissione elettronica, può essere data sotto diverse forme. Da qui i diversi sistemi di emissione elettronica, i più comuni dei quali sono, in ordine di importanza:

- a) l'emissione termoelettronica;
- b) l'emissione fotoelettronica;
- c) l'emissione secondaria;
- d) l'emissione di campo.

È importante osservare che l'emissione elettronica viene sfruttata nei gas ultrararefatti (tubi a vuoto spinto) e rarefatti (tubi a gas) e non nei gas a pres-

sione normale, in quanto, in quest'ultimo caso le molecole presenti in enorme numero, operano sulla superficie del corpo emittente un intenso continuo *bombardamento*, ostacolando l'emissione degli elettroni.

#### a) emissione termoelettronica

Un sistema energetico che conferisce agli elettroni vaganti di un metallo la velocità sufficiente a superare la barriera di potenziale è quello di portare il metallo all'incandescenza o comunque ad una opportuna temperatura. L'elevata temperatura, come si è detto, aumenta la velocità e quindi l'energia cinetica degli elettroni liberi, consentendo loro di abbandonare la superficie del conduttore e di proiettarsi nello spazio immediatamente circostante; opera cioè una *evaporazione* di elettroni dalla massa del solido e quindi un'emissione elettronica, detta *termoelettronica*.

Senza entrare in merito alle leggi quantitative che la governano, diremo solo che la densità di corrente di emissione e cioè la corrente emessa per ogni unità di superficie riscaldata del metallo, dipende:

- a) dalla temperatura raggiunta dalla superficie: più alta è la temperatura e maggiore è la densità d'emissione;
- b) dal potenziale di estrazione del metallo: più basso è il potenziale e più alta, a parità di temperatura, è l'emissione;
- c) da altre costanti proprie del metallo emittente.

Nel capitolo dei tubi elettronici verranno dati più importanti ragguagli tecnologici relativi alle sostanze normalmente impiegate per l'emissione termoelettronica.

Consideriamo ora un tubo di vetro a vuoto spinto nel quale si trovi un *filamento* metallico o catodo portato all'incandescenza (fig. 2.21).

Il catodo, per il fatto di emettere elettroni, assume una carica nettamente positiva, detta *immagine positiva*, la quale esercita una forza di attrazione sugli elettroni emessi. Molti di questi vengono allora immediatamente catturati dal filamento, mentre gli altri che sono riusciti ad allontanarsi rimangono sottoposti all'azione di due forze contrastanti: quella di attrazione del catodo e quella di repulsione da parte degli elettroni che li seguono e cioè emessi successivamente.

Quando le due forze si equilibrano, gli elettroni si raccolgono attorno al corpo emittente, formando una *nube elettronica* che impedisce l'emissione di altri elettroni. La nube elettronica possiede infatti una polarità negativa detta *carica spaziale negativa* che respinge gli elettroni che affiorano alla superficie riscaldata, obbligandoli a rimanere nel corpo.

Più propriamente, la carica spaziale negativa permette l'emissione di nuovi elettroni via via che il catodo cattura altri elettroni emessi. Pertanto non deve

essere immaginata come una nube di elettroni stazionari che circonda il catodo, ma come una nube di elettroni che cambiano continuamente.

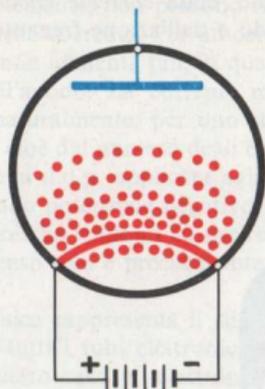


Fig. 2.21 - La carica spaziale negativa.

Lo spessore della nube elettronica è tanto maggiore quanto più alta è la temperatura del corpo emittente.

Se nel tubo si trova un altro elettrodo detto *placca* o *anodo*, che circonda il catodo e che simbolicamente viene rappresentato affacciato al filamento, è possibile applicare una d.d.p. (fig. 2.22). Collegando l'anodo al polo positivo di un generatore e il catodo al polo negativo, si ottiene una corrente elettronica attraverso il vuoto spinto, diretta dal catodo all'anodo. Infatti l'anodo posi-

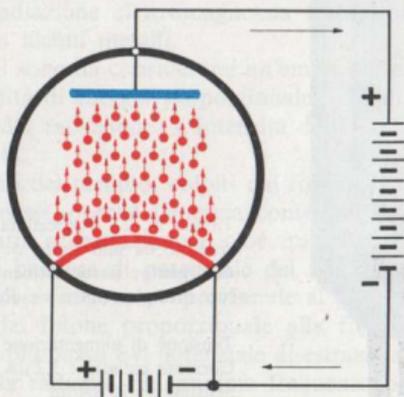


Fig. 2.22 - Conduttività per emissione termoelettronica.

tivo attira gli elettroni, i quali, attraverso il circuito esterno, ritornano al catodo che li ha emessi.

L'intensità di tale corrente, detta *corrente anodica*, dipende dal valore del potenziale positivo dell'anodo e dall'azione frenante della carica spaziale sugli elettroni.

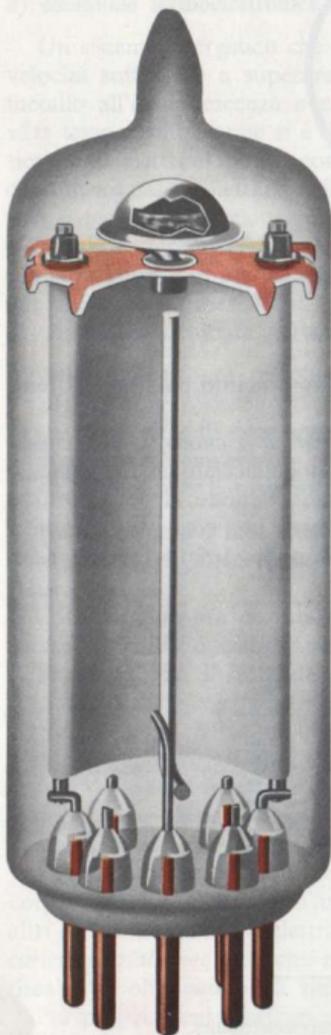


Tavola N. 2 - Fotocellula ad alto vuoto con catodo rivestito da uno strato di ossido di cesio su ossido di argento; particolarmente sensibile a sorgenti di luce incandescente e a radiazioni vicine all'infrarosso.

Tensione di alimentazione: 50 V.

Corrente catodica: 3,2  $\mu\text{A}$ .

Sensibilità: 20  $\mu\text{A}/\text{lm}$ .

(Documento Philips).

Per bassi potenziali anodici, la corrente è limitata dalla carica spaziale negativa, per potenziali via via crescenti la nube elettronica tende a dissolversi, perché gli elettroni, attratti fortemente, non possono ristagnare attorno al catodo, con conseguente aumento della corrente. Per un certo potenziale la nube scompare del tutto e la corrente non aumenta più, in quanto tutti gli elettroni emessi vengono subito attratti dall'anodo. La corrente massima è detta *corrente di saturazione*. Essa dipende naturalmente, per uno stesso corpo emittente, dalla temperatura del filamento e cioè dal numero degli elettroni che il catodo emette.

Invertendo la polarità della d.d.p. applicata agli elettrodi, la corrente si annulla. Infatti la placca, avendo potenziale negativo, concorre con la carica spaziale a respingere gli elettroni che tendono ad uscire dal catodo. La conduzione può avvenire allora in un senso solo e precisamente dal catodo all'anodo e non in senso opposto.

L'emissione termoelettronica rappresenta il sistema comunemente usato per produrre elettroni liberi in tutti i tubi elettronici a vuoto spinto. Viene usata anche nei tubi a gas. In questo caso gli elettroni prodotti assoggettano il gas ad un intenso bombardamento ionizzandolo. Di conseguenza la conduzione viene *amplificata* dalla presenza del gas e cioè dagli ioni positivi che vanno al catodo e dagli elettroni del gas che vanno all'anodo. La corrente anodica è data dagli effetti cumulativi dello scorrimento degli elettroni emessi e degli ioni del gas.

#### b) emissione fotoelettronica

Un altro sistema energetico che conferisce agli elettroni liberi di un metallo l'energia sufficiente a superare la barriera di potenziale superficiale, è quello di far cadere una radiazione elettromagnetica (radiazioni luminose e radiazioni ultraviolette) su alcuni metalli.

Infatti le radiazioni sono da considerarsi un'emissione di granuli, detti *fotoni*, contenenti una quantità di energia proporzionale, si badi bene, alla frequenza e non all'intensità della radiazione. L'intensità della radiazione è determinata dal numero dei fotoni.

Gli elettroni vaganti del metallo, colpiti dai fotoni, ricevono un'energia sufficiente per essere emessi, purché l'energia contenuta nei fotoni sia uguale o superi quella necessaria all'estrazione e cioè quella che l'elettrone perde nel passare attraverso la barriera di potenziale del metallo.

Essendo l'energia di estrazione proporzionale al potenziale di estrazione del metallo e l'energia del fotone proporzionale alla frequenza della radiazione agente, si deduce che più basso è il potenziale di estrazione e minore può essere la frequenza dell'onda radiante. La minima frequenza o frequenza limite per la quale si ha l'emissione fotoelettronica prende il nome di *soglia fotoelettrica* o di *frequenza*.

In pratica per l'emissione fotoelettronica si usano i metalli alcalini (potassio, rubidio, cesio, ecc.), in quanto per il loro basso potenziale di estrazione, può essere usata come radiazione la luce visibile, più facile da ottenere che non le altre radiazioni.

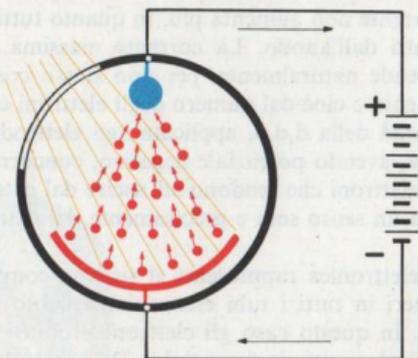


Fig. 2.23 - La conduzione per emissione fotoelettronica.

Se in un'ampolla a vuoto spinto si fa cadere sul catodo, costituito da una sostanza sensibile alle radiazioni, un fascio luminoso (fig. 2.23) si ha un'emissione di elettroni, detta *emissione fotoelettronica*. Applicando all'anodo il polo positivo di un generatore e al catodo il polo negativo, si ottiene una corrente elettronica diretta dal catodo all'anodo.

Tale dispositivo è chiamato comunemente *cellula fotoelettrica*. Anche in questo caso la conduzione è unidirezionale e la corrente è limitata dalla carica spaziale negativa.

### c) emissione secondaria

L'emissione elettronica, oltre che prodursi per effetto del calore e della luce, può avvenire in seguito al bombardamento di elettroni su una superficie metallica. Infatti gli elettroni emessi dal catodo o elettroni primari, se sono fortemente accelerati dal potenziale positivo anodico, urtano tanto violentemente la superficie dell'anodo da far espellere a quest'ultima un certo numero di elettroni, detti *elettroni secondari*.

Il fenomeno, che è conosciuto come *emissione secondaria*, non ha utilità pratica, se non in particolari casi che esulano dal nostro studio, in quanto gli elettroni secondari emessi dall'anodo, e quindi dall'elettrodo a potenziale positivo, non concorrono al flusso principale di elettroni che attraversano il tubo dal catodo all'anodo.

L'emissione di elettroni si può ottenere anche mediante il bombardamento di ioni positivi, come nei tubi a gas, dove gli elettroni primari accelerati verso

l'anodo urtano e perciò ionizzano le molecole del gas. Gli ioni positivi vengono accelerati verso il catodo, sul quale esercitano, anche per il loro peso molto più grande di quello degli elettroni, un intenso bombardamento, con conseguente emissione di nuovi elettroni, che, in questo caso, concorrono alla formazione della corrente anodica.

#### d) emissione di campo

Quando la d.d.p. applicata tra anodo e catodo di un tubo elettronico agente tra i due elettrodi è molto intenso, alcuni elettroni vengono estratti dal catodo, senza che questo venga riscaldato o irradiato o bombardato.

Questa particolare forma di emissione, detta *emissione di campo*, non viene usata come sorgente principale di elettroni, ma solo per innescare il flusso di elettroni in alcuni tipi di tubi a gas, dove la corrente anodica viene mantenuta poi sia per emissione secondaria, che per emissione termoelettrica.

## Capitolo Terzo

### La resistenza elettrica dei conduttori solidi liquidi e gassosi

#### 3.1. LA RESISTENZA ELETTRICA DEI CONDUTTORI SOLIDI

Tutti i conduttori, per il fatto di non essere perfetti, contrastano, sia pure in grado diverso, il fluire degli elettroni che li attraversano. Si dice che essi possiedono una *resistenza elettrica*  $R$ . La causa principale della resistenza nei solidi è da ricercarsi nella successione di urti contro il reticolo atomico da parte degli elettroni liberi che, accelerati dalla d.d.p. applicata al conduttore, vengono per tali urti continuamente decelerati, con conseguente perdita di energia.

La resistenza elettrica è l'*attrito* che incontra la corrente nel conduttore.

L'unità di misura della resistenza elettrica è l'*ohm* ( $\Omega$ ), che corrisponde alla resistenza di una colonna di mercurio alta 106 cm circa e della sezione costante di 1 mm<sup>2</sup>.

La resistenza elettrica  $R$  dipende:

- dalla lunghezza  $l$  del conduttore e precisamente aumenta proporzionalmente a questa;
- dalla sezione  $s$  del conduttore, ed è a questa inversamente proporzionale;
- dal materiale di cui è composto il conduttore e più precisamente dalla *resistività*  $\rho$  (pron. ro) o *resistenza specifica*, definita come la resistenza di un filo lungo un metro e della sezione di un mm<sup>2</sup>.

La resistività varia da materiale a materiale perché è legata al numero degli elettroni liberi, alla struttura atomica e molecolare e agli urti elettronici.

La tabella 1 dà i valori della resistenza specifica di un certo numero di materiali di uso comune.

La resistenza  $R$  del conduttore è allora data dalla formula:

$$R = \rho \frac{l}{s} \quad \text{da cui} \quad l = R \frac{s}{\rho} \quad s = \rho \frac{l}{R} \quad \rho = R \frac{s}{l} \quad (3.1)$$

dove  $l$  deve essere espresso in *metri*,  $s$  in mm<sup>2</sup> e  $\rho$  in  $\frac{\Omega \text{mm}^2}{\text{m}}$  o in  $\mu\Omega \text{m}$  per ottenere la resistenza espressa in ohm.

La formula (3.1) vale per il calcolo della resistenza alla temperatura di zero gradi e percorsa da corrente continua (in pratica anche da correnti variabili della frequenza di poche decine di Hz).

Infatti la resistenza elettrica, o meglio la resistività, dipende anche dalla temperatura. Con l'aumento della temperatura, nei metalli aumenta l'ampiezza delle vibrazioni del reticolo atomico (diminuisce nel carbone e in speciali leghe) e quindi aumentano (o diminuiscono) gli urti elettronici, con conseguente aumento (o diminuzione) della resistività.

Indicando con  $\rho_t$  e con  $\rho_0$  rispettivamente la resistività a  $t^\circ$  e a zero gradi, la variazione è, entro certi limiti, proporzionale all'incremento di temperatura e cioè:

$$\rho_t = \rho_0 (1 \pm \alpha t^\circ), \quad (3.2)$$

dove  $\alpha$  è la *coefficiente di temperatura* del conduttore.

Se con l'aumentare della temperatura si ha un incremento della resistività, si usa il binomio  $(1 + \alpha t^\circ)$ , se invece si ha un decremento della resistività, si usa il binomio  $(1 - \alpha t^\circ)$ .

La resistenza a  $t^\circ$  si calcola allora con l'espressione:

$$R_t = R_0 (1 \pm \alpha t^\circ). \quad (3.3)$$

Si ha pertanto che la relazione tra le resistenze  $R_{T_2}$  e  $R_{T_1}$  di un conduttore a due diverse temperature  $T_1$  e  $T_2$  è data da:

$$R_{T_2} = R_{T_1} [1 \pm \alpha(T_2 - T_1)]. \quad (3.4)$$

I valori dei coefficienti di temperatura sono riportati nella tabella 1.

Spesse volte nei calcoli dei circuiti elettrici è agevole usare la *conduttanza*  $G$ , che esprime il concetto opposto di resistenza. In corrente continua la conduttanza  $G$  è l'inverso della resistenza  $R$  e cioè:

$$G = \frac{1}{R} = \frac{s}{\rho l}. \quad (3.5)$$

La conduttanza viene misurata in *siemens* ( $S$ ).

L'inverso della resistività  $\rho$  è la *conduttività*  $\gamma$  (pron. gamma):

$$\gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{R \cdot s}. \quad (3.6)$$

La conduttività si misura in  $m/\Omega \text{ mm}^2$  oppure in  $\frac{1}{\mu\Omega m}$ .

TABELLA 1 Resistività dei metalli di uso comune, calcolate a 15 °C e corrispondenti valori del coefficiente di temperatura.

Materiale	$\rho$ in $\mu\Omega m$	$\alpha$
Argento dolce	0,0158	0,0036
Rame elettrolitico	0,0175	0,00426
Oro	0,022	0,0035
Alluminio	0,0287	0,0041
Tungsteno	0,051	0,0045
Zinco	0,064	0,0038
Nichel	0,127	0,0052
Ferro	0,13	0,0048
Piombo	0,2	0,0037
Ferro al silicio	0,36	0,0046
Argentana	0,37	0,00007
Nichelina	0,4	0,00002
Manganina	0,42	0,000008
Costantana	0,49	0
Mercurio	0,95	0,009
Nichelcromo	1	0,0001
Carbone e grafite	20-100	-0,0005

La resistenza di un conduttore dipende infine anche dalla frequenza della corrente che lo percorre.

Infatti un conduttore, fermo restando i valori delle sue dimensioni e della temperatura, misura una resistenza considerevolmente più alta quando è percorso da correnti ad alta frequenza, di quella che misura quando è percorso da corrente continua.

Il fenomeno è dovuto all'effetto pellicolare, che consiste in una disuniforme distribuzione della corrente nella sezione del conduttore: mentre la corrente continua è quasi uniformemente distribuita, la corrente ad alte frequenze tende a concentrarsi vicino alla superficie del conduttore, per gli effetti che verranno studiati in seguito.

Le parti centrali del conduttore non concorrono pienamente al passaggio della corrente. È come cioè se la sezione del conduttore si fosse ridotta, con conseguente aumento della resistenza.

Il valore della resistenza in funzione della frequenza può essere calcolato con opportune espressioni, ma in pratica viene ricavato dalla potenza dissipata nella resistenza stessa.

### Esempio numerico.

Un conduttore di rame, lungo 1 km, ha il diametro di 2 mm.

Quale è la sua resistenza alla temperatura ambiente di 15 °C e alla temperatura di 80 °C?

### Soluzione

Calcolo della sezione del conduttore:

$$s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ mm}^2.$$

Dalla tabella n. 1 si ricava la resistività del rame:  $\rho_r = 0,0175$ .

La resistenza  $R_t$  del conduttore a 15° è data da:

$$R_t = \rho_r \frac{l}{s} = 0,0175 \frac{1000}{3,14} = 5,57 \Omega.$$

Dalla stessa tabella si ricava il coefficiente di temperatura del rame:  $\alpha = 0,00426$ .

La resistenza  $R_T$  del conduttore a 80 °C è data da:

$$R_T = R_t [1 + \alpha(T^\circ - t^\circ)] = 5,57 [1 + 0,00426(80-15)] = 7,11 \Omega.$$

## 3.2. LA RESISTENZA ELETTRICA DEI SEMICONDUCTORI

Si è detto che i semiconduttori hanno caratteristiche intermedie tra quelle dei metalli e quelle degli isolanti. Però, mentre i metalli hanno un comportamento ben definito in rapporto alla loro resistività anche in funzione della tem-

TABELLA 2 Resistività di alcuni semiconduttori.

Materiale	$\rho$ in $\mu\Omega m$
Germanio	70 $\div 25 \cdot 10^5$
Silicio	700 $\div 20 \cdot 10^8$
Selenio	40 $\cdot 10^4 \div 50 \cdot 10^6$
Solfato di piombo	100 $\div 50 \cdot 10^6$
Ossidulo di rame	40 $\cdot 10^4 \div 30 \cdot 10^{10}$
Ossido di titanio	750 $\div 10^{12}$

peratura, gli isolanti e i semiconduttori hanno un comportamento molto variabile, che dipende dalla loro purezza, dal metodo di preparazione, dalla temperatura, ecc.

Dalla tabella 1 si nota infatti che la resistività dei metalli copre una piccola gamma di valori e che la sua variazione è contenuta entro limiti ristretti. La resistività dei semiconduttori invece, oltre che occupare una vasta gamma di valori, varia entro limiti molto estesi, come si può osservare dalla tabella 2.

Pertanto il calcolo della resistenza diventa praticamente impossibile se prima non si misura la resistenza specifica del semiconduttore ad una temperatura ben definita, perché, tra l'altro, la variazione della resistività di un semiconduttore, in funzione della temperatura, segue una legge assai complessa.

In un semiconduttore, per esempio di tipo  $n$ , si ha che per temperature molto basse, sotto il valore ambiente, la resistività diminuisce con l'aumentare della temperatura perché aumenta il numero degli elettroni ceduti dai datori alla zona di conduzione. Ad un certo punto, saturandosi la disponibilità di questi elettroni, la resistività aumenta con l'aumentare della temperatura, come per i metalli. Infine, per un ulteriore aumento di temperatura, si ha una eccitazione diretta degli elettroni della banda di valenza, i quali passano alla banda di conduzione, con conseguente rapida diminuzione della resistività. Quest'ultima temperatura deve perciò essere evitata per non avere conseguenze dannose e cioè la *distruzione* delle caratteristiche del semiconduttore. Per il germanio, per esempio, la temperatura limite che provoca il rapido aumento della conduttività è intorno a 100 °C soltanto.

La resistenza di un semiconduttore dipende, come per i metalli, dalla lunghezza, dalla sezione e dalla resistività. Ma mentre le prime due grandezze sono esattamente definibili, la resistività dei semiconduttori è di difficile valutazione, per cui, in pratica, la resistenza dei semiconduttori viene direttamente misurata, oppure viene calcolata indirettamente in funzione della d.d.p. agente e della corrente esistente nel semiconduttore stesso.

### 3.3. LA RESISTENZA ELETTRICA DEI CONDUTTORI LIQUIDI

La resistenza di un elettrolito dipende da numerose condizioni. Prescindendo dai fenomeni secondari di polarizzazione che accompagnano il passaggio della corrente nel liquido (v. cap. dell'elettrochimica), supponendo cioè che gli elettrodi non vengano intaccati, alterati e ricoperti dagli ioni che vi si depositano, la resistenza dell'elettrolito dipende:

- a) dalla distanza degli elettrodi, che corrisponde alla lunghezza della colonna di elettrolito;
- b) dalla superficie utile degli elettrodi, che corrisponde alla sezione della colonna di elettrolito;
- c) dalla composizione chimica dell'elettrolito, che determina la resistenza specifica o resistività (v. tabella 3);
- d) dalla temperatura: l'aumento di temperatura comporta un aumento dell'agitazione molecolare e quindi una maggiore ionizzazione, con conseguente migliore conducibilità e diminuzione di resistenza: ciò significa che l'elettrolito ha un coefficiente di temperatura negativo;

e) dalla concentrazione dell'elettrolito: vi è un grado di concentrazione per ogni tipo di elettrolito a cui corrisponde la minore resistività. È importante osservare che la concentrazione viene modificata dal passaggio della corrente, per cui la resistenza dell'elettrolito varia conseguentemente.

Risulta difficile calcolare la resistenza di un elettrolito, anche e soprattutto per la presenza dei fenomeni secondari di polarizzazione, per cui essa viene normalmente misurata con opportuni accorgimenti pratici, che non è qui il caso di analizzare.

TABELLA 3 Resistività e coefficiente di temperatura di alcune soluzioni acquose alla temperatura di 18 °C.

Soluzioni	Concentrazione in parti % in peso	$\rho$ in $\mu\Omega m$	$\alpha$
Solfato di rame CuSO <sub>4</sub>	5	$53 \cdot 10^3$	-0,0215
	10	$31 \cdot 10^3$	-0,0218
	15	$24 \cdot 10^3$	-0,0230
Cloruro di Sodio NaCl	5	$15 \cdot 10^4$	-0,0217
	15	$61 \cdot 10^4$	-0,0212
	25	$47 \cdot 10^4$	-0,0227
Acido Solforico H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>	5	$48 \cdot 10^3$	-0,0121
	20	$45 \cdot 10^3$	-0,0145
	40	$40 \cdot 10^3$	-0,0178
Idrato Sodico NaOH	5	$51 \cdot 10^3$	-0,0201
	20	$30 \cdot 10^3$	-0,0299
	40	$86 \cdot 10^3$	-0,0648

### 3.4. LA RESISTENZA ELETTRICA NEI GAS NORMALI E RAREFATTI

Si è detto che qualunque sia la causa prima della ionizzazione e qualunque sia la pressione, la ionizzazione dei gas sottoposti ad una d.d.p. è determinata anche dagli urti (ionizzazione per urto) che gli ioni, attratti ed accelerati dal potenziale degli elettrodi, provocano sulle molecole e sugli atomi ancora neutri che incontrano lungo il loro percorso. Il conseguente rapido aumento della formazione ionica (processo valanga) porta il gas ad una ionizzazione praticamente completa e la sua conducibilità ad essere quasi perfetta.

La resistenza elettrica di una colonna di gas ionizzato, sottoposta ad una opportuna d.d.p., detta *tensione di innesco*, ha di conseguenza valore praticamente nullo.

Al disotto della tensione di innesco il gas presenta invece una resistenza, che ha andamento non lineare. Infatti per una d.d.p. crescente da zero fino ad un certo valore, la resistenza diminuisce; rimane poi costante fino alla tensione di innesco, per poi precipitare immediatamente per tensioni superiori a quella di innesco, per effetto, come s'è detto, della ionizzazione a valanga.

In pratica non è possibile applicare una d.d.p. ad un apparecchio di resistenza nulla, perché la corrente tenderebbe ad aumentare enormemente, provocando effetti incontrollati e dannosi. Per questo si deve mettere nel circuito delle lampade a gas una resistenza metallica o di altro genere (detta resistenza zavorra) di valore opportuno, per contenere la corrente entro i valori desiderati.

### 3.5. LA RESISTENZA ELETTRICA NEI GAS ULTRARAREFATTI

Nei tubi elettronici, dove la conduzione avviene per emissione elettronica, la resistenza elettrica intesa nel senso di attrito che gli elettroni incontrano per passare nel mezzo, non esiste, in quanto praticamente non esiste il mezzo conduttore. Infatti gli elettroni passano dal catodo all'anodo attraverso il vuoto molecolare.

Nel capitolo che studia i tubi elettronici a vuoto spinto, verrà detto che questi presentano invece una resistenza, la quale però è una semplice misura dell'energia richiesta per accelerare gli elettroni attraverso lo spazio tra catodo ed anodo, energia che viene restituita all'anodo sottoforma di calore. Infatti lo scorrimento degli elettroni attraverso il tubo è ostacolato sia dalla carica spaziale negativa che si forma attorno al catodo, sia dalle forze di attrazione che il catodo esercita sugli elettroni emessi e diretti verso l'anodo.

Il fenomeno verrà comunque messo in evidenza con sufficiente chiarezza quando verranno studiate le caratteristiche dei tubi elettronici. Per ora basta insistere sul fatto che il vuoto spinto o molecolare e cioè il gas ultrararefatto non presenta al passaggio della corrente elettrica alcuna resistenza reale.

### 3.6. CONDUTTORI SOLIDI DI USO COMUNE

I motivi teorici che hanno indotto a classificare i corpi solidi in conduttori, in semiconduttori ed in isolanti, sono sostituiti nella pratica dalla valutazione della resistenza specifica o resistività  $\rho$ , che caratterizza i corpi stessi, ponendoli o tra i conduttori o tra gli isolanti o tra i semiconduttori.

Infatti sono conduttori i corpi che hanno una resistività molto bassa rispetto a quella dei semiconduttori e a quella degli isolanti.

I buoni conduttori solidi, in particolare quasi tutti i metalli, sono caratterizzati da una resistività compresa tra  $15 \cdot 10^{-3}$  e  $20 \cdot 10^{-2} \mu\Omega m$  circa (tabella 1), mentre la resistività dei semiconduttori copre la vasta gamma tra  $70$  e  $10^{12} \mu\Omega m$  circa (tabella 2) e quella degli isolanti tra  $10^{13}$  e  $10^{22} \mu\Omega m$  circa.

Oltre ai buoni conduttori, hanno grande importanza pratica altri conduttori di resistività più elevata, compresa tra  $35 \cdot 10^{-2}$  e  $10^2 \mu\Omega m$  circa (tabella 1), in particolare alcune leghe che hanno inoltre speciali caratteristiche termiche, che conferiscono alla lega un coefficiente di dilatazione  $\alpha$  molto basso e cioè molto prossimo allo zero, con il vantaggio di mantenere la resistenza elettrica pressoché costante con il variare della temperatura.

Le leghe metalliche resistenti servono per la costruzione di resistori, che trovano vasto impiego nel campo dell'elettrotecnica e della radiotecnica.

Le principali proprietà che si richiedono per i conduttori solidi sono:

- a) elevata conducibilità elettrica e quindi bassa resistività;
- b) duttilità, ossia attitudine a lasciarsi ridurre in fili;
- c) malleabilità, ossia attitudine a lasciarsi ridurre in lamine sottili;
- d) resistenza meccanica, ossia capacità di sopportare le sollecitazioni che tendono a romperlo o a deformarlo.

Il conduttore che risponde più di ogni altro ai requisiti suesposti è indubbiamente il rame, in considerazione anche dal minor costo rispetto ad altri materiali aventi pressapoco le stesse proprietà.

**Rame.** È un metallo di colore rosso bruno, a grana finissima, malleabile e tanto duttile da ridursi in fili del diametro di 0,03 mm. È facilmente saldabile. Fonde a  $1.084^\circ C$ . È indubbiamente il conduttore metallico più usato nella tecnica radioelettrica per la sua alta conducibilità sia elettrica che termica.

Viene impiegato per il collegamento tra apparecchiature elettriche, per la costruzione delle linee di trasporto dell'energia elettrica, per gli avvolgimenti di macchine elettriche e in tutti i casi in cui deve essere minima la dissipazione dell'energia elettrica in calore e quindi in tutti i casi in cui deve essere minima la resistenza elettrica del conduttore.

Il rame si trova allo stato nativo, ma più generalmente si ricava dai suoi minerali, tra i quali il più importante è la calcopirite (solfuro di rame e ferro). L'estrazione del rame dal minerale viene fatta per via termica mediante fusione in speciali forni. Il materiale grezzo ottenuto deve essere raffinato, prima con procedimenti termici e poi per via elettrolitica.

Viene quindi ridotto in fili attraverso una duplice lavorazione: la prima consiste in una sbazzatura a caldo per ottenere barre e verghe, la seconda nella trafilatura a freddo per ottenere i fili di vari diametri.

Durante la lavorazione a freddo il rame rincrudisce, acquista cioè durezza e fragilità ed aumenta la resistività, per cui si rende necessaria la ricottura per migliorare le proprietà meccaniche ed elettriche del metallo. La ricottura consiste nel riscaldare il rame in forni elettrici alla temperatura di  $200-500^\circ C$  a seconda delle caratteristiche che si vogliono ottenere.

I fili di rame possono essere isolati oppure no. L'isolamento viene ottenuto rivestendo il filo con uno strato o di smalto o di cotone o di seta o di gomma.

Gli smalti comunemente usati sono a base di cellulosa con solventi volatizzabili ad alta temperatura se si vuole mantenere flessibile per un lungo tempo lo strato isolante, a base di siliconi se il filo deve sopportare temperature piuttosto elevate, a base di acetato di polivinile per ottenere un isolamento meccanicamente resistente ed aderente.

I conduttori isolati in seta o in cotone non devono superare la temperatura di 85-90 °C, mentre quelli ricoperti in gomma non devono superare i 50 °C. Inoltre i fili isolati in gomma sono stagnati per evitare che il rame venga intaccato dallo zolfo contenuto nella gomma. La stagnatura del conduttore facilita inoltre la saldatura.

**Alluminio.** È un metallo di colore bianco azzurro a struttura piuttosto grosolana, ma è ugualmente malleabile e molto duttile. Fonde alla temperatura di 658 °C. È molto usato nell'industria radioelettrica e potrebbe benissimo sostituire il rame per la sua conduttività, per la leggerezza e per il costo, se non avesse una debole resistenza meccanica alle sollecitazioni, soprattutto alla trazione. Trova largo impiego nella costruzione delle armature dei condensatori, degli avvolgimenti a gabbia dei motori asincroni e talvolta degli avvolgimenti induttori delle dinamo e degli alternatori. Viene inoltre usato largamente nella composizione delle leghe metalliche.

In natura è abbondantissimo, ma non esiste allo stato puro. Si estrae dai minerali: bauxite, criolite e leucite, mediante procedimenti termici ed elettrolitici piuttosto complessi.

Esposto all'aria, per la sua affinità con l'ossigeno, si ricopre di uno strato di ossido durissimo, compatto e isolante, che lo protegge da ulteriore ossidazione. Ad elevate temperature l'ossidazione si fa più profonda, più compatta e più resistente, così da costituire un isolante ideale dei condensatori elettrolitici.

**Tungsteno o Wolframio.** È un metallo pesante di colore grigio scuro, più tenace dell'acciaio. È duttilissimo e, se puro, abbastanza malleabile. Fonde alla più elevata temperatura e cioè di 3.380 °C e, a parità di temperatura, è il metallo che ha il più alto potere emissivo (v. par. 2.12.). Viene perciò usato per la costruzione dei filamenti delle lampade ad incandescenza e dei tubi elettronici.

In lega al 10 % con l'acciaio dolce serve anche per la costruzione delle calamite permanenti ad alta forza coercitiva.

Per le sue doti di buona conducibilità termica, di resistenza meccanica e di non ossidabilità, trova impiego anche nei contatti elettrici e per gli avvolgimenti di apparecchiature termoelettriche.

Si ricava dai suoi minerali industriali, il più importante dei quali è la wolframite, che contiene sino all'80 % di ossido di tungsteno. L'estrazione viene effettuata mediante procedimenti chimici e termici.

**Zinco.** È un metallo di color grigio opaco, di struttura cristallina-fibrosa. Diventa malleabile alla temperatura di 150 °C. Fonde a 420 °C. È uno dei principali componenti di molte leghe metalliche. Viene usato come polo negativo di quasi tutte le pile elettriche.

Si estrae dai suoi minerali industriali che sono la blenda, la calamina e la smithsonite, mediante procedimenti termici per ottenere il metallo grezzo e procedimenti elettrolitici per avere il metallo raffinato.

**Argentana.** È una lega di rame, zinco e nichel a percentuali variabili, di colore molto simile a quello dell'argento. Fonde a 1.000 °C. Per la sua alta resistività ( $0,37 \mu\Omega m$ ) viene usato per la costruzione di resistori e di apparecchi di riscaldamento. Ha un coefficiente di temperatura molto basso ( $\alpha = 0,00007$ ), per cui mantiene quasi costante il valore della sua resistenza con il variare della temperatura entro determinati limiti.

**Nichelina.** È una lega di rame (60 %), di zinco (19 %), di nichel (20,5 %), di ferro (0,25 %) e di magnesio (0,25 %). Trova gli stessi impieghi dell'argentana. Ha però una resistività leggermente più alta ( $0,4 \mu\Omega m$ ) e un coefficiente di temperatura più basso ( $\alpha = 0,00002$ ).

**Manganina.** È una lega costituita dall'84 % di rame, del 4 % di nichel e del 12 % di manganese.

Per il trascurabile valore del suo coefficiente di temperatura ( $\alpha = 0,000008$ ), viene usata oltre che per i normali reostati e apparecchi di riscaldamento, anche per le resistenze campione, e cioè per le resistenze di precisione che devono mantenere costante il loro valore anche quando la temperatura varia entro i normali limiti di impiego della resistenza stessa.

**Costantana.** È una lega di rame (60 %) e di nichel (40 %). Trova gli stessi impieghi della manganina. Ha però una resistività più alta ( $\rho = 0,49 \mu\Omega m$ ) e un coefficiente di dilatazione termica praticamente uguale a zero, per cui a maggior ragione viene usata principalmente per le resistenze di precisione e per le resistenze campione.

**Nichel-cromo.** È una lega di cromo (35-40 %) e di nichel (65-60 %). È largamente impiegata nei resistori elettrici e negli apparecchi di riscaldamento, per temperature fino a 1.000 °C, perché ha elevata resistenza alla corrosione anche ad alte temperature.

**Carbonio.** Si può avere sotto due forme: carbone di storta e grafite. Il carbone di storta è il residuo carbonioso che si deposita sulle pareti delle storte usate per la distillazione del gas illuminante. È molto duro ed ha lucentezza metallica.

La grafite si trova in natura mescolata a tracce di silicio e di ossido di ferro. È tenera, untuosa, facilmente sfaldabile, di colore plumbeo.

La grafite si ottiene anche artificialmente, come sottoprodotto nella fabbricazione in forni elettrici del carborundum. È dura e di color nero lucente.

Sia il carbone di storta che la grafite vengono macinati, impastati con opportuni agglutinanti e compressi in cilindri o in pezzi di varia forma e dimensioni per la fabbricazione di elettrodi per forni elettrici e per lampade ad arco, di spazzole per macchine elettriche e di carboncini per pile elettriche.

Questi agglomerati di carbone hanno il coefficiente di temperatura negativo ( $-0,0005$ ) e una elevata resistività ( $\rho = 20-100 \mu\Omega m$ ). Pertanto vengono adoperati per la costruzione di resistori di elevato valore.

### 3.7. ESERCIZI DA RISOLVERE

1. Un conduttore di rame del diametro di 2 mm ha la resistenza di 50 ohm a temperatura ambiente ( $15^\circ C$ ). Calcolare la lunghezza del conduttore e la sua resistenza alla temperatura di  $100^\circ C$ .  
(R.  $l \cong 8.971$  m;  $R_{100} = 68,1$  ohm)
2. Un conduttore di alluminio della sezione di  $2 \text{ mm}^2$  misura, a temperatura ambiente ( $15^\circ C$ ), la lunghezza di 488 m e la resistenza di 7 ohm. Calcolare la sua resistività.  
(R.  $\rho = 0,0287$ )
3. Un conduttore di ferro ha la resistenza di 100 ohm alla temperatura ambiente ( $15^\circ C$ ) e la resistenza di 141 ohm alla temperatura di  $100^\circ C$ . Calcolare il suo coefficiente di temperatura.  
(R.  $\alpha = 0,00482$ )
4. Un conduttore di rame ha la resistenza di 50 ohm a temperatura ambiente ( $15^\circ C$ ). A quale temperatura deve essere innalzato perché la sua resistenza aumenti di 6 ohm?  
(R.  $t^\circ \cong 43^\circ C$ )

## Capitolo Quarto

### Elettrodinamica

Le considerazioni sulla costituzione della materia, sulla teoria dell'elettricità e sulla conduzione elettrica, esposte nei precedenti capitoli, rispondono provvisoriamente al quesito di cosa sia l'elettricità, attraverso delle teorie che la scienza pura ha costruito e che sono suscettibili di continua evoluzione. Hanno voluto semplicemente creare uno schema mentale delle grandezze elettriche sperimentalmente accertate e misurate, quali la d.d.p., la corrente e la resistenza elettrica.

Lo scopo dell'elettrotecnica non è quello di scoprire la realtà della natura elettrica, ma solo di studiare le manifestazioni esterne e cioè i fenomeni e le applicazioni dell'elettricità e non la loro teoria, per altro necessaria alla interpretazione dei fenomeni elettrici.

Lo studio della elettrotecnica può essere suddiviso in diversi argomenti che abbracciano fenomeni ed applicazioni di reciproca dipendenza. Una suddivisione comoda è la seguente:

- a) **Elettrodinamica** o dinamica delle correnti permanenti nei solidi, che si occupa dei circuiti elettrici percorsi da corrente continua ossia dei fenomeni e delle leggi dell'elettricità in movimento.
- b) **Elettrostatica**, che studia le cariche elettriche in equilibrio sui corpi.
- c) **Elettrochimica** o dinamica delle correnti permanenti nei liquidi, che si occupa dei fenomeni chimici prodotti dalla corrente elettrica.
- d) **Elettromagnetismo**, che si occupa degli effetti magnetici della corrente elettrica.
- e) **Corrente alternata**, che si riferisce ai particolari effetti e fenomeni che la corrente alternata produce nei circuiti elettrici.

#### 4.1. LA LEGGE DI OHM PER UNA RESISTENZA

Consideriamo un dispositivo conduttore avente resistenza elettrica  $R$  (il cui simbolo è rappresentato in fig. 4.1-a) agli estremi AB del quale esista una differenza di potenziale  $V$ . Per quanto asserito al paragrafo 1.9., in esso fluirà una

corrente elettronica dall'estremo negativo A all'estremo positivo B, di intensità  $I$ .

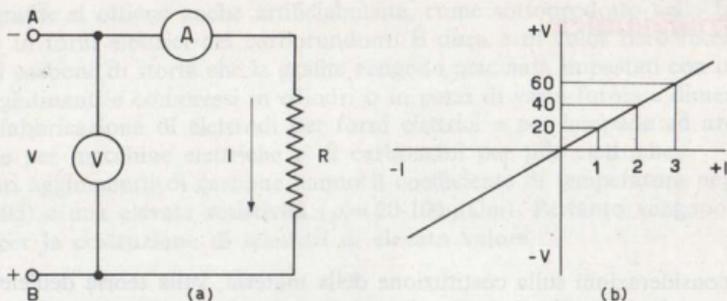


Fig. 4.1 - Schematizzazione di un dispositivo conduttore percorso da corrente (a) e rappresentazione grafica della legge di Ohm (b).

Se ora variamo il valore della d.d.p., varierà l'intensità della corrente  $I$  che fluisce nel conduttore e possiamo osservare, con l'uso di strumenti di misura e precisamente mediante il voltmetro  $V$  che misura la d.d.p. e mediante l'ammetero  $A$  che misura l'intensità  $I$  di corrente, che aumentando o diminuendo la differenza di potenziale  $V$  aumenta o diminuisce proporzionalmente l'intensità  $I$  della corrente, purché il valore  $R$  della resistenza rimanga costante.

Si ha cioè:

$$\frac{V}{I} = \frac{V'}{I'} = \frac{V''}{I''} \dots = R,$$

dove  $R$  è dunque il coefficiente di proporzionalità fra la differenza di potenziale continua  $V$  applicata al conduttore e la intensità  $I$  della corrente continua che vi scorre.

Possiamo perciò scrivere:

$$\begin{aligned} V &= RI, \\ \text{volt} &= \text{ohm} \cdot \text{ampere}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

che esprime una legge fondamentale della corrente, particolare per semplici resistenze, detta *legge di Ohm*. Tale legge, che è del tipo proporzionale e rappresentabile quindi da una retta passante per l'origine di un diagramma tensione-corrente (fig. 4.1-b), può essere così enunciata: *la differenza di potenziale  $V$  esistente tra due punti qualsiasi  $A$  e  $B$  di un conduttore è sempre uguale al prodotto della resistenza  $R$  compresa tra i punti  $A$  e  $B$  e l'intensità  $I$  della corrente che vi scorre.*

Ricordando che la conduttanza  $G$  è l'inverso della resistenza  $R$ , la legge di Ohm può anche scriversi:

$$I = V \cdot G. \quad (4.2)$$

Le formule su riportate costituiscono la più semplice espressione della legge di Ohm.

Vedremo che nei circuiti comprendenti anche i generatori di d.d.p., la legge di Ohm assume espressioni più complesse.

## 4.2. IL CIRCUITO ELETTRICO ELEMENTARE

Si dice circuito elettrico elementare l'insieme di un generatore, di un utilizzatore e dei fili o conduttori che collegano il generatore all'utilizzatore.

Il **generatore**, detto anche *bipolo attivo* perché capace di imporre nel circuito un regime di corrente, può essere visto come *generatore di tensione* o come *generatore di corrente*. Consideriamo per ora il generatore di tensione. Esso è caratterizzato da:

- la d.d.p. che esso è capace di generare tra i suoi morsetti o poli a circuito aperto, ossia in assenza di corrente; tale d.d.p. viene denominata comunemente *forza elettromotrice* (f.e.m.) e si indica con il simbolo  $E$ ; più propriamente dovrebbe essere chiamata *tensione della f.e.m. a vuoto o a circuito aperto*;
- la sua resistenza interna che si indica con il simbolo  $R_0$ ; ogni generatore sia esso del tipo chimico (pile e accumulatori) o del tipo meccanico (alternatori e dinamo) che del tipo termico (pile termoelettriche), è sempre una macchina capace di togliere elettroni da un morsetto per addensarli nell'altro morsetto attraverso un mezzo conduttore interno che presenta una certa resistenza elettrica; tale resistenza, per i motivi che diremo, conviene sia piuttosto bassa in confronto a quella dell'intero circuito;
- il verso della sua f.e.m. che determina la polarità dei morsetti e perciò il verso della corrente nel circuito; ricordiamo infatti che la corrente elettronica fluisce dal morsetto negativo a quello positivo esternamente al generatore e dal morsetto positivo a quello negativo internamente al generatore. Il generatore reale di tensione continua può essere rappresentato graficamente con uno dei tre simboli di fig. 4.2.

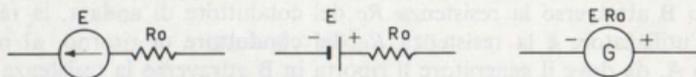


Fig. 4.2 - Rappresentazioni grafiche del generatore reale di tensione continua.

L'**utilizzatore o carico** è un trasformatore di energia elettrica (fornitagli dal generatore) in altra forma di energia; viene detto *carico* o *bipolo passivo* quando trasforma l'intera energia elettrica in calore, mentre, quando in esso hanno

origine delle f.e.m. che contrastano la tensione applicata, viene detto *carico o bipolo attivo*, come diremo meglio in seguito.

Tipici utilizzatori sono le lampade elettriche, i motori elettrici, i relè, gli altoparlanti, le stufe e i forni elettrici, ecc. Per il momento l'utilizzatore verrà rappresentato graficamente con il simbolo usato per le resistenze elettriche (v. fig. 4.1).

**I conduttori di collegamento** sono fili metallici che dovrebbero avere una resistenza elettrica assai modesta rispetto a quella degli utilizzatori, come detto a proposito della resistenza interna dei generatori. Quando però tale resistenza non è trascurabile, essa verrà segnata nel circuito con il simbolo grafico delle resistenze.

Consideriamo ora il circuito elettrico elementare di fig. 4.3, dove con  $R_c$  è indicata la resistenza di ciascun filo della linea di collegamento e con  $R_k$  la resistenza del carico.

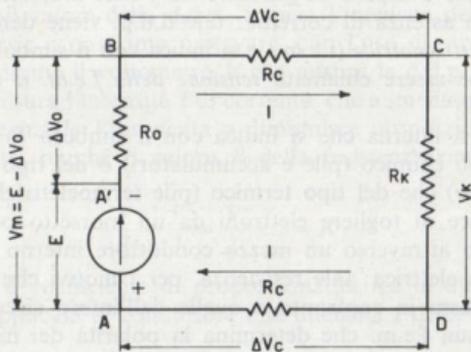


Fig. 4.3 - Circuito elettrico elementare.

A circuito aperto il generatore di tensione produce tra i suoi morsetti  $A$  e  $B$  la f.e.m.  $E$ .

A circuito chiuso, gli elettroni, spinti da questa f.e.m., scorrono dal morsetto negativo  $B$  attraverso la resistenza  $R_c$  del conduttore di andata, la resistenza  $R_k$  dell'utilizzatore e la resistenza  $R_c$  del conduttore di ritorno, al morsetto positivo  $A$ , da dove il generatore li riporta in  $B$  attraverso la resistenza interna  $R_o$ .

Nel circuito si ha quindi una circolazione di corrente  $I$ , e dal momento che tale corrente percorre una dopo l'altra le resistenze indicate, è come se essa incontrasse nel circuito una sola resistenza di valore  $R_t$  pari alla somma di tutte le resistenze:

$$R_t = R_o + R_c + R_k + R_c \quad (4.3)$$

Il circuito può essere perciò ricondotto a quello considerato nel paragrafo precedente, costituito da una sola resistenza di valore complessivo  $R_t$  sottoposta alla f.e.m.  $E$  del generatore. Per esso vale la legge di Ohm:

$$E = IR_t = I(R_o + R_c + R_k + R_c) = IR_o + IR_c + IR_k + IR_c. \quad (4.4)$$

I prodotti  $IR$  rappresentano, sempre per la legge di Ohm, delle d.d.p. parziali del circuito, dette *cadute di tensione*. Infatti ogni resistenza assorbe, quando è percorsa da corrente, una certa tensione, come avviene per una conduttura in cui scorre acqua che, a causa del suo attrito, determina una diminuzione o perdita o caduta di pressione.

Il prodotto  $IR_o$  è detto *caduta di tensione interna al generatore* e si indica con il simbolo  $\Delta V_o$ . È ovvio allora che il generatore di tensione quando è chiuso in un circuito ed eroga una corrente  $I$ , non può più manifestare tra i suoi morsetti la f.e.m.  $E$  da esso generata, ma manifesta una d.d.p. inferiore di una quantità pari alla caduta di tensione interna  $\Delta V_o$  provocata dalla resistenza  $R_o$  percorsa dalla corrente  $I$ . Tale d.d.p. viene detta comunemente *tensione ai morsetti del generatore* e si indica con il simbolo  $V_m$  e vale:

$$V_m = E - \Delta V_o. \quad (4.5)$$

Più propriamente la tensione  $V_m$  dovrebbe essere chiamata *tensione della f.e.m. a carico o a circuito chiuso*.

Il prodotto  $IR_c$  rappresenta la caduta di tensione provocata da ciascun conduttore della linea che collega il generatore all'utilizzatore; si indica con il simbolo  $\Delta V_c$ . In pratica però, dal momento che i due conduttori di linea sono uguali tra loro e hanno perciò la medesima resistenza  $R_c$ , si considera generalmente la resistenza dell'intera linea  $R_L = 2R_c$  e di conseguenza la caduta di tensione che essa provoca al passaggio della corrente  $I$ , ossia  $\Delta V_L = IR_L = 2IR_c$ .

Il prodotto  $IR_k$  è la caduta di tensione provocata dalla resistenza di carico e rappresenta la tensione disponibile tra i morsetti dell'utilizzatore; viene perciò normalmente chiamata *tensione al carico* e si indica con il simbolo  $V_k$  perché rappresenta la d.d.p. nominale o di funzionamento dell'utilizzatore. È ovvio che  $V_k$  è inferiore a  $V_m$  della caduta di tensione provocata dalla linea:

$$V_k = V_m - \Delta V_L, \quad (4.6)$$

oppure:

$$V_k = E - \Delta V_o - \Delta V_L, \quad (4.7)$$

da cui:

$$E = \Delta V_o + \Delta V_L + V_k. \quad (4.8)$$

Dalla (4.8) si deduce che la f.e.m.  $E$  di un generatore di tensione è uguale alla somma delle cadute di tensione interne ed esterne al generatore, ossia dell'intero circuito.

Risolvendo, rispetto ad  $I$ , l'equazione (4.4) e ponendo  $R_L = 2R_c$ , la corrente  $I$  nel circuito varrà:

$$I = \frac{E}{R_o + R_L + R_k} \quad (4.9)$$

È ovvio che l'intensità  $I$  della corrente può essere calcolata facendo il rapporto tra una qualsiasi caduta di tensione e la resistenza che l'ha provocata.

$$I = \frac{V_k}{R_k} = \frac{\Delta V_o}{R_o} = \frac{\Delta V_L}{R_L} = \frac{V_m}{R_L + R_k} \quad (4.10)$$

Per meglio chiarire il concetto di caduta di tensione, di tensione ai morsetti del generatore e della f.e.m., possiamo ricorrere alla rappresentazione grafica della f.e.m. e della variazione di potenziale lungo l'intero circuito dovuta alle cadute di tensione provocate dalle resistenze del circuito stesso.

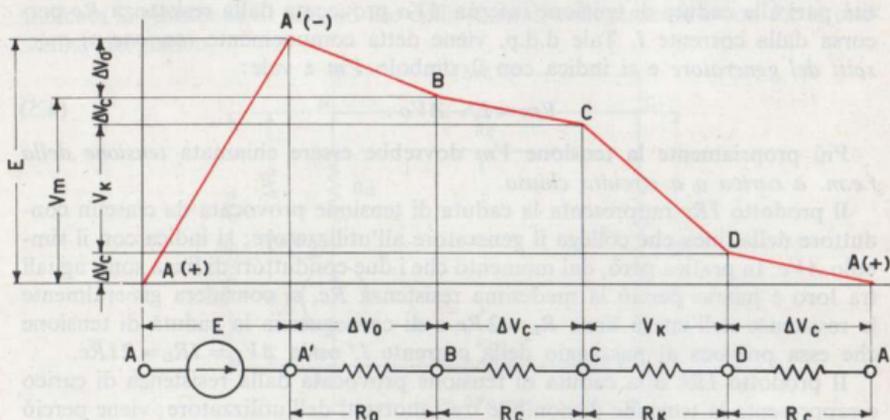


Fig. 4.4 - Diagramma delle tensioni di un circuito elementare.

Portando sulle ordinate di un sistema di assi cartesiani i valori delle d.d.p. e sulle ascisse una simbolica estensione del circuito elementare di fig. 4.3, si ottiene il diagramma delle tensioni rappresentato in fig. 4.4.

Dal morsetto A al morsetto A' (poli del generatore ideale, ossia privo di resistenza interna) il salto di potenziale coincide con la f.e.m.  $E$  del generatore ed è rappresentato con il segmento in salita  $AA'$ . Da A' a B si ha una prima caduta di tensione  $\Delta V_o$  dovuta alla resistenza interna  $R_o$  del generatore, rappresentata dal segmento in discesa A'B, per cui tra i morsetti A e B, che sono i veri morsetti del generatore reale, si viene a stabilire una d.d.p. uguale a  $E - \Delta V_o$  che è appunto la tensione  $V_m$  disponibile ai morsetti del generatore a circuito chiuso e che, a circuito aperto, coincide con la  $E$  essendo la caduta di tensione interna  $\Delta V_o$  nulla.

Mentre la f.e.m.  $E$ , per un determinato generatore, è costante, la tensione  $V_m$  disponibile ai morsetti a circuito chiuso varia con il variare della corrente  $I$  ossia con il variare della resistenza esterna ( $R_L + R_k$ ) che il generatore alimenta.

Il tratto BC rappresenta la caduta di tensione  $\Delta V_c$  del conduttore di andata. Il segmento CD corrisponde alla caduta di tensione  $V_k$  provocata dalla resistenza  $R_k$  del carico o, come detto, alla tensione  $V_k$  utilizzata dal carico. Infine il tratto DA rappresenta la caduta di tensione  $\Delta V_c$  del conduttore di ritorno.

Dal diagramma si dimostra ancora una volta che la f.e.m. del generatore è la somma delle cadute dell'intero circuito:

$$E = \Delta V_c + V_k + \Delta V_c + \Delta V_o,$$

e che la tensione ai morsetti  $V_m$  è la somma delle cadute di tensione del circuito esterno al generatore:

$$V_m = \Delta V_c + V_k + \Delta V_c.$$

Evidentemente la f.e.m., la tensione e la caduta di tensione, essendo tutte e tre differenze di potenziale, si misurano in volt.

#### Esempio numerico

Un generatore elettrico della f.e.m. di 100 Volt e della resistenza interna di 0,5 ohm, alimenta un carico della resistenza di 18 ohm, attraverso una linea della resistenza complessiva di 1,5 ohm. Si determini il valore della corrente  $I$ , della tensione  $V_m$  del generatore, della caduta di tensione interna  $\Delta V_o$ , della caduta in linea  $\Delta V_L$  e della tensione  $V_k$  al carico.

#### Soluzione

Calcolo dell'intensità di corrente  $I$ , dalla (4.9) si ricava:

$$I = \frac{E}{R_o + R_L + R_k} = \frac{100}{0,5 + 1,5 + 18} = 5 \text{ A}.$$

Calcolo della caduta di tensione  $\Delta V_o$  interna del generatore, per la (4.10) si ha:

$$\Delta V_o = R_o I = 0,5 \cdot 5 = 2,5 \text{ V}.$$

Calcolo della tensione  $V_m$  ai morsetti del generatore, per la (4.5) si ha:

$$V_m = E - \Delta V_o = 100 - 2,5 = 97,5 \text{ V},$$

oppure

$$V_m = (R_L + R_k)I = (1,5 + 18) \cdot 5 = 97,5 \text{ V}.$$

La caduta di tensione  $\Delta V_L$  in linea è data da

$$\Delta V_L = R_L I = 1,5 \cdot 5 = 7,5 \text{ V}.$$

La tensione al carico  $V_k$  si trova con

$$V_k = RkI = 18 \cdot 5 = 90 \text{ V}.$$

Si può verificare che la f.e.m.  $E$ , coincide, come detto, con la somma delle cadute di tensione dell'intero circuito

$$E = \Delta V_o + \Delta V_L + V_k = 2,5 + 7,5 + 90 = 100 \text{ V}.$$

### 4.3. L'ENERGIA O LAVORO ELETTRICO E LA POTENZA ELETTRICA

Il concetto di energia e di conseguenza quello di potenza, è basilare in tutti i campi della tecnica, perché lega i più disparati fenomeni appartenenti a tutti i campi della fisica.

Infatti l'energia può manifestarsi in parecchi modi e produrre svariati fenomeni per il solo fatto che può trasformarsi, senza nulla perdere della sua entità (conservazione dell'energia), in aspetti diversi.

L'energia termica, luminosa, meccanica, chimica, elettrica, ecc., sono gli aspetti diversi in cui si trasforma l'entità energetica.

Il generatore elettrico, è in realtà un trasformatore di energia, prelevata sotto altra forma, in energia elettrica.

Anche l'utilizzatore, anzi l'intero circuito elettrico, è un trasformatore di energia elettrica, ricevuta dal generatore, in altre forme di energia.

L'energia, a seconda della forma in cui si presenta, viene calcolata con una particolare espressione analitica in cui figurano le grandezze fisiche proprie di quella forma.

In elettrotecnica l'energia  $W$  è il lavoro che compie la carica elettrica  $Q$  cadendo da un potenziale più alto ad un potenziale più basso, come in meccanica l'energia è il lavoro che compie un corpo pesante cadendo da una certa altezza. Si ha così la relazione:

$$W = \Delta V \cdot Q,$$

dove  $\Delta V$  è il salto di potenziale. In generale l'energia elettrica assorbita o trasformata da un apparecchio elettrico qualsiasi è data da:

$$W = V \cdot Q, \quad (4.11)$$

dove  $V$  è la tensione presente ai morsetti dell'apparecchio stesso.

Ricordando che  $Q = I \cdot t$  si ha:

$$W = V \cdot I \cdot t. \quad (4.12)$$

L'energia elettrica assorbita o trasformata da un circuito o da un qualsiasi apparecchio elettrico è perciò il prodotto della tensione  $V$  applicata al circuito o all'apparecchio per la corrente  $I$  che in esso circola in un determinato tempo  $t$ .

Sostituendo nella (4.12) al posto della  $V$  o al posto della  $I$  i rispettivi valori ricavati dalla legge di Ohm, in funzione della resistenza  $R$  o della conduttanza  $G$ , si ha anche:

$$W = V \cdot I \cdot t = R \cdot I^2 \cdot t = G \cdot V^2 \cdot t = \frac{V^2 \cdot t}{R} = \frac{I^2 \cdot t}{G} \quad (4.13)$$

TABELLA 4 Rapporti tra le diverse unità di misura dell'energia.

	Joule	watt-ora	kWh	Kgm	CV-ora	Calorie
1 Joule	1	0,000278	$278 \cdot 10^{-9}$	0,102	$0,378 \cdot 10^{-6}$	0,00024
1 watt-ora	3.600	1	0,001	367	0,00136	0,860
1 kWh	3.600.000	1.000	1	367.000	1,36	860
1 Kgm	9,81	0,00272	$272 \cdot 10^{-8}$	1	$3,7 \cdot 10^{-6}$	0,00234
1 CV-ora	2.647.000	736	0,736	270.000	1	633
1 Calorie	4.186	1,16	0,00116	427	0,00158	1

È noto dalla meccanica che *la potenza è il lavoro compiuto nell'unità di tempo*. Anche in elettrotecnica la potenza  $P$  è il lavoro  $W$  compiuto nel tempo  $t$ .

$$P = \frac{W}{t} \quad \text{da cui per la (4.12)} \quad P = V \cdot I \quad (4.14)$$

La potenza elettrica assorbita o trasformata da un apparecchio elettrico è quindi il prodotto della tensione  $V$  applicata all'apparecchio per la corrente  $I$  che in esso circola.

Sostituendo anche nella espressione della potenza, al posto della tensione  $V$  o al posto della corrente  $I$  i rispettivi valori dati dalla legge di Ohm in funzione della resistenza  $R$  o della conduttanza  $G$ , si ottiene:

$$P = V \cdot I = R \cdot I^2 = G \cdot V^2 = \frac{V^2}{R} = \frac{I^2}{G} \quad (4.15)$$

Queste formule dell'energia e della potenza valgono per i circuiti percorsi da corrente continua, non sempre per quelli percorsi da corrente alternata.

L'unità di misura della potenza elettrica è il *watt* ( $w$ : da non confondersi con il  $W$  dell'energia), che equivale alla potenza della corrente di un ampere spinta dalla tensione di un volt:

$$1 \text{ watt} = 1 \text{ volt} \cdot 1 \text{ ampere}$$

TABELLA 5 Rapporti tra le diverse unità di misura della potenza.

	watt	Kw	CV	Kgm/sec
1 watt	1	0,001	0,00136	0,102
1 chilowatt	1.000	1	1,36	102
1 cavallo vapore	736	0,736	1	75
1 Kgm/sec	9,81	0,00981	0,0133	1

L'unità di misura dell'energia elettrica è il *joule* ( $j$ ) che, per correnti costanti, equivale all'energia sviluppata in un secondo dalla corrente di un ampere sotto la tensione di un volt:

$$1 \text{ joule} = 1 \text{ volt} \cdot 1 \text{ ampere} \cdot 1 \text{ secondo} = 1 \text{ watt} \cdot 1 \text{ secondo} .$$

Sia il watt che il joule sono unità di misura piuttosto piccole, per cui si usano spesso i loro multipli.

I multipli del watt sono: l'*ettowatt* ( $hw = 100 \text{ w}$ ), il *chilowatt* ( $kw = 1.000 \text{ w}$ ), il *megawatt* ( $Mw = 1.000.000 \text{ w}$ ).

I multipli del joule sono: il *wattora* ( $wh = 3.600 \text{ j}$ ), il *chilowattora* ( $kwh = 3.600.000 \text{ j}$ ).

I rapporti tra le diverse unità di misura di energia e di potenza elettriche, meccaniche e termiche sono riportati rispettivamente nella tabella 4 e 5.

#### Esempio numerico

Un generatore della resistenza interna  $R_0$  di  $0,5 \Omega$  alimenta alla tensione  $V_k$  di 200 volt un carico della resistenza  $R_k$  di  $20 \Omega$ . Calcolare la potenza  $P_a$  assorbita dal carico e la potenza  $P_g$  generata dal generatore. Calcolare inoltre l'energia assorbita  $W_k$  dal carico in due ore, espressa in joule e in calorie.

#### Soluzione

Calcolo della corrente assorbita  $I_k$  dal carico

$$I_k = \frac{V_k}{R_k} = \frac{200}{20} = 10 \text{ A} .$$

Calcolo della potenza assorbita  $P_k$  dal carico

$$P_k = V_k \cdot I_k = 200 \cdot 10 = 2.000 \text{ w} .$$

Calcolo della f.e.m.  $E$  del generatore (avendo considerato nulla la caduta di tensione in linea, si ha  $V_k = V_m$ )

$$E = V_m + R_0 \cdot I = 200 + 0,5 \cdot 10 = 205 \text{ V} .$$

Calcolo della potenza generata  $P_g$

$$P_g = E \cdot I = 205 \cdot 10 = 2.050 \text{ w.}$$

Calcolo dell'energia assorbita  $W_k$  dal carico espressa in joule

$$W_k = V_k \cdot I_k \cdot t = 200 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 3.600 = 14.400.000 \text{ joule.}$$

Volendo esprimere la stessa energia in calorie, si moltiplica il valore espresso in joule per l'equivalente in calorie (tabella n. 4)

$$W_k = 14.400.000 \times 0,00024 = 3.456 \text{ calorie.}$$

#### 4.4. L'EFFETTO TERMICO DELLA CORRENTE - LEGGE DI JOULE

Una trasformazione energetica sempre presente nei circuiti elettrici è quella relativa alla trasformazione dell'energia elettrica in energia calorifica.

La natura stessa della corrente elettrica, sia essa elettronica che ionica, comporta nel conduttore una successione di urti più o meno violenti che gli ioni, attratti ed accelerati dalla d.d.p., esercitano sulle molecole e sugli atomi. Gli elettroni e gli ioni possiedono una massa e l'urto tra masse produce calore.

Pertanto dovunque passa la corrente elettrica si ha sviluppo di calore a scapito dell'energia elettrica.

Nelle apparecchiature elettriche impiegate per la produzione di calore (fornelli elettrici, ferri da stiro, stufe, lampade elettriche, ecc.) tale trasformazione energetica è utilizzata ed opportunamente calcolata per il suo massimo sfruttamento; ma in tutti gli altri casi lo sviluppo di calore rappresenta un'energia perduta e il più delle volte anche dannosa.

L'energia elettrica  $W$  dissipata o trasformata in calore in un conduttore di resistenza  $R$  o di conduttanza  $G$ , percorso da una corrente  $I$  e sottoposto ad una tensione  $V$ , è, in un tempo  $t$ :

$$W = V \cdot I \cdot t.$$

Volendo ottenere l'energia termica  $Q$  espressa in calorie, si moltiplica il valore dell'energia elettrica  $W$  per l'equivalente elettrotermico (0,00024), che corrisponde al numero di calorie prodotte da un joule.

$$Q = 0,00024 V \cdot I \cdot t. \quad (4.16)$$

Di conseguenza la potenza elettrica dissipata in calore nello stesso conduttore, è data da:

$$P = VI = \frac{V^2}{R} = \frac{I^2}{G} = RI^2 = GV^2,$$

che sono espressioni equivalenti, esprimenti tutte la legge di Joule, la quale può essere enunciata in rapporto ad una di esse:

*la potenza elettrica trasformata in calore in un qualsiasi conduttore è direttamente proporzionale alla resistenza  $R$  del conduttore considerato e al quadrato della corrente  $I$  che in esso scorre.*

Con il passare del tempo la temperatura del conduttore aumenterebbe continuamente fino a raggiungere valori notevolissimi, se lo stesso conduttore non provvedesse a disperdere il calore prodotto nel mezzo circostante. I conduttori infatti, in contatto con l'ambiente esterno, cedono, in ragione della loro superficie disperdente e del loro isolamento, una certa quantità di calore. La temperatura si stabilizza quando il conduttore riesce a disperdere tante calorie quante ne produce.

È evidente che stabilizzare la temperatura entro precisi limiti scelti in base all'impiego del conduttore resistente, onde evitare la fusione dei resistori spinti ad alte temperature (forni, stufe, ecc.) e ridurre la perdita di potenza per effetto Joule nei conduttori destinati al trasporto dell'energia elettrica (linee di collegamento), non significa limitare più o meno l'intensità di corrente, ma significa stabilire la densità di corrente e cioè l'intensità  $I$  per ogni unità di superficie  $S$  del conduttore.

Per cui la densità di corrente  $\delta = I/S$  in un conduttore deve essere scelta in ragione della temperatura che si vuole produrre. In pratica per i conduttori di collegamento si ammette un aumento di temperatura di  $20^\circ\text{C}$  rispetto alla temperatura ambiente e la densità varia da 4 a 5 ampere per  $\text{mm}^2$  per conduttori di sezione fino a  $15\text{-}20\text{ mm}^2$ , da 2 a 3  $\text{A}/\text{mm}^2$  per conduttori di  $20\text{-}30\text{ mm}^2$  di sezione e di 2  $\text{A}/\text{mm}^2$  per conduttori di sezione maggiore.

La densità varia anche in ragione dell'isolamento termico dei conduttori, del mezzo esterno, ecc. Comunque per il giusto impiego dei conduttori in rapporto alla temperatura in essi ammessa si fa uso di apposite tabelle che danno i valori della densità di corrente ammessa nei vari tipi di conduttori posti in determinate condizioni ambientali.

#### **Esempio numerico**

Un fornello elettrico, alimentato alla tensione di 200 V, deve produrre 100 calorie in 15 minuti primi. Calcolare il valore della sua resistenza e della sua potenza, ammesse nulle le perdite.

#### *Soluzione*

Dalla (4.16) si ricava:

$$I = \frac{Q}{0,00024 Vt} = \frac{100}{0,00024 \cdot 200 \cdot 15 \cdot 60} = 2,32 \text{ amper.}$$

Per la legge di Ohm:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{200}{2,32} = 86,4 \text{ ohm},$$

oppure, essendo  $P = \frac{V^2}{R}$ , si ha anche  $Q = 0,00024 \frac{V^2}{R} t$ , da cui

$$R = \frac{0,00024 V^2 t}{Q} = \frac{0,00024 \cdot 200^2 \cdot 15 \cdot 60}{100} = 86,4 \text{ ohm}.$$

La potenza del fornello si calcola con le espressioni:

$$P = V \cdot I = 200 \cdot 2,32 = 464 \text{ w},$$

oppure:

$$P = \frac{V^2}{R} = \frac{200^2}{86,4} = 464 \text{ w}.$$

#### 4.5. EFFETTI TERMOELETTRICI SEEBECK E PELTIER

Al paragrafo 2.5. si è detto che nelle immediate vicinanze della superficie di contatto tra due metalli diversi nasce spontaneamente una f.e.m. di contatto (effetto Volta). Tale f.e.m. non può dare origine ad una corrente, in quanto, collegando gli estremi liberi dei due metalli in contatto attraverso un circuito pure metallico, essa si annulla, a causa delle f.e.m. contrarie che si generano nelle zone di contatto tra l'elemento bimetallico e il metallo costituente il circuito. Si ha cioè che se la catena di conduttori metallici è chiusa, la f.e.m. totale è nulla, purché tutti i punti della catena siano alla stessa temperatura.

Per mantenere, anzi per aumentare la f.e.m. di contatto e per ottenere una corrente, occorre somministrare energia alla zona di contatto, che compensi l'energia assorbita dal circuito. Tale energia non può essere somministrata che riscaldando la giunzione.

La maggiore agitazione molecolare facilita la diffusione degli elettroni liberi dal corpo avente maggiore densità di elettroni verso quello a minore densità, con conseguente aumento della f.e.m. di contatto. La corrente nel circuito viene mantenuta dall'aumento della f.e.m. dovuta al riscaldamento. È questo l'*effetto Seebeck*.

Il senso della corrente dipende dai metalli costituenti la coppia. L'insieme dei due metalli in contatto prende il nome di *pila* o *coppia termoelettrica*. La f.e.m. dovuta al riscaldamento della giunzione si dice *f.e.m. termoelettrica*.

Le f.e.m. termoelettriche sono assai deboli e precisamente dell'ordine di millesimi di volt. Le pile termoelettriche trovano impiego nei pirometri, nei termostati, ecc.

Un altro fenomeno, che ha correlazione con le correnti termoelettriche, è quello che passa sotto il nome di *effetto Peltier*.

Facendo passare una debole corrente continua nella giunzione di due metalli diversi, si constata, con opportuni strumenti, che la giunzione si riscalda o si raffredda a seconda del senso della corrente, pur rimanendo valido l'effetto Joule che si manifesta indipendentemente dal verso della corrente stessa.

Precisamente il verso della corrente che produce il raffreddamento nella giunzione è uguale a quello della corrente termoelettrica che si avrebbe riscaldando la zona di contatto tra i due metalli.

L'effetto Peltier non ha pratica applicazione.

#### 4.6. CARICHI ELETTRICI PASSIVI ED ATTIVI

Abbiamo detto che il generatore è un bipolo attivo perché capace di imporre al circuito, in cui è inserito, un regime di corrente, mentre l'utilizzatore, nel quale non hanno origine né f.e.m. né correnti, è un bipolo passivo.

Occorre però precisare che non tutti i carichi sono passivi; esistono anche carichi attivi nei quali, durante il loro funzionamento, sorge una f.e.m. che normalmente ha segno contrario a quella della tensione di alimentazione e che perciò viene chiamata *forza controlettromotrice* (f.c.e.m.).

Gli utilizzatori di energia elettrica possono essere dunque passivi ed attivi.

*Sono passivi quei carichi che trasformano, per effetto Joule, tutta la potenza elettrica assorbita in potenza termica.* Un carico costituito da un filo resistente è un carico passivo. Esso è anche chiamato *carico ohmico*, perché per esso vale la legge di Ohm. Infatti sottoposto alla tensione  $V$ , essendo  $R$  il valore della sua resistenza, in esso circola la corrente  $I = V/R$ , che trasforma tutta la potenza  $VI$  in potenza termica  $RI^2$ , e determina una caduta di tensione  $V = RI$ , che corrisponde esattamente al valore della tensione  $V$  a cui è sottoposto.

*Sono invece attivi quei carichi nei quali l'energia elettrica assorbita si trasforma in altre forme energetiche diverse da quella termica e cioè in meccanica, acustica, chimica, ecc.*

Per il fatto che anche il carico attivo, come ogni altro carico, per produrre le trasformazioni energetiche, deve essere percorso da corrente e deve essere costituito da conduttori (carichi passivi), una parte, normalmente piccola, dell'energia assorbita si trasforma in calore, non utilizzabile, che pertanto rappresenta una potenza perduta. Il motore elettrico, l'altoparlante, ecc., sono esempi di carichi attivi.

Indicando allora con  $P_a$  la potenza assorbita dal carico attivo, con  $P_p$  la potenza elettrica dissipata in calore nella resistenza ohmica interna e con  $P_r$  la potenza elettrica resa in altre forme di energia, si ha, per la conservazione dell'energia:

$$P_a = P_p + P_r . \quad (4.17)$$

La potenza elettrica è sempre il prodotto di una d.d.p. per una corrente, per cui deve essere:

$$V \cdot I = \Delta V k \cdot I + E c \cdot I, \quad (4.18)$$

dove  $V$  è la tensione applicata al carico,  $\Delta V k$  è la caduta interna ed  $E c$  la forza controlettromotrice (f.c.e.m.).

Semplificando si ha:

$$V = \Delta V k + E c. \quad (4.19)$$

Caratteristica fondamentale del carico attivo è allora quella di opporre alla tensione applicata  $V$  non solo la caduta di tensione interna  $\Delta V k$ , come avviene per i carichi passivi, ma di opporre anche una f.c.e.m.  $E c$ , la natura della quale dipende dal tipo di carico, come verrà studiato in seguito.

Per ora basta comprendere come non sia possibile applicare la legge di Ohm ai carichi attivi. Infatti essendo anche:

$$V = R k \cdot I + E c,$$

l'intensità della corrente  $I$  è data dalla formula:

$$I = \frac{V - E c}{R k}, \quad (4.20)$$

che si ridurrebbe alla semplice legge di Ohm solo per  $E c = 0$ .

Consideriamo un circuito elettrico elementare comprendente un generatore reale di tensione ( $E$ ,  $R_0$ ), una linea di collegamento di resistenza complessiva  $R_L$  e un utilizzatore attivo (fig. 4.5). Quest'ultimo può essere rappresentato con il simbolo di un generatore di f.c.e.m.  $E c$  con resistenza interna  $R_k$ .

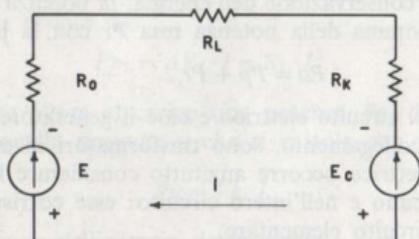


Fig. 4.5 - Circuito elementare comprendente una f.e.m. e una f.c.e.m.

La corrente circolante risulta espressa dal rapporto tra la f.e.m. risultante che agisce nel circuito e la resistenza totale del circuito stesso. Poiché nel circuito considerato si hanno due f.e.m.  $E$  ed  $E c$  una contraria all'altra, la f.e.m. risultante è data dalla differenza tra la f.e.m.  $E$  del generatore e la f.c.e.m.  $E c$  del carico, dovendo essere  $E > E c$ .

La corrente circolante vale perciò:

$$I = \frac{E - E_c}{R_o + R_L + R_k} \quad (4.21)$$

L'equazione (4.21) esprime ancora la legge di Ohm che, generalizzata a circuiti elementari comprendenti più di una f.e.m. e più di una f.c.e.m., può essere così enunciata: *la somma  $\sum E$  delle f.e.m. agenti nel circuito diminuita della somma  $\sum E_c$  dell'eventuali f.c.e.m. dovrà fare equilibrio della somma  $\sum R$  di tutte le cadute di tensione provocate dalle resistenze passive poste lungo il circuito:*

$$\sum E - \sum E_c = \sum R \cdot I$$

La legge di Ohm potrà assumere, come vedremo in seguito, espressioni analitiche ancor più generalizzate.

#### 4.7. RENDIMENTI ELETTRICI DI UN CIRCUITO

Si dice *rendimento*  $\eta$  (pron. eta) di un qualsiasi apparecchio capace di trasformare l'energia da una forma all'altra, *il rapporto tra la potenza  $P_r$  che l'apparecchio rende e la potenza  $P_a$  che esso assorbe:*

$$\eta = \frac{P_r}{P_a} \quad (4.22)$$

Il rendimento è sempre inferiore all'unità, perché in tutte le trasformazioni energetiche la potenza assorbita  $P_a$  è sempre maggiore di quella resa  $P_r$ , in quanto una parte  $P_p$  viene perduta o dissipata nell'interno dell'apparecchio. Per il principio della conservazione dell'energia, la potenza assorbita  $P_a$  è però sempre uguale alla somma della potenza resa  $P_r$  con la potenza perduta  $P_p$ .

$$P_a = P_p + P_r \quad (4.23)$$

I tre costituenti del circuito elettrico e cioè il generatore, il carico od utilizzatore e la linea di collegamento, sono trasformatori di energia. Per ricavare il loro rendimento elettrico occorre anzitutto considerare le potenze elettriche che agiscono in ciascuno e nell'intero circuito: esse corrispondono alle d.d.p. già riscontrate nel circuito elementare.

##### a) Rendimento elettrico del generatore

Il generatore assorbe una potenza da una fonte energetica meccanica, o termica o chimica, per trasformarla in potenza elettrica  $P_g$ , detta *potenza generata*, che vale:

$$P_g = E \cdot I \quad (4.24)$$

dove  $E$  è la f.e.m. del generatore. Esso fornisce però al circuito esterno una potenza elettrica  $P_m$ , detta *potenza erogata*, che vale:

$$P_m = V_m \cdot I, \quad (4.25)$$

dove  $V_m$  è la tensione ai morsetti del generatore.

La potenza  $P_m$  erogata è inferiore a quella generata  $P_g$ , a causa della potenza perduta o dissipata  $P_{po}$  in calore nella resistenza interna  $R_o$  del generatore:

$$P_{po} = \Delta V_o \cdot I = R_o \cdot I^2.$$

Per la conservazione dell'energia, deve essere:

$$P_g = P_{po} + P_m.$$

Il rapporto tra la potenza erogata  $P_m$  e la potenza generata  $P_g$  si chiama *rendimento elettrico*  $\eta_g$  del generatore:

$$\eta_g = \frac{P_m}{P_g} = \frac{V_m}{E}, \quad (4.26)$$

che corrisponde anche al rapporto tra la tensione ai morsetti  $V_m$  del generatore e la f.e.m.  $E$  generata.

#### b) Rendimento elettrico della linea

La linea che collega il generatore all'utilizzatore riceve dal generatore la potenza erogata  $P_m$  per trasmetterla al carico. Ma a causa della sua resistenza complessiva  $R_L$ , trasforma parte dell'energia ricevuta in calore. La potenza dissipata in calore  $P_{pL}$  è data da:

$$P_{pL} = \Delta V_L \cdot I = R_L \cdot I^2.$$

La linea trasmette allora al carico una potenza  $P_u$ , detta *utilizzata*, che è dunque minore di quella ricevuta, e che si calcola con l'espressione:

$$P_u = V_k \cdot I.$$

Per la conservazione dell'energia deve essere:

$$P_m = P_{pL} + P_u.$$

Il *rendimento elettrico della linea*  $\eta_L$  è il rapporto tra la potenza  $P_u$  utilizzata dal carico e quella  $P_m$  erogata dal generatore:

$$\eta_L = \frac{P_u}{P_m} = \frac{V_k}{V_m}, \quad (4.27)$$

che corrisponde anche al rapporto tra la tensione  $V_k$  ai morsetti del carico e la tensione  $V_m$  ai morsetti del generatore.

### c) Rendimento elettrico dell'utilizzatore

Se l'utilizzatore è un carico passivo, esso trasforma tutta la potenza  $P_u$  trasmessagli dalla linea, in potenza termica: se poi esso è impiegato alla produzione esclusiva del calore, il suo rendimento è logicamente uguale a uno.

Se invece il carico è attivo, parte della potenza  $P_u$  viene trasformata in lavoro attivo (per esempio meccanico), corrispondente all'effettiva potenza resa  $P_r$ , data da:

$$P_r = Ec \cdot I,$$

e parte  $P_{pk}$  viene dissipata in calore nella resistenza  $R_k$  del carico:

$$P_{pk} = \Delta V_k \cdot I = R_k \cdot I^2.$$

Sempre per la conservazione dell'energia, si ha:

$$P_u = P_r + P_{pk}.$$

Il rendimento elettrico  $\eta_k$  dell'utilizzatore è allora il rapporto tra la potenza elettrica  $P_r$  resa in altra forma di energia e la potenza  $P_u$  ricevuta dalla linea:

$$\eta_k = \frac{P_r}{P_u} = \frac{Ec}{V_k}, \quad (4.28)$$

che corrisponde anche al rapporto tra la f.c.e.m.  $Ec$  del carico attivo e la tensione  $V_k$  esistente ai morsetti del carico stesso.

### d) Rendimento elettrico totale del circuito

Il rendimento elettrico totale  $\eta_t$  del circuito è il rapporto tra la potenza resa  $P_r$  dell'utilizzatore e la potenza generata  $P_g$  del generatore:

$$\eta_t = \frac{P_r}{P_g} = \frac{\eta_g P_r}{P_m} = \frac{\eta_g \eta_L P_r}{P_u} = \frac{\eta_g \eta_L \eta_k P_r}{P_r} = \eta_g \cdot \eta_L \cdot \eta_k, \quad (4.29)$$

da cui si deduce che quando più apparecchi o macchine collegate tra loro compiono successive trasformazioni di energia, il rendimento totale è dato dal prodotto dei singoli rendimenti.

È importante osservare che il rendimento elettrico non sempre coincide con il rendimento energetico complessivo delle apparecchiature elettriche.

In un motore elettrico, per esempio, la potenza meccanica usufruibile alla puleggia è minore della potenza elettrica resa, in quanto una parte di questa, sia pure minima, deve vincere gli attriti meccanici delle parti in rotazione e le perdite magnetiche.

### Esempio numerico

Un generatore della resistenza interna  $R_o$  di 0,5 ohm, alimenta alla tensione  $V_k$  di 200 volt, attraverso una linea di rame avente la resistenza complessiva  $R_L$  di 0,7 ohm, un carico attivo della potenza elettrica resa  $Pr$  di 1,6 kw e del rendimento di 0,8. Calcolare il rendimento elettrico della linea, del generatore e totale del circuito, nonché la f.c.e.m. del carico. (Verificare inoltre l'intensità della corrente con l'equazione 4.21).

### Soluzione

Calcolo della potenza assorbita  $P_k$  dal carico

$$P_k = \frac{Pr}{\eta_{\kappa}} = \frac{1.600}{0,8} = 2.000 \text{ watt .}$$

Calcolo della corrente assorbita dal carico

$$I = \frac{P_k}{V_k} = \frac{2.000}{200} = 10 \text{ ampere .}$$

Calcolo della potenza  $P_{pL}$  dissipata in linea

$$P_{pL} = R_L \cdot I^2 = 0,7 \cdot 10^2 = 70 \text{ watt .}$$

Calcolo della potenza assorbita  $P_m$  dalla linea od erogata dal generatore

$$P_m = P_{pL} + P_k = 70 + 2.000 = 2.070 \text{ watt .}$$

Calcolo del rendimento  $\eta_L$  della linea

$$\eta_L = \frac{P_k}{P_m} = \frac{2.000}{2.070} = 0,96 .$$

Allo stesso risultato si può arrivare calcolando la tensione  $V_m$  all'inizio della linea o tensione ai morsetti del generatore

$$V_m = \Delta V_L + V_k = 0,7 \cdot 10 + 200 = 207 \text{ volt ,}$$

$$\eta_L = \frac{V_k}{V_m} = \frac{200}{207} = 0,96 .$$

Calcolo della potenza  $P_{po}$  dissipata nel generatore

$$P_{po} = R_o \cdot I^2 = 0,5 \cdot 10^2 = 50 \text{ watt .}$$

Calcolo della potenza generata  $P_g$  del generatore

$$P_g = P_{po} + P_m = 50 + 2.070 = 2.120 \text{ watt .}$$

Calcolo del rendimento  $\eta_g$  del generatore

$$\eta_g = \frac{P_m}{P_g} = \frac{2.070}{2.120} = 0,97 .$$

Allo stesso risultato si giunge calcolando la f.e.m.  $E$  del generatore:

$$E = V_m + R_o \cdot I = 207 + 0,5 \cdot 10 = 212 \text{ volt ,}$$

$$\eta_g = \frac{V_m}{E} = \frac{207}{212} = 0,97 .$$

Il rendimento totale  $\eta_t$  è dato da:

$$\eta_t = \eta_g \cdot \eta_L \cdot \eta_K = 0,97 \cdot 0,96 \cdot 0,8 = 0,75 .$$

La f.c.e.m. del carico può essere calcolata nota la potenza dissipata nella resistenza del carico stesso

$$P_{pk} = P_k - P_r = 2.000 - 1.600 = 400 \text{ watt ,}$$

$$R_k = \frac{P_{pk}}{I^2} = \frac{400}{10^2} = 4 \text{ ohm ,}$$

$$E_c = V_k - R_k I = 200 - 4 \cdot 10 = 160 \text{ volt .}$$

Verifica dell'intensità di corrente mediante l'equazione 4.21

$$I = \frac{E - E_c}{R_o + R_L + R_k} = \frac{212 - 160}{0,5 + 0,7 + 4} = 10 \text{ ampere .}$$

#### 4.8. RAGGRUPPAMENTI DELLE RESISTENZE ELETTRICHE (CARICHI PASSIVI)

La resistenza di carico  $R_k$  di un circuito elementare può essere considerata come la resistenza equivalente di più resistenze collegate fra loro.

Infatti le resistenze nei circuiti possono essere raggruppate in modi diversi e cioè in serie o cascata, in parallelo o derivazione e in modo misto (serie-parallelo e parallelo-serie).

Di ciascun collegamento interessa conoscere e quindi calcolare la caduta di tensione e l'intensità di corrente in ciascuna resistenza, la corrente totale e la resistenza equivalente, dato il valore della tensione di alimentazione e il valore di ciascuna resistenza.

##### a) Collegamento serie

Si ha quando la fine di una resistenza è collegata con il principio della successiva (fig. 4.6), e cioè quando tutte le resistenze, anche se sono diverse tra loro, sono percorse dalla medesima intensità di corrente:

$$I_t = I_1 = I_2 = I_3 . \quad (4.30)$$

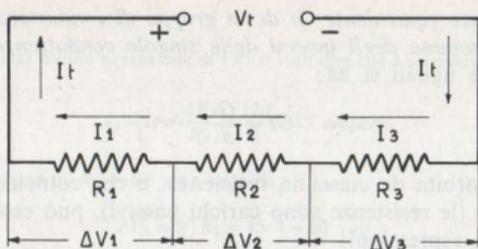


Fig. 4.6 - Resistenze in serie.

La corrente provoca in ciascuna resistenza una caduta di tensione  $\Delta V$  che è direttamente proporzionale al valore della resistenza stessa. La somma aritmetica delle cadute di tensione è uguale alla tensione applicata  $V_t$ :

$$V_t = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = R_1 I + R_2 I + R_3 I. \quad (4.31)$$

La resistenza totale od equivalente  $R_t$  è, per la legge di Ohm:

$$\begin{aligned} R_t &= \frac{V_t}{I_t} = \frac{\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3}{I} = \frac{I R_1 + I R_2 + I R_3}{I} = \frac{I(R_1 + R_2 + R_3)}{I} = \\ &= R_1 + R_2 + R_3. \end{aligned} \quad (4.32)$$

La resistenza equivalente  $R_t$  di più resistenze collegate in serie è data dalla somma aritmetica delle singole resistenze.

Se le resistenze  $R$  sono tutte uguali fra loro, la resistenza totale  $R_t$  è data da:

$$R_t = s \cdot R, \quad (4.33)$$

dove  $s$  è il numero delle resistenze in serie.

In tal caso le cadute di tensione  $\Delta V$  sono uguali fra loro, per cui la tensione applicata  $V_t$  è:

$$V_t = s \cdot \Delta V. \quad (4.34)$$

La conduttanza totale  $G_t$  di più resistenze collegate in serie, essendo  $G = \frac{1}{R}$  si calcola con la seguente espressione:

$$G_t = \frac{1}{R_t} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3}}, \quad (4.35)$$

e cioè la *conduttanza equivalente*  $G_t$  di un gruppo di conduttanze in serie è data dall'inverso della somma degli inversi delle singole conduttanze.

Per conduttanze uguali si ha:

$$G_t = \frac{G}{s}. \quad (4.36)$$

La potenza assorbita da ciascuna resistenza, e che coincide con la potenza dissipata in calore (le resistenze sono carichi passivi), può essere calcolata con una delle seguenti espressioni:

$$P_1 = \Delta V_1 I = R_1 I^2 = G_1 \Delta V_1^2 = \frac{\Delta V_1^2}{R_1} = \frac{I^2}{G_1}.$$

La potenza totale  $P_t$  è data allora da:

$$P_t = V_t \cdot I = (\Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3) I = \Delta V_1 I + \Delta V_2 I + \Delta V_3 I = P_1 + P_2 + P_3.$$

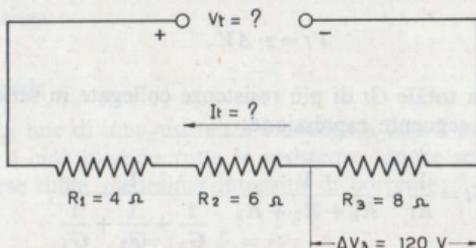
Quindi la *potenza totale assorbita o dissipata da più resistenze collegate in serie è data dalla somma aritmetica delle potenze dissipate in ciascuna resistenza.*

Riassumendo, in un collegamento di resistenze in serie, si ha:

- 1) la corrente è la stessa in ciascuna resistenza e in tutti i punti del circuito;
- 2) la somma aritmetica delle cadute di tensione provocate da ciascuna resistenza coincide con il valore della tensione applicata;
- 3) la resistenza equivalente è la somma aritmetica delle singole resistenze;
- 4) la conduttanza totale è uguale all'inverso della somma degli inversi di ciascuna conduttanza;
- 5) la potenza complessiva è la somma aritmetica delle potenze dissipate od assorbite da ciascuna resistenza.

#### Esempio numerico

Tre resistenze  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ , del valore rispettivamente di 4, di 6 e di 8 ohm, sono collegate in serie tra loro. La caduta di tensione misurata ai capi della  $R_3$  è di 120 volt. Calcolare la corrente  $I$ , la caduta di tensione nella  $R_1$  e  $R_2$ , la tensione di alimentazione  $V_t$  e la resistenza equivalente  $R_t$ . Calcolare le conduttanze singole e la conduttanza totale, la potenza dissipata in ciascuna resistenza e la potenza totale.



Soluzione

Se la  $R_3$  provoca una caduta di tensione di 120 V vuol dire che è attraversata dalla corrente della serie:

$$I_3 = I_t = \frac{\Delta V_3}{R_3} = \frac{120}{8} = 15 \text{ ampere.}$$

Le cadute di tensione in  $R_1$  e  $R_2$  sono date da:

$$\Delta V_1 = I_t \cdot R_1 = 15 \cdot 4 = 60 \text{ volt,}$$

$$\Delta V_2 = I_t \cdot R_2 = 15 \cdot 6 = 90 \text{ volt.}$$

Noti i valori delle tre cadute di tensione, si calcola la tensione di alimentazione  $V_t$ :

$$V_t = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3 = 60 + 90 + 120 = 270 \text{ volt.}$$

La resistenza equivalente può essere calcolata con la legge di Ohm:

$$R_t = \frac{V_t}{I_t} = \frac{270}{15} = 18 \text{ ohm,}$$

oppure

$$R_t = R_1 + R_2 + R_3 = 4 + 6 + 8 = 18 \text{ ohm.}$$

La conduttanza di ciascuna resistenza è data da:

$$G_1 = \frac{1}{R_1} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ S,}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{6} = 0,16 \text{ S,}$$

$$G_3 = \frac{1}{R_3} = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ S.}$$

La conduttanza equivalente  $G_t$  è pertanto:

$$G_t = \frac{1}{R_t} = \frac{1}{18} \text{ S,}$$

oppure

$$G_t = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_3}} = \frac{1}{\frac{1}{0,25} + \frac{1}{0,16} + \frac{1}{0,125}} = \frac{1}{18} \text{ S.}$$

La potenza dissipata in ciascuna resistenza è:

$$P_1 = \Delta V_1 I = 60 \cdot 15 = 900 \text{ watt,}$$

$$P_2 = \Delta V_2 I = 90 \cdot 15 = 1.350 \text{ watt,}$$

$$P_3 = \Delta V_3 I = 120 \cdot 15 = 1.800 \text{ watt,}$$

oppure

$$P_1 = R_1 I^2 = 4 \cdot 15^2 = 900 \text{ watt},$$

$$P_2 = R_2 I^2 = 6 \cdot 15^2 = 1.350 \text{ watt},$$

$$P_3 = R_3 I^2 = 8 \cdot 15^2 = 1.800 \text{ watt}.$$

La potenza complessiva si può calcolare con

$$P_t = V_t \cdot I_t = 270 \cdot 15 = 4.050 \text{ watt},$$

oppure con

$$P_t = P_1 + P_2 + P_3 = 900 + 1.350 + 1.800 = 4.050 \text{ watt}.$$

### b) Collegamento parallelo

Si ha quando le resistenze sono sottoposte alla medesima tensione (fig. 4.7), e cioè quando:

$$V_t = V_1 = V_2 = V_3. \quad (4.37)$$

La corrente totale  $I_t$  si suddivide nei rami del parallelo con intensità inversamente proporzionali alle rispettive resistenze.

Essendo anche:

$$V_t = R_1 I_1 = R_2 I_2 = R_3 I_3,$$

si ricava:

$$I_1 = \frac{V_t}{R_1} \quad I_2 = \frac{V_t}{R_2} \quad I_3 = \frac{V_t}{R_3}.$$

L'intensità totale di corrente è logicamente la somma aritmetica delle correnti in ciascun ramo del parallelo:

$$I_t = I_1 + I_2 + I_3.$$

(4.38)

La resistenza equivalente  $R_t$  si ricava dalla legge di Ohm:

$$R_t = \frac{V_t}{I_t} = \frac{V_t}{I_1 + I_2 + I_3} = \frac{V_t}{\frac{V_t}{R_1} + \frac{V_t}{R_2} + \frac{V_t}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}.$$

(4.39)

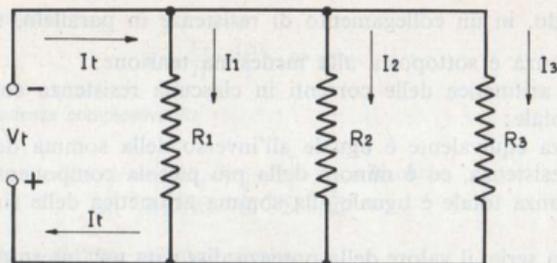


Fig. 4.7 - Resistenze in parallelo.

Pertanto la resistenza equivalente di un gruppo di resistenze in parallelo si trova facendo l'inverso della somma degli inversi delle singole resistenze.

Per due sole resistenze si può anche scrivere:

$$R_t = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad (4.40)$$

Se le resistenze sono tutte uguali tra loro, la resistenza equivalente  $R_t$  è data da:

$$R_t = \frac{R}{p}, \quad (4.41)$$

dove  $p$  è il numero delle resistenze in parallelo.

Dalla (4.39) si ricava il valore della conduttanza equivalente  $G_t$ :

$$G_t = G_1 + G_2 + G_3, \quad (4.42)$$

e nel caso di conduttanze uguali tra loro:

$$G_t = pG.$$

La potenza dissipata in ciascuna resistenza può essere calcolata con una delle seguenti espressioni:

$$P_1 = V_t \cdot I_1 = R_1 \cdot I_1^2 = G_1 \cdot V_t^2 = \frac{V_t^2}{R_1} = \frac{I_1^2}{G_1}.$$

La potenza totale  $P_t$  è data allora da:

$$P_t = V_t \cdot I_t = V_t(I_1 + I_2 + I_3) = V_t \cdot I_1 + V_t \cdot I_2 + V_t \cdot I_3 = P_1 + P_2 + P_3. \quad (4.43)$$

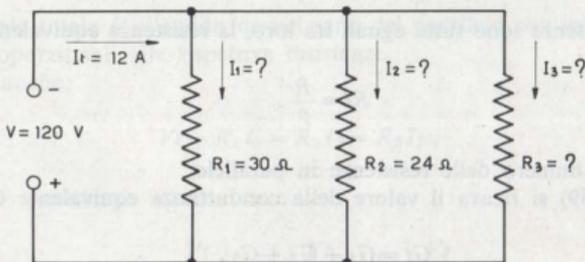
Riassumendo, in un collegamento di resistenze in parallelo, si ha:

- 1) ogni resistenza è sottoposta alla medesima tensione;
- 2) la somma aritmetica delle correnti in ciascuna resistenza coincide con la corrente totale;
- 3) la resistenza equivalente è uguale all'inverso della somma degli inversi di ciascuna resistenza, ed è minore della più piccola componente;
- 4) la conduttanza totale è uguale alla somma aritmetica delle singole conduttanze;
- 5) come per la serie, il valore della potenza dissipata nell'intero circuito è data dalla somma aritmetica delle potenze dissipate in ciascuna resistenza.

#### Esempio numerico

Tre resistenze collegate in parallelo sono alimentate alla tensione di 120 volt e assorbono complessivamente la corrente di 12 ampere.

Sapendo che il valore della  $R_1$  è di 30 ohm e quello della  $R_2$  è di 24 ohm, calcolare il valore della terza resistenza, della corrente in ciascuna resistenza, della resistenza equivalente e della potenza totale dissipata.



#### Soluzione

Calcolo della resistenza equivalente  $R_t$ :

$$R_t = \frac{V_t}{I_t} = \frac{120}{12} = 10\ \text{ohm} .$$

Calcolo delle correnti in ciascuna resistenza:

$$I_1 = \frac{V_t}{R_1} = \frac{120}{30} = 4\ \text{ampere} ,$$

$$I_2 = \frac{V_t}{R_2} = \frac{120}{24} = 5\ \text{ampere} ,$$

$$I_3 = I_t - I_2 - I_1 = 12 - 4 - 5 = 3\ \text{ampere} .$$

Calcolo della resistenza  $R_3$

$$R_3 = \frac{V_t}{I_3} = \frac{120}{3} = 40 \text{ ohm.}$$

Verifica della resistenza complessiva  $R_t$

$$R_t = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{30} + \frac{1}{24} + \frac{1}{40}} = 10 \text{ ohm.}$$

Calcolo della potenza dissipata nell'intero circuito:

$$P_t = V_t \cdot I_t = 120 \cdot 12 = 1.440 \text{ watt,}$$

oppure

$$P_t = P_1 + P_2 + P_3 = 120 \cdot 4 + 120 \cdot 5 + 120 \cdot 3 = 1.440 \text{ watt.}$$

### c) Collegamento misto

I collegamenti misti si risolvono con le leggi della serie e del parallelo. Se il collegamento è formato da gruppi di resistenze in serie disposti in parallelo tra loro (fig. 4.8), la resistenza equivalente viene calcolata risolvendo prima la

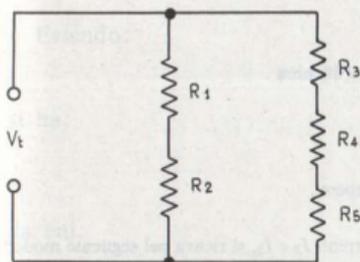


Fig. 4.8 - Collegamento serie parallelo.

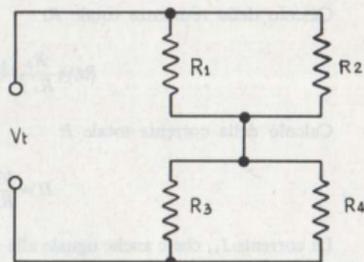


Fig. 4.9 - Collegamento parallelo serie.

serie e poi il parallelo. Se invece il raggruppamento è costituito da gruppi di resistenze in parallelo collegate tra loro in serie (fig. 4.9), prima si risolve il parallelo di ciascun gruppo e poi la serie.

Per collegamenti più complessi, il calcolo va iniziato dai collegamenti più interni, come si procede nel calcolo delle espressioni aritmetiche con parentesi.

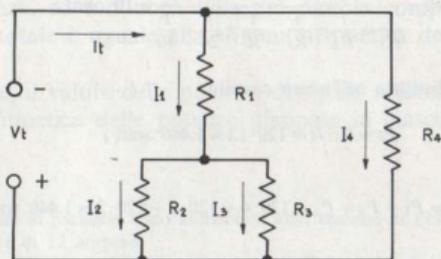
#### Esempio numerico

Un gruppo di resistenze  $R_1, R_2, R_3, R_4$  collegate come in figura e del valore rispettivamente di 36, di 60, di 40 e di 30 ohm, sono alimentate alla tensione di 200 volt. Calcolare la resistenza equivalente  $R_t$ , la corrente totale  $I_t$  e la corrente in ciascuna resistenza.

Soluzione

Calcolo del collegamento più interno e cioè della resistenza complessiva  $R_{23}$ :

$$R_{23} = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} = \frac{60 \cdot 40}{60 + 40} = 24 \text{ ohm} .$$



Calcolo della resistenza complessiva  $R_{123}$

$$R_{123} = R_{23} + R_1 = 24 + 36 = 60 \text{ ohm} .$$

Calcolo della resistenza totale  $R_t$

$$R_t = \frac{R_{123} \cdot R_4}{R_{123} + R_4} = \frac{60 \cdot 30}{60 + 30} = 20 \text{ ohm} .$$

Calcolo della corrente totale  $I_t$

$$I_t = \frac{V_t}{R_t} = \frac{200}{20} = 10 \text{ ampere} .$$

La corrente  $I_1$ , che è anche uguale alla somma delle correnti  $I_2$  e  $I_3$ , si ricava nel seguente modo:

$$I_1 = \frac{V_t}{R_{123}} = \frac{200}{60} = \frac{10}{3} = 3,33 \text{ ampere} .$$

Per calcolare le correnti  $I_2$  e  $I_3$  occorre conoscere la tensione  $V_{23}$

$$V_{23} = R_{23} \cdot I_1 = 24 \cdot \frac{10}{3} = 80 \text{ volt} ,$$

$$I_2 = \frac{V_{23}}{R_2} = \frac{80}{60} = 1,33 \text{ A} , \quad I_3 = \frac{V_{23}}{R_3} = \frac{80}{40} = 2 \text{ A} .$$

L'intensità della corrente  $I_4$  si calcola direttamente:

$$I_4 = \frac{V_t}{R_4} = \frac{200}{30} = 6,66 \text{ ampere} .$$

## 4.9. REGOLATORI OHMICI DI TENSIONE E DI CORRENTE

Nelle applicazioni pratiche necessita sovente di dover alimentare un determinato carico  $R$  con una tensione  $V_u$  di valore inferiore a quello della tensione disponibile  $V$  di un generatore a tensione costante. Si ha anche il caso di dover inserire in un circuito, nel quale fluisce una corrente costante  $I$ , una resistenza  $R$  che invece deve essere percorsa da una corrente  $I_u$  di intensità inferiore a  $I$ .

In entrambi i casi per ridurre la tensione o la corrente al valore desiderato si ricorre a sistemi di regolazione costituiti da combinazioni di resistenze fisse o variabili. Consideriamo i sistemi di uso più comune.

### a) Resistenza addizionale

L'utilizzatore di resistenza  $R$  deve essere alimentato alla tensione  $V_u$  di valore inferiore a quello della tensione costante  $V$  disponibile (fig. 4.10-a).

In tal caso basta porre in serie ad  $R$  una resistenza fissa  $R_a$ , detta *resistenza addizionale*, di valore opportuno. Indichiamo con  $m$  il rapporto tra la tensione disponibile  $V$  e la tensione  $V_u$  che si vuole ottenere agli estremi del carico  $R$ :

$$m = \frac{V}{V_u}.$$

Essendo:

$$V = I(R_a + R) \quad \text{e} \quad V_u = IR,$$

si ha:

$$m = \frac{Ra + R}{R},$$

da cui:

$$Ra = R(m - 1), \tag{4.44}$$

dove  $m$  è il *potere moltiplicatore di tensione* e  $R_a$  il valore della resistenza addizionale da porre in serie al carico  $R$  per ottenere ai capi di quest'ultimo la tensione  $V_u$  desiderata.

### b) Reostato potenziometrico

Qualora necessiti variare una tensione costante  $V$  entro limiti abbastanza ampi, da zero allo stesso valore  $V$ , si ricorre al partitore o divisore ohmico di tensione, costituito da un resistore fisso  $R$  munito di un cursore che può scorrere lungo l'intera resistenza. Tale dispositivo, detto *reostato potenziometrico*, è rappresentato in fig. 4.10-bc.

La tensione disponibile  $V$  da ridurre viene applicata agli estremi AB del resistore, la tensione ridotta  $V_u$  viene ricavata tra un estremo del resistore e il cursore.

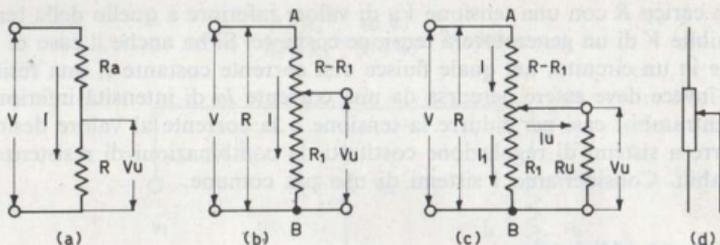


Fig. 4.10 - Resistenza addizionale (a), reostato potenziometrico a vuoto (b), a carico (c) e suo simbolo grafico (d).

A vuoto, ossia senza resistenza di carico (fig. 4.10-b), nel resistore fluisce la corrente  $I = V/R$ . La tensione  $V_u$  da utilizzare è data dalla caduta di tensione provocata dalla frazione  $R_1$  di resistenza inclusa tra il cursore e l'estremo B del resistore.

$$V_u = R_1 I = V \frac{R_1}{R},$$

da cui si deduce che per  $R_1 = 0$  (resistore completamente escluso) si ha  $V_u = 0$  e per  $R_1 = R$  (resistore tutto incluso) si ha  $V_u = V$ .

A carico (fig. 4.10-c), la corrente nel circuito è data da:

$$I = \frac{V}{R - R_1 + \frac{R_1 \cdot R_u}{R_1 + R_u}}, \quad (4.45)$$

e la tensione  $V_u$  da utilizzare è data da:

$$V_u = I \cdot \frac{R_1 \cdot R_u}{R_1 + R_u}.$$

Sostituendo in  $I$  la (4.45) e risolvendo si ottiene:

$$V_u = V \frac{R_1 R_u}{R_1(R - R_1) + R \cdot R_u}. \quad (4.46)$$

Anche in questo caso ponendo  $R_1 = 0$  si ha  $V_u = 0$ , mentre per  $R_1 = R$  si ha  $V_u = V$ .

### c) Resistenza derivata o shunt

Quando una resistenza  $R$ , inserita in un circuito in cui fluisce l'intensità di corrente  $I$ , deve venir percorsa da una corrente d'intensità  $I_1$  inferiore a  $I$ , si pone in derivazione a  $R$  una resistenza  $R_s$  di opportuno valore, detta *resistenza derivata o shunt*.

Indichiamo con  $m$ , detto *potere moltiplicatore di corrente*, il rapporto tra la corrente  $I$  del circuito e la corrente  $I_1$  che deve fluire in  $R$ :

$$m = \frac{I}{I_1}. \quad (4.47)$$

La corrente  $I$  del circuito, giunta al nodo A (fig. 4.11-a) si suddivide in  $I_1$  e  $I_s$  di intensità inversamente proporzionale a  $R$  e  $R_s$ . Per cui si ha:

$$I = I_1 + I_s, \quad I_1 = \frac{V}{R}, \quad \text{e} \quad I_s = \frac{V}{R_s}.$$

Il potere moltiplicatore può essere espresso allora con il rapporto:

$$m = \frac{I_1 + I_s}{I_1} = \frac{\frac{V}{R} + \frac{V}{R_s}}{\frac{V}{R}} = \frac{R_s + R}{R},$$

da cui:

$$R_s = \frac{R}{m - 1}, \quad (4.48)$$

che dà il valore della resistenza da porre in derivazione alla resistenza  $R$  perché in questa fluisca la corrente  $I_1$  di intensità  $m$  volte inferiore a quella della corrente  $I$  del circuito.

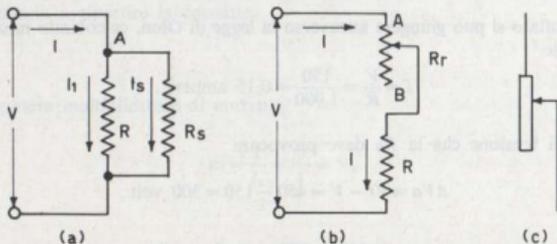


Fig. 4.11 - Resistenza derivata (a), reostato serie (b) e relativo simbolo grafico (c).

#### d) Reostato serie

Volendo ottenere entro certi limiti una variazione dell'intensità di corrente in una resistenza  $R$ , si pone in serie alla stessa  $R$  un reostato, ossia una resistenza variabile, di valore opportuno  $Rr$  (fig. 4.11-*b*).

L'intensità di corrente nel circuito e quindi in  $R$  dipenderà dalla posizione del cursore di  $Rr$ . L'intensità massima  $I_{mx}$  si avrà quando il cursore è in  $A$  (reostato completamente escluso):

$$I_{mx} = \frac{V}{R}.$$

L'intensità minima  $I_m$  si avrà quando il cursore si troverà in  $B$  (reostato completamente incluso).

$$I_m = \frac{V}{R + Rr}.$$

È evidente che i sistemi adottati per variare la corrente in una resistenza provocano anche una variazione della caduta di tensione e quindi della d.d.p. a cui la resistenza stessa si trova sottoposta, così come i sistemi adottati per ottenere la variazione della tensione ai capi di un carico ne variano anche la corrente.

#### Esempi numerici

1) Una resistenza  $R$  di 1.000 ohm deve essere alimentata alla tensione  $V$  di 150 volt, mentre la tensione disponibile  $V_t$  è di 450 volt. Calcolare la resistenza aggiuntiva  $R_a$  necessaria a ripartire la tensione.

#### Soluzione

Si calcola il potere moltiplicatore di tensione

$$m = \frac{V_t}{V} = \frac{450}{150} = 3,$$

per cui

$$R_a = R(m - 1) = 1.000(3 - 1) = 2.000 \text{ ohm}.$$

Allo stesso risultato si può giungere attraverso la legge di Ohm, calcolando innanzi tutto la corrente  $I$  del circuito

$$I = \frac{V}{R} = \frac{150}{1.000} = 0,15 \text{ ampere},$$

e poi la caduta di tensione che la  $R_a$  deve provocare

$$\Delta V_a = V_t - V = 450 - 150 = 300 \text{ volt},$$

per cui

$$R_a = \frac{\Delta V_a}{I} = \frac{300}{0,15} = 2.000 \text{ ohm}.$$

2) Per alimentare un carico avente la resistenza  $R_u$  di 20 ohm alla tensione  $V_u$  di 20 volt, viene utilizzato un reostato potenziometrico sottoposto alla tensione di 100 volt. Sapendo che la resistenza inserita  $R_1$  è di 100 ohm, calcolare la resistenza complessiva  $R$  del potenziometro, le correnti nei rami e la sezione del conduttore del reostato, supponendo che la densità di corrente ammessa è di 2 A/mmq.

*Soluzione*

Dalla (4.46) si ricava la  $R$  totale del potenziometro

$$R = \frac{VR_1 R_u + V_u R_1^2}{V_u R_1 + V_u R_u} = \frac{100 \cdot 100 \cdot 20 + 20 \cdot 100^2}{20 \cdot 100 + 20 \cdot 20} = \frac{500}{3} = 166,6 \text{ ohm}.$$

Allo stesso risultato si perviene calcolando la  $I_1$  che passa in  $R_1$

$$I_1 = \frac{V_u}{R_1} = \frac{20}{100} = 0,2 \text{ ampere}.$$

La frazione  $R - R_1$  del reostato deve provocare una caduta di tensione data da

$$V - V_u = 100 - 20 = 80 \text{ volt},$$

e perciò avrà il valore

$$R - R_1 = \frac{V - V_u}{I_1 + I_u} = \frac{80}{1,2} = \frac{200}{3} \text{ ohm},$$

da cui

$$R = \frac{200}{3} + 100 = \frac{500}{3} = 166,6 \text{ ohm}.$$

La sezione del conduttore del reostato viene calcolata in base alla corrente massima che è quella circolante nel tratto  $R - R_1$

$$s = \frac{I}{\delta} = \frac{1,2}{2} = 0,6 \text{ mmq}.$$

3) Una resistenza  $R$  di 10 ohm deve essere percorsa da una corrente  $I_1$  non superiore ad 1 ampere. Dovendola inserire in un circuito percorso dalla corrente  $I$  di 5 ampere, calcolare la resistenza derivata  $R_s$  necessaria a ripartire la corrente.

*Soluzione*

Si calcola il potere moltiplicatore di corrente

$$m = \frac{I}{I_1} = \frac{5}{1} = 5,$$

per cui

$$R_s = \frac{R}{m-1} = \frac{10}{5-1} = 2,5 \text{ ohm}.$$

Allo stesso risultato si perviene applicando la legge di Ohm. La corrente  $I_s$  che dovrà percorrere la resistenza derivata  $R_s$  è data da

$$I_s = I - I_1 = 5 - 1 = 4 \text{ ampere} .$$

La caduta di tensione provocata da  $R$  è data da

$$V = R \cdot I_1 = 10 \cdot 1 = 10 \text{ volt} ,$$

per cui

$$R_s = \frac{V}{I_s} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ ohm} .$$

#### 4.10. CARATTERISTICA ESTERNA DEI GENERATORI - GENERATORI DI CORRENTE

Un generatore lineare di tensione, agli effetti del funzionamento dei circuiti di cui esso fa parte, è caratterizzato, come già detto, dal valore e dalla polarità della f.e.m.  $E$  di cui esso è sede e dalla sua resistenza interna  $R_o$ , e non certo dalla tensione  $V_m$  disponibile ai suoi morsetti a circuito chiuso.

Infatti:

$$V_m = E - R_o \cdot I ,$$

per cui anche se la  $E$  è costante, altrettanto non può dirsi della  $V_m$ , il cui valore dipende essenzialmente dalla corrente  $I$ , la quale a sua volta dipende, oltre che dalla resistenza interna  $R_o$  del generatore, dalla resistenza  $R_e$  del circuito esterno.

Al variare allora delle condizioni di carico, la tensione  $V_m$  varia secondo la relazione suesposta con legge lineare (supposto che la resistenza interna  $R_o$  non modifichi il suo valore con il variare della temperatura prodotta dalla corrente).

Si dice *caratteristica esterna* del generatore l'andamento della tensione  $V_m$  ai morsetti del generatore al variare della corrente  $I$  di carico, ossia la funzione:

$$V_m = f(I) \quad \text{per} \quad R_o = \text{cost.}$$

Se sulle ordinate di un sistema di assi ortogonali (fig. 4.12) si portano i valori della  $V_m$  e sulle ascisse i rispettivi valori della  $I$ , si ottiene una caratteristica rettilinea, che ha per estremi il punto di ordinata  $E$  corrispondente al caso in cui la resistenza di carico  $R_e$  ha valore infinito (circuito aperto) e la corrente  $I$  è zero, ed il punto di ascissa  $I_{cc}$ , corrispondente al caso in cui la resistenza di carico  $R_e$  è nulla (corto circuito) e la corrente  $I$  ha valore:

$$I_{cc} = \frac{E}{R_o} , \tag{4.49}$$

detta appunto *corrente di corto circuito*.

Un punto  $P$  qualsiasi (per esempio  $P_1$  o  $P_2$  o  $P_3$ ) preso sulla caratteristica tra il punto  $E$  ed il punto  $I_{cc}$ , rappresenta una particolare condizione di funzionamento ed infatti dà il valore della tensione ai morsetti  $V_m$  per una determinata corrente  $I$  erogata dal generatore.

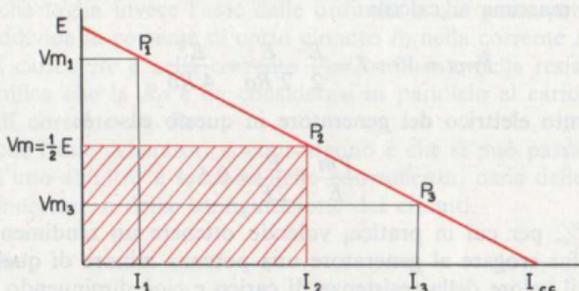


Fig. 4.12 - Caratteristica esterna del generatore elettrico.

Per corrente di valore zero, la  $V_m$  coincide con il valore della  $E$ , per corrente di cortocircuito  $I_{cc}$ , la tensione  $V_m$  ha valore zero.

Il cortocircuito rappresenta perciò la particolare condizione di funzionamento corrispondente ad una resistenza di carico  $R_e$  praticamente nulla, per cui la corrente erogata ha valore  $I_{cc}$  e la tensione ai morsetti  $V_m$  del generatore ha valore zero.

Il rapporto tra la  $V_m$  e la rispettiva  $I$  misura la resistenza  $R_e$  di carico o del circuito esterno.

Il prodotto tra la  $V_m$  e la rispettiva  $I$  rappresenta l'area del rettangolo che ha per lati i tratti di ordinata  $V_m$  e di ascissa  $I$  e misura la potenza erogata  $P_m$  dal generatore in determinate condizioni di carico.

Tra gli infiniti rettangoli ottenibili, uno solo ha la massima area e misura perciò la massima potenza che il generatore può erogare.

Esso corrisponde al tratto di ordinata:

$$V_m = \frac{E}{2} \quad (4.50)$$

Ricordando che  $V_m = R_e \cdot I$  e che  $E = (R_o + R_e) \cdot I$ , sostituendo si ha:

$$R_e \cdot I = \frac{(R_o + R_e) \cdot I}{2},$$

e cioè:

$$R_e = R_o \quad (4.51)$$

Perciò un generatore eroga la massima potenza quando la sua resistenza interna  $R_o$  è uguale alla resistenza  $R_e$  del circuito esterno.

La corrente corrispondente alla potenza massima è:

$$I = \frac{E}{R_o + R_e} = \frac{E}{2 R_o}, \quad (4.52)$$

e la potenza massima si calcola:

$$P_{mx} = V_m \cdot I = \frac{E}{2} \cdot \frac{E}{2 R_o} = \frac{E^2}{4 R_o}. \quad (4.53)$$

Il rendimento elettrico del generatore in questo caso è:

$$\eta_g = \frac{V_m}{E} = \frac{E}{2E} = 0,5,$$

ossia del 50 %, per cui in pratica, volendo ottenere un rendimento maggiore è necessario far erogare al generatore una potenza minore di quella massima, aumentando il valore della resistenza di carico e cioè diminuendo l'erogazione di corrente.

Dalla caratteristica esterna tensione-corrente di fig. 4.12 si deduce che ai parametri  $E$ ,  $R_o$  fin qui usati per caratterizzare un generatore, se ne può aggiungere un terzo definito dalla corrente di corto circuito  $I_{cc}$  che, per un dato generatore, è pure costante perché legata ad  $E$  e a  $R_o$  dalla relazione  $I_{cc} = E/R_o$  e che d'ora in poi indicheremo con  $I_o$ . È ovvio che dei tre parametri  $E$ ,  $I_o$  e  $R_o$  ne sono sufficienti due soli per definire il generatore in quanto il terzo è dipendente dagli altri due.

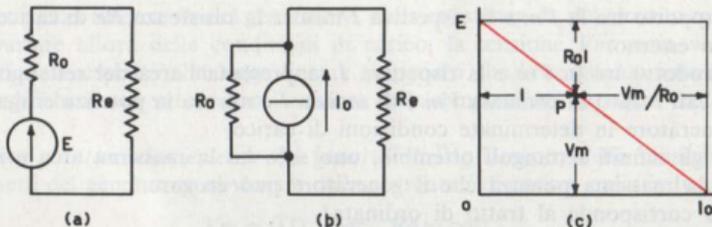


Fig. 4.13 - Generatore reale di tensione  $E$ ,  $R_o$  (a), generatore reale di corrente  $I_o$ ,  $R_o$  (b), punto di lavoro per dimostrare l'equivalenza dei due generatori (c).

Un generatore caratterizzato da  $E$  e  $R_o$  viene chiamato, come detto precedentemente, *generatore di tensione* e viene rappresentato graficamente con il simbolo di fig. 4.13-a, ossia con  $R_o$  in serie al circuito esterno. Un generatore caratterizzato invece da  $I_o$  e  $R_o$  viene chiamato *generatore di corrente* e deve essere rappresentato con il simbolo grafico di fig. 4.13-b, dove la resistenza interna  $R_o$  figura in parallelo al generatore.

Infatti, dal momento che la caratteristica esterna deve essere sempre la stessa perché riferita sempre allo stesso generatore, la retta che taglia l'asse delle ascisse

e che passa per un punto qualsiasi  $P$  interno alla caratteristica (fig. 4.13-c) suddivide la  $E$  nelle due cadute di tensione  $V_m = R_e \cdot I$  e  $V_o = R_o \cdot I$  ed è perciò riferita al generatore di tensione  $E$ ,  $R_o$ , dove  $R_o$  non può essere che in serie con la resistenza esterna  $R_e$ .

La retta che taglia invece l'asse delle ordinate e che passa per il medesimo punto  $P$ , suddivide la corrente di corto circuito  $I_o$  nella corrente  $I$  fluente nella resistenza di carico  $R_e$  e nella corrente  $V_m/R_o$  fluente nella resistenza interna  $R_o$ . Ciò significa che la  $R_o$  è da considerarsi in parallelo al carico e quindi al generatore di corrente  $I_o$ ,  $R_o$ .

È ovvio che i due generatori si equivalgono e che si può passare indifferentemente dall'uno all'altro a seconda della convenienza, ossia delle reali prestazioni del generatore e della configurazione dei circuiti.

### Esempio numerico

Un generatore di tensione di f.e.m.  $E = 4$  volt e di resistenza interna  $R_o = 0,5$  ohm, alimenta un circuito avente la resistenza complessiva  $R_k = 4,5$  ohm. Calcolare la corrente  $I$  del circuito e la tensione ai morsetti  $V_m$  del generatore. Trasformare il generatore di tensione in generatore di corrente e verificare i valori della  $V_m$  e della  $I$ .

### Soluzione

Calcolo della corrente  $I$  nel circuito

$$I = \frac{E}{R_o + R_k} = \frac{4}{0,5 + 4,5} = 0,8 \text{ ampere.}$$

Calcolo della tensione ai morsetti  $V_m$  del generatore

$$V_m = E - R_o \cdot I = 4 - 0,5 \cdot 0,8 = 3,6 \text{ volt.}$$

Calcolo della corrente di corto circuito  $I_o$

$$I_o = \frac{E}{R_o} = \frac{4}{0,5} = 8 \text{ ampere.}$$

Il generatore di tensione ( $E$ ,  $R_o$ ) equivale al generatore di corrente ( $I_o$ ,  $R_o$ ), ma dal momento che  $R_o$  è ora in parallelo a  $R_k$ , la resistenza complessiva del circuito è data da

$$R_t = \frac{R_o \cdot R_k}{R_o + R_k} = \frac{0,5 \cdot 4,5}{0,5 + 4,5} = 0,45 \text{ ohm.}$$

La tensione ai morsetti  $V_m$  del generatore vale perciò

$$V_m = R_t \cdot I_o = 0,45 \cdot 8 = 3,6 \text{ volt,}$$

e la corrente nel carico  $R_k$  viene data da

$$I = \frac{V_m}{R_k} = \frac{3,6}{4,5} = 0,8 \text{ ampere.}$$

#### 4.11. RAGGRUPPAMENTI DI GENERATORI UGUALI

Come la resistenza di carico in un circuito elementare potrebbe essere l'equivalente di più resistenze collegate fra loro in serie o in parallelo o in modo misto, così il generatore di un circuito elementare potrebbe essere il generatore equivalente di più generatori collegati fra loro in serie o in parallelo o in modo misto.

Esaminiamo i collegamenti di generatori uguali fra loro, aventi cioè la stessa f.e.m.  $E$  e la stessa resistenza interna  $R_o$ .

Di ciascun collegamento vogliamo calcolare la f.e.m. e la resistenza interna del generatore equivalente, l'intensità della corrente erogata, la tensione ai morsetti, in funzione della resistenza  $R_e$  del circuito esterno.

##### a) Collegamento serie

I generatori si dicono in serie quando sono collegati uno di seguito all'altro in modo che le f.e.m. siano concordanti (fig. 4.14).

Ad essi può essere sostituito un solo generatore equivalente, avente la f.e.m.  $E_t$  uguale alla somma delle singole f.e.m., o meglio, essendo  $s$  il numero dei generatori in serie, al prodotto:

$$E_t = sE, \quad (4.54)$$

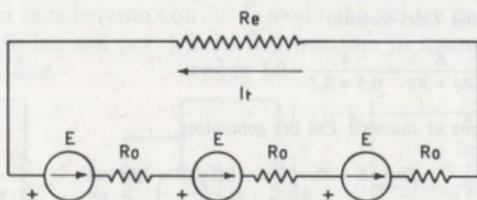


Fig. 4.14 - Generatori collegati in serie.

e di resistenza interna  $R_{ot}$ :

$$R_{ot} = sR_o. \quad (4.55)$$

La corrente  $I$  erogata dal generatore equivalente, e che è uguale in ciascun generatore, viene calcolata con l'espressione:

$$I = \frac{s \cdot E}{s \cdot R_o + R_e}, \quad (4.56)$$

dove  $R_e$  è il valore della resistenza del circuito esterno. Di conseguenza la tensione ai morsetti  $V_m$  di ciascun generatore è:

$$V_m = E - R_o \cdot I,$$

e la tensione totale  $V_{mt}$  è:

$$V_{mt} = s \cdot V_m = s \cdot E - s \cdot R_o \cdot I.$$

Il collegamento serie viene usato quando interessa elevare la tensione rispetto a quella fornita da un solo generatore.

### b) Collegamento parallelo

Più generatori si dicono collegati in parallelo quando sono disposti come in fig. 4.15 e cioè quando le polarità omonime sono collegate fra loro.

Il generatore equivalente ha la f.e.m.  $E_t$  uguale a quella di un solo generatore e cioè:

$$E_t = E, \quad (4.57)$$

mentre la resistenza interna totale  $R_{ot}$  è, come per le resistenze in parallelo,

$$R_{ot} = \frac{R_o}{p}, \quad (4.58)$$

dove  $p$  è il numero dei generatori disposti in parallelo.

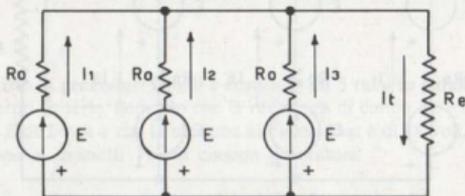


Fig. 4.15 - Generatori collegati in parallelo.

La corrente totale  $I_t$  erogata dal generatore equivalente od assorbita dal circuito esterno, si calcola con l'espressione:

$$I_t = \frac{E}{\frac{R_o}{p} + R_e}. \quad (4.59)$$

La tensione ai morsetti  $V_m$ , che è logicamente la stessa per tutti i generatori, è data da:

$$V_m = E - R_{ot} \cdot I_t,$$

per cui ogni generatore eroga la medesima corrente, perché deve essere per ciascuno:

$$I = \frac{E - V_m}{R_o}.$$

La corrente totale è anche:

$$It = p \cdot I.$$

Il collegamento parallelo viene realizzato quando interessa avere a disposizione una corrente maggiore di quella erogabile da un solo generatore.

### c) Collegamento misto

Si ha quando vengono adottate contemporaneamente le due disposizioni in serie ed in parallelo. Allo scopo però di ottenere un parallelo di generatori uguali, ciascuna serie deve essere costituita da un ugual numero di generatori uguali.

Il collegamento di fig. 4.16 è costituito da  $p$  gruppi in parallelo, ciascuno dei quali è formato da  $s$  generatori collegati in serie.

Il generatore equivalente assume una f.e.m. totale  $Et$ , il cui valore corrisponde a quello di una serie e cioè:

$$Et = s \cdot E.$$

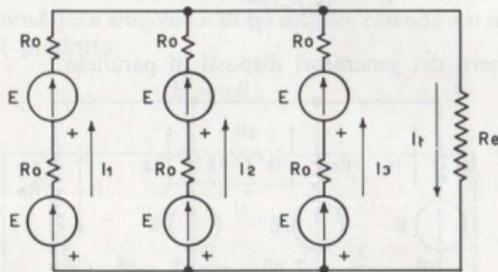


Fig. 4.16 - Generatori in collegamento misto.

La resistenza interna equivalente  $Rot$ , essendo la risultante di  $p$  gruppi di resistenze in parallelo, ciascuno dei quali formato di  $s$  resistenze in serie, è data dall'espressione:

$$Rot = \frac{s \cdot Ro}{p}. \quad (4.60)$$

La corrente totale  $It$  erogata dal generatore equivalente od assorbita dalla resistenza di carico  $Re$ , è:

$$It = \frac{s \cdot E}{\frac{s \cdot Ro}{p} + Re} = \frac{E}{\frac{Ro}{p} + \frac{Re}{s}}. \quad (4.61)$$

La tensione ai morsetti  $Vmt$  del generatore equivalente è:

$$Vmt = s \cdot E - \frac{s \cdot Ro}{p} \cdot It. \quad (4.62)$$

La corrente  $I$  in ciascun ramo del parallelo e quindi in ciascun generatore è data da:

$$I = \frac{I_t}{p}.$$

La tensione ai morsetti  $V_m$  di ciascun generatore è allora:

$$V_m = E - R_o \cdot I \quad \text{oppure} \quad V_m = \frac{V_{mt}}{s}.$$

Il collegamento misto si usa quando si vuole ottenere una corrente maggiore e contemporaneamente una tensione maggiore di quelle fornite da ciascun generatore.

Osserviamo che i generatori uguali tra loro, siano essi collegati in serie o in parallelo o in modo misto (purché in quest'ultimo caso i rami in parallelo siano costituiti da un ugual numero di generatori in serie), quando sono chiusi su un carico esterno, erogano ciascuno una corrente uguale a quella erogata dagli altri, vale a dire che sono tutti *caricati* allo stesso modo.

Non altrettanto può dirsi per i collegamenti di generatori disuguali tra loro, aventi cioè diversa f.e.m. e diversa resistenza interna, di cui tratteremo al prossimo paragrafo.

#### Esempio numerico

Un collegamento misto di generatori uguali è costituito da 5 rami in parallelo, ciascuno dei quali è formato da 10 generatori in serie. Sapendo che la resistenza di carico  $R_e$  è di 9 ohm e che ciascun generatore ha la f.e.m.  $E$  di 2 volt e che la tensione al carico  $V_{mt}$  è di 18 volt, calcolare la resistenza interna  $R_o$  e la tensione ai morsetti  $V_m$  di ciascun generatore.

#### Soluzione

Calcolo della corrente totale erogata  $I_t$

$$I_t = \frac{V_{mt}}{R_e} = \frac{18}{9} = 2 \text{ ampere}.$$

Calcolo della corrente in ciascun ramo del parallelo e quindi in ciascun generatore

$$I = \frac{I_t}{p} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ ampere}.$$

Calcolo della f.e.m.  $E_t$  equivalente

$$E_t = s \cdot E = 10 \cdot 2 = 20 \text{ volt}.$$

Calcolo della resistenza interna  $R_o$  di ciascun generatore

$$R_o = \frac{s \cdot E - V_{mt}}{s \cdot I} = \frac{10 \cdot 2 - 18}{10 \cdot 0,4} = 0,5 \text{ ohm}.$$

La tensione ai morsetti  $V_m$  di ciascun generatore è

$$V_m = \frac{V_{mt}}{s} = \frac{18}{10} = 1,8 \text{ volt ,}$$

oppure

$$V_m = E - R_o \cdot I = 2 - 0,5 \cdot 0,4 = 1,8 \text{ volt .}$$

#### 4.12. RAGGRUPPAMENTO DI GENERATORI DISUGUALI

Prima di iniziare lo studio dei circuiti complessi non riducibili al circuito elementare e per risolvere i quali non è sufficiente applicare la semplice legge di Ohm, vogliamo considerare il collegamento di generatori diversi tra loro, aventi cioè diverse o la loro f.e.m. o la loro resistenza interna od entrambe.

##### a) Collegamento serie

Se i generatori sono concordi nella polarità (fig. 4.17-a), la f.e.m.  $E_t$  del generatore equivalente è data dalla somma aritmetica delle singole f.e.m.:

$$E_t = E_1 + E_2 + E_3 .$$

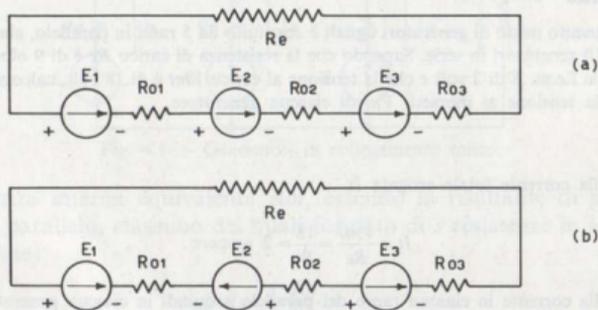


Fig. 4.17 - Collegamento serie di generatori concordi (a) e discordi (b) nella polarità.

Se nella serie esistono generatori discordi nella polarità o in opposizione (fig. 4.17-b), la f.e.m. equivalente  $E_t$  è uguale alla somma algebrica delle singole f.e.m.:

$$E_t = E_1 - E_2 + E_3 ,$$

e avrà il verso o segno delle f.e.m. maggiori.

In entrambi i casi la resistenza interna  $Rot$  del generatore equivalente è data da:

$$Rot = Ro_1 + Ro_2 + Ro_3 .$$

La corrente totale erogata su una resistenza di carico  $Re$  si calcola con la nota espressione:

$$It = \frac{Et}{Rot + Re} .$$

Osserviamo che nel caso di generatori discordi, a seconda che la corrente fluisce in un senso o nell'altro, ossia nel verso della f.e.m. risultante, esistono sempre generatori che anziché erogare corrente l'assorbono come se fossero carichi attivi di resistenza  $Ro$  e di f.c.e.m.  $E$ .

Perciò, nel caso dei generatori concordi di fig. 4.17-*a*, la tensione ai morsetti  $Vm$  di ciascun generatore vale:

$$Vm_1 = E_1 - Ro_1 I ,$$

$$Vm_2 = E_2 - Ro_2 I ,$$

$$Vm_3 = E_3 - Ro_3 I ,$$

e la tensione ai morsetti  $Vmt$  del generatore equivalente è:

$$Vmt = Vm_1 + Vm_2 + Vm_3 ,$$

oppure:

$$Vmt = Et - Rot \cdot I .$$

Nel caso invece dei generatori discordi di fig. 4.17-*b*, si ha:

$$Vm_1 = E_1 - Ro_1 \cdot I \text{ per } E_1 \text{ funzionante da generatore,}$$

$$Vm_2 = E_2 + Ro_2 \cdot I \text{ per } E_2 \text{ funzionante da carico attivo,}$$

$$Vm_3 = E_3 - Ro_3 \cdot I \text{ per } E_3 \text{ funzionante da generatore,}$$

e

$$Vmt = Vm_1 - Vm_2 + Vm_3 ,$$

oppure:

$$Vmt = Et - Rot \cdot I .$$

## b) Collegamento parallelo

Consideriamo due soli generatori di f.e.m.  $E_1$  e  $E_2$  e di resistenza interna  $Ro_1$  e  $Ro_2$  (fig. 4.18).

È evidente che tra i nodi A e B non può sussistere che una sola d.d.p. comune ai due generatori. A circuito aperto (ossia con carico  $Re$  disinserito) i due generatori in parallelo devono produrre la medesima tensione a vuoto  $Vo$ .

Ciò significa che nel circuito comprendente i due generatori deve stabilirsi una corrente, detta *corrente di circolazione*  $I_0$ , che provocando opportune cadute di tensioni interne, porta i due generatori ad avere la medesima  $V_0$ .

Infatti il generatore di f.e.m. maggiore, supponiamo  $E_1$ , eroga una corrente  $I_0$ , che viene assorbita dal generatore di f.e.m. minore  $E_2$ , che pertanto funziona da carico attivo.

Il valore della corrente di circolazione  $I_0$  dipende evidentemente dalla differenza tra le due f.e.m. e dalla somma delle resistenze interne che, per la  $I_0$ , risultano in serie. Si ha cioè:

$$I_0 = \frac{E_1 - E_2}{R_{01} + R_{02}} \quad (4.63)$$

Applicando le espressioni relative al generatore e al carico attivo, si calcola il valore della tensione a vuoto  $V_0$ :

$$V_0 = E_1 - R_{01} \cdot I_0 \quad \text{per il generatore } E_1 \text{ funzionante da generatore,}$$

$$V_0 = E_2 + R_{02} \cdot I_0 \quad \text{per il generatore } E_2 \text{ funzionante da carico.}$$

La tensione  $V_0$  ha sempre un valore compreso tra quello della  $E_1$  e quello della  $E_2$ .

Il generatore equivalente ha quindi una f.e.m. uguale alla  $V_0$  e una resistenza interna equivalente  $R_{0t}$ :

$$R_{0t} = \frac{R_{01} \cdot R_{02}}{R_{01} + R_{02}}$$

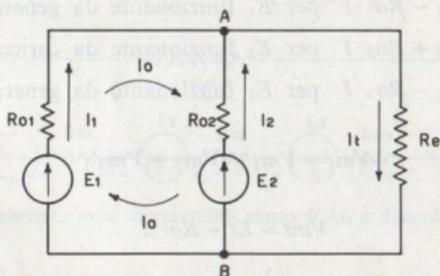


Fig. 4.18 - Generatori in parallelo aventi diversa  $E$  e diversa  $R_0$ .

La corrente totale  $I_t$  erogata dal generatore equivalente ed assorbita dal carico  $R_e$ , è allora:

$$I_t = \frac{V_0}{R_{0t} + R_e}$$

La tensione ai morsetti  $V_m$  dei generatori sotto carico è data da:

$$V_m = V_0 - R_0 \cdot I_t.$$

La corrente effettivamente erogata da ciascun generatore, o, come si suole dire, *la distribuzione del carico* tra i due generatori, si calcola con le seguenti espressioni:

$$I_1 = \frac{E_1 - V_m}{R_{o1}}, \quad I_2 = \frac{E_2 - V_m}{R_{o2}}.$$

La corrente  $I_2$ , a seconda del valore della resistenza di carico  $R_e$ , e cioè dell'intensità della corrente totale  $I_t$ , può risultare positiva oppure negativa e cioè erogata oppure assorbita dal generatore  $E_2$ , in quanto potrebbe essere  $V_m$  maggiore di  $E_2$ .

Si può anche considerare che la corrente totale  $I_t$  si divide nei due generatori in parti inversamente proporzionali alle rispettive resistenze interne, aumentate o diminuite del valore della corrente di circolazione  $I_0$ .

Indicando con  $I'$  e con  $I''$  le correnti inversamente proporzionali alle resistenze interne  $R_{o1}$  e  $R_{o2}$ , si ha:

$$I' : I'' = R_{o2} : R_{o1},$$

essendo anche  $I' + I'' = I_t$ , si ricavano i valori  $I'$  e  $I''$  applicando alla proporzione la proprietà del comporre, per cui:

$$I' = \frac{I_t \cdot R_{o2}}{R_{o1} + R_{o2}}, \quad I'' = \frac{I_t \cdot R_{o1}}{R_{o1} + R_{o2}}. \quad (4.63)$$

Il generatore  $E_1$  eroga però anche la corrente di circolazione  $I_0$ , mentre il generatore  $E_2$  l'assorbe. Le correnti effettivamente esistenti nei due generatori sotto carico, valgono allora:

$$I_1 = I' + I_0 \quad I_2 = I'' - I_0. \quad (4.64)$$

Nel secondo generatore la corrente  $I_2$  è erogata se  $I''$  è maggiore di  $I_0$ , è invece assorbita se  $I''$  è minore di  $I_0$ .

Vedremo al prossimo paragrafo che il problema della distribuzione del carico tra generatori in parallelo può essere risolto più brevemente applicando altri principi risolutivi più generali della semplice legge di Ohm particolarmente adatti al calcolo di circuiti più complessi di quelli finora considerati.

#### Esempio numerico

Due generatori in parallelo aventi rispettivamente la f.e.m.  $E_1 = 10$  V e  $E_2 = 15$  V e la resistenza interna  $R_{o1} = 0,4$  ohm e  $R_{o2} = 0,6$  ohm, alimentano un utilizzatore passivo. Calcolare la distribuzione del carico nei due casi in cui la resistenza dell'utilizzatore è di 3,76 ohm e di 0,76 ohm. Calcolare inoltre la resistenza di carico per la quale il generatore  $E_1$  né eroga né assorbe corrente.

Soluzione

Calcolo della corrente di circolazione a vuoto  $I_0$

$$I_0 = \frac{E_2 - E_1}{R_{o1} + R_{o2}} = \frac{15 - 10}{0,4 + 0,6} = 5 \text{ ampere .}$$

Calcolo della tensione a vuoto  $V_0$  del generatore equivalente

$$V_0 = E_2 - R_{o2} \cdot I_0 = 15 - 0,6 \cdot 5 = 12 \text{ V ,} \quad (\text{per } E_2 \text{ funzionante da generatore})$$

oppure

$$V_0 = E_1 + R_{o1} \cdot I_0 = 10 + 0,4 \cdot 5 = 12 \text{ V .} \quad (\text{per } E_1 \text{ funzionante da carico})$$

Calcolo della resistenza interna  $R_{ot}$  del generatore equivalente

$$R_{ot} = \frac{R_{o1} \cdot R_{o2}}{R_{o1} + R_{o2}} = \frac{0,4 \cdot 0,6}{0,4 + 0,6} = 0,24 \text{ ohm .}$$

La corrente assorbita dal carico di 3,76 ohm è data da

$$I = \frac{V_0}{R_{ot} + R_k} = \frac{12}{0,24 + 3,76} = 3 \text{ ampere ,}$$

per cui la tensione  $V_m$  ai morsetti del generatore equivalente vale:

$$V_m = V_0 - R_{ot} \cdot I = 12 - 0,24 \cdot 3 = 11,28 \text{ volt .}$$

La distribuzione del carico fra i due generatori si calcola con:

$$I_1 = \frac{E_1 - V_m}{R_{o1}} = \frac{10 - 11,28}{0,4} = -3,2 \text{ ampere ,}$$

$$I_2 = \frac{E_2 - V_m}{R_{o2}} = \frac{15 - 11,28}{0,6} = +6,2 \text{ ampere ,}$$

da cui si deduce che il generatore  $E_1$  funziona da carico attivo e che perciò il generatore  $E_2$  deve erogare sia la corrente richiesta dal carico che quella assorbita da  $E_1$ .

Se la resistenza del carico è di 0,76 ohm, la corrente erogata dal generatore equivalente è data da:

$$I = \frac{V_0}{R_{ot} + R_k} = \frac{12}{0,24 + 0,76} = 12 \text{ ampere ,}$$

e la tensione  $V_m$  ai morsetti del generatore equivalente vale:

$$V_m = V_0 - R_{ot} \cdot I = 12 - 0,24 \cdot 12 = 9,12 \text{ volt .}$$

La distribuzione del carico risulta perciò:

$$I_1 = \frac{E_1 - V_m}{R_{o1}} = \frac{10 - 9,12}{0,4} = 2,2 \text{ ampere ,}$$

$$I_2 = \frac{E_2 - V_m}{R_{O2}} = \frac{15 - 9,12}{0,6} = 9,8 \text{ ampere,}$$

da cui si deduce che entrambi i generatori erogano corrente verso il carico e che perciò funzionano da generatori.

Affinché il generatore  $E_1$  non eroghi né assorba corrente deve essere

$$V_m = E_1 = 10 \text{ volt.}$$

La corrente assorbita dal carico viene allora fornita per intero dal generatore  $E_2$ :

$$I_2 = \frac{E_2 - V_m}{R_{O2}} = \frac{15 - 10}{0,6} = \frac{25}{3} \text{ ampere,}$$

per cui la resistenza di carico deve assumere il valore:

$$R_k = \frac{V_m}{I_2} = \frac{10}{\frac{25}{3}} = 1,2 \text{ ohm.}$$

#### 4.13. CIRCUITI ELETTRICI GENERALI - PRINCIPI RISOLUTIVI

Un circuito elettrico costituito da un insieme di generatori, di carichi passivi e di eventuali carichi attivi, collegati in modo da formare poligoni aventi uno o più lati in comune, viene denominato *circuito elettrico generale* o *rete elettrica*.

Generalmente di tale circuito sono note le f.e.m. e le resistenze interne dei generatori, le resistenze dei collegamenti e degli utilizzatori e si vogliono calcolare le correnti circolanti nei vari rami ed eventualmente le tensioni ai capi di taluni elementi circuitali attivi o passivi.

Quando un circuito generale o rete non è riducibile con le leggi della serie e del parallelo ad un circuito elementare per risolvere il quale è sufficiente la semplice legge di Ohm, esso deve essere calcolato con l'applicazione di altri principi risolutivi più generali della legge di Ohm.

Sarebbero sufficienti in ogni caso i principi di Kirchhoff, tuttavia per risolvere circuiti particolari o per arrivare a soluzioni parziali (a volte necessita conoscere solo la corrente di un ramo) sono più indicati altri principi, quali quelli di Thevenin, di Norton, di Millman e di sovrapposizione degli effetti.

##### a) Principi di Kirchhoff

Consideriamo il circuito di fig. 4.19. Esso non è riducibile al circuito elementare per la presenza della resistenza  $R_4$  che non è né in serie né in parallelo ai generatori, ma collegata a ponte. Perciò, noti i parametri dei due generatori  $E_1$ ,  $R_{O1}$  e  $E_2$ ,  $R_{O2}$  e i valori delle resistenze  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ , per calcolare l'in-

tensità delle correnti circolanti in ciascun ramo non è sufficiente ricorrere alla semplice legge di Ohm, ma è necessario applicare i principi di Kirchhoff.

Occorre anzitutto dare alcune definizioni:

- si chiama *nodo* di una rete un punto qualsiasi di collegamento in cui concorrono almeno tre conduttori (A, B, C, D sono nodi);
- si chiama *lato* o *ramo* di una rete ogni tratto di circuito compreso tra due nodi (AB, BC, ecc. sono lati);
- si chiama *maglia* di una rete qualunque circuito chiuso che comprende almeno tre lati.

I principi di Kirchhoff riguardano i nodi e le maglie:

- il primo principio o dei nodi dice: *in un nodo la somma aritmetica delle correnti affluenti è uguale alla somma aritmetica delle correnti defluenti.*

Con riferimento alla fig. 4.19 si può allora scrivere:

$$\text{per il nodo A } I_2 = I_4 + I_5,$$

$$\text{per il nodo B } I_1 = I_5 + I_6,$$

il che significa che la sommatoria  $\sum I$ , o somma algebrica, delle correnti in un nodo è uguale a zero:

$$\sum I = 0, \quad (4.63)$$

questo principio è intuitivo.

- il secondo principio o delle maglie dice: *in una maglia la somma algebrica o sommatoria  $\sum$  delle f.e.m. E è uguale alla somma algebrica o sommatoria  $\sum$  delle cadute di tensione RI.*

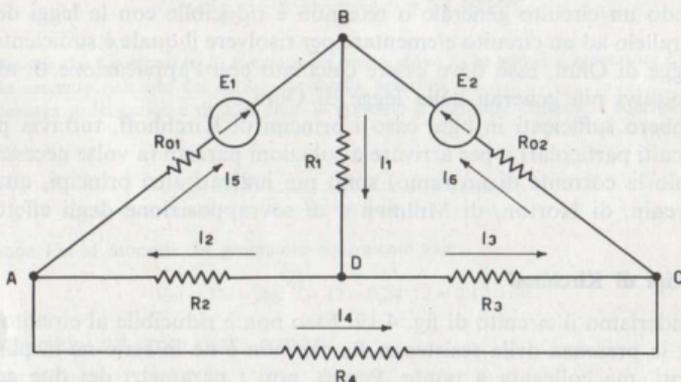


Fig. 4.19 - Esempio di circuito elettrico generale o rete elettrica.

Consideriamo, del circuito di fig. 4.19, la maglia ABCA. In essa figurano due generatori  $E_1$  e  $E_2$  e quattro resistenze  $R_{01}$ ,  $R_{02}$ ,  $R_3$  e  $R_2$ .

Per poter scrivere l'equazione della maglia occorre anzitutto stabilire:

- il verso delle f.e.m. (normalmente è lo stesso verso della corrente erogata, ossia dal + al -);
- un verso arbitrario della corrente di ciascun lato;
- il senso di raccoglimento dei termini dell'equazione.

Nella maglia considerata la f.e.m.  $E_1$  è diretta dal nodo A al nodo B e la f.e.m.  $E_2$  dal nodo C al nodo B. Il verso delle correnti è scelto arbitrariamente:  $I_5$  dal nodo A al nodo B,  $I_6$  dal nodo C al nodo B,  $I_2$  dal nodo D al nodo A, e  $I_3$  dal nodo D al nodo C.

Se il raccoglimento dei termini dell'uguaglianza avviene da destra a sinistra, diremo positive le f.e.m. e le cadute di tensione dirette da destra a sinistra, e negative (f.c.e.m.) quelle dirette da sinistra a destra. Potremo così scrivere:

$$E_1 - E_2 = R_{01} \cdot I_5 - R_{02} \cdot I_6 - R_3 \cdot I_3 + R_2 \cdot I_2,$$

oppure:

$$\sum E = \sum RI. \quad (4.64)$$

Applicando al circuito di fig. 4.19 i due principi di Kirchhoff, è possibile ricavare i valori delle correnti in ciascun lato, noti i valori delle resistenze e delle f.e.m.

Poiché le incognite sono sei, dovremo impostare un sistema di sei equazioni scelte fra le nove equazioni possibili (5 per le maglie e 4 per i nodi):

$$E_1 = R_1 I_1 + R_2 I_2 + R_{01} I_5 \quad \text{per la maglia ABDA,}$$

$$E_2 = R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_{02} I_6 \quad \text{per la maglia BCDB,}$$

$$E_1 - E_2 = R_{01} I_5 - R_{02} I_6 - R_3 I_3 + R_2 I_2 \quad \text{per la maglia ABCA,}$$

$$0 = R_3 I_3 - R_4 I_4 - R_2 I_2 \quad \text{per la maglia ADCA,}$$

$$I_2 = I_4 + I_5 \quad \text{per il nodo A,}$$

$$I_6 = I_3 + I_4 \quad \text{per il nodo C,}$$

da cui si ricava il valore di  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$ . Se il valore ottenuto è di segno positivo, significa che la corrente circola nel senso stabilito, se invece è negativo, la corrente circola in senso opposto, per cui basta invertirla.

I generatori compresi in una maglia possono risultare percorsi da corrente nel senso della loro f.e.m., oppure in senso opposto. Nel primo caso funzionano da generatori, nel secondo caso funzionano da carichi attivi perché assorbono corrente anziché erogarla.

## b) Principio di Millman

Il principio di Millman può essere così enunciato: *quando in una rete, comunque complessa, è possibile individuare due nodi rispetto ai quali tutti i rami della rete si trovano in parallelo, la d.d.p. fra tali nodi a ramo aperto, è data dal rapporto tra la somma delle correnti che ciascun generatore erogherebbe sulle resistenze appartenenti al ramo in cui è inserito e la somma delle conduttanze di tutti i rami (escluso quello aperto compreso tra i nodi in questione).*

Consideriamo il circuito di fig. 4.20-a. La resistenza  $R_4$ , compresa tra i nodi A e B si trova in parallelo con tre rami, dei quali due comprendenti un generatore reale e una resistenza e il terzo una sola resistenza. Perciò la stessa rete può essere schematizzata come in fig. 4.20-b.

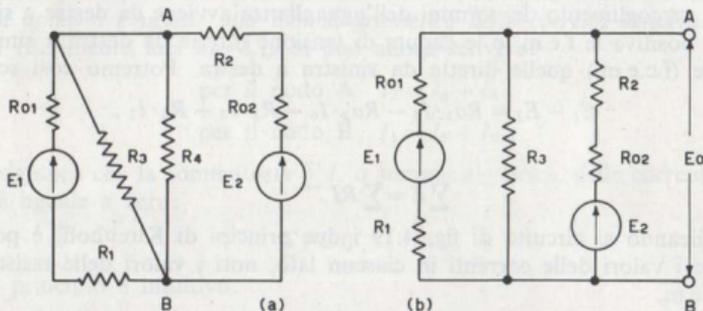


Fig. 4.20 - La rete rappresentata in (a) è costituita, rispetto ai nodi AB, da soli rami in parallelo (b).

La f.e.m.  $E_0$ , tra i due nodi A e B, è allora immediatamente individuata dalla relazione:

$$E_0 = \frac{\frac{E_1}{R_{01} + R_1} + \frac{E_2}{R_{02} + R_2}}{\frac{1}{R_{01} + R_1} + \frac{1}{R_{02} + R_2} + \frac{1}{R_3}} \quad (4.65)$$

Questo principio risolutivo è molto più semplice dei principi di Kirchhoff, ma è condizionato all'ipotesi che il circuito possa essere visto come un insieme di rami in parallelo tra loro rispetto ai due nodi considerati. Tuttavia esso trova applicazione nella maggior parte dei circuiti elettronici.

## c) Principio di Thevenin

Il principio di Thevenin dice: *una rete comunque complessa, contenente generatori e resistenze, può essere schematizzata, rispetto a due nodi, come un unico generatore reale equivalente di tensione  $E_0$ ,  $R_0$  visto tra i medesimi nodi.*

La stessa rete di fig. 4.20-*b*, riportata in fig. 4.21-*a*, può essere rappresentata rispetto ai nodi A e B dal generatore di tensione  $E_o$ ,  $R_o$  di fig. 4.21-*b*.

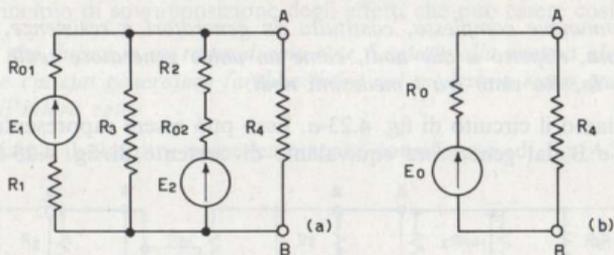


Fig. 4.21 - La rete rappresentata in (a) può essere sostituita, rispetto ai nodi AB, da un generatore reale di tensione  $E_o$ ,  $R_o$  (b).

La f.e.m.  $E_o$  del generatore equivalente è la d.d.p. che si vede tra i morsetti A e B considerati aperti (fig. 4.22-*a*).

Nel caso in esame tale f.e.m. può venir calcolata con il principio di Millman; nei casi in cui la rete non è riducibile a tutti rami in parallelo viene calcolata con i principi di Kirchhoff.

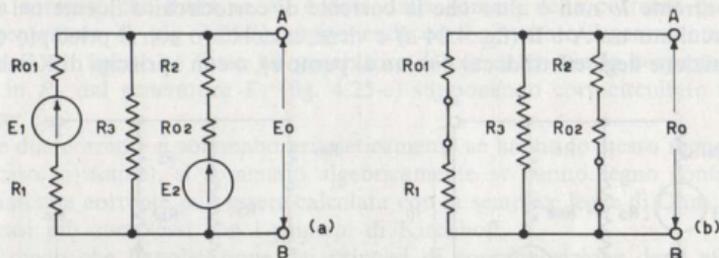


Fig. 4.22 - Circuito per il calcolo della  $E_o$  (a) e per il calcolo della  $R_o$  (b) secondo Thevenin, della rete di fig. 4.21-*a*.

La resistenza  $R_o$  del generatore equivalente (fig. 4.21-*b*) corrisponde alla resistenza che si vede tra i morsetti A e B considerati aperti (fig. 4.22-*b*), quando nella rete vengono cortocircuitati i generatori ideali di tensione (o aperti i generatori ideali di corrente). Per calcolare  $R_o$  si ricorre alle leggi della serie-parallelo, oppure ai principi di Kirchhoff.

Il principio di Thevenin viene applicato quando interessa conoscere, di una data rete, la corrente o la tensione di un solo ramo.

#### d) Principio di Norton

Il principio di Norton è equivalente al principio di Thevenin. Esso dice: *una rete comunque complessa, costituita da generatori e resistenze, può essere schematizzata, rispetto a due nodi, come un unico generatore reale equivalente di corrente  $I_0$ ,  $R_0$  visto tra i medesimi nodi.*

Riprendiamo il circuito di fig. 4.23-a. Esso può essere rappresentato rispetto ai nodi A e B dal generatore equivalente di corrente di fig. 4.23-b.

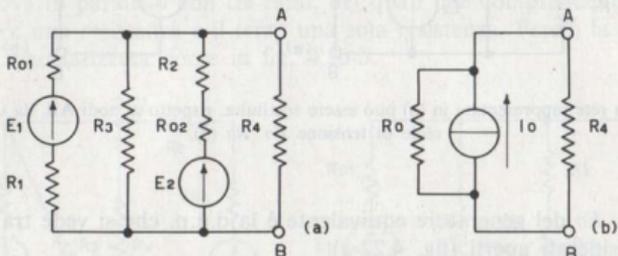


Fig. 4.23 - La rete rappresentata in (a) può essere sostituita, rispetto ai nodi AB, da un generatore di corrente  $I_0$ ,  $R_0$  (b).

La corrente  $I_0$  non è altro che la corrente di cortocircuito fluente nel ramo cortocircuitato tra A e B (fig. 4.24-a) e viene calcolata o con il principio di sovrapposizione degli effetti di cui diremo al punto e), o con i principi di Kirchhoff.

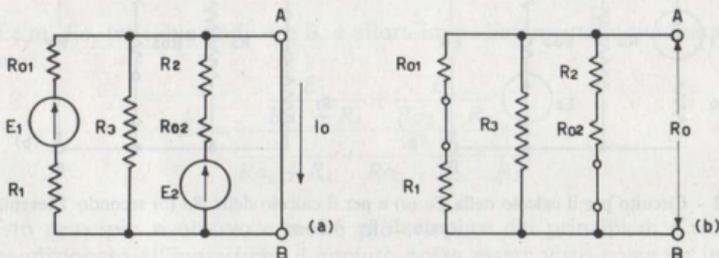


Fig. 4.24 - Circuito per il calcolo della  $I_0$  (a) e per il calcolo della  $R_0$  (b), secondo Norton, della rete di fig. 4.23-a.

La resistenza  $R_0$  ha lo stesso significato dato al punto precedente e viene calcolata allo stesso modo, ossia secondo il circuito di fig. 4.24-b.

Anche il principio di Norton, come quella di Thevenin viene applicato quando si vuole conoscere, di una determinata rete, la corrente o la tensione di un solo ramo.

### e) Principio di sovrapposizione degli effetti

Per calcolare la corrente fluente in un ramo di una rete può essere applicato anche il principio di sovrapposizione degli effetti che può essere così enunciato:

*la corrente che fluisce in un ramo di una rete è uguale alla somma algebrica delle correnti che ciascun generatore farebbe fluire nel medesimo ramo qualora agisse da solo nell'intera rete.*

Riprendiamo il circuito, precedentemente considerato, di fig. 4.25-a.

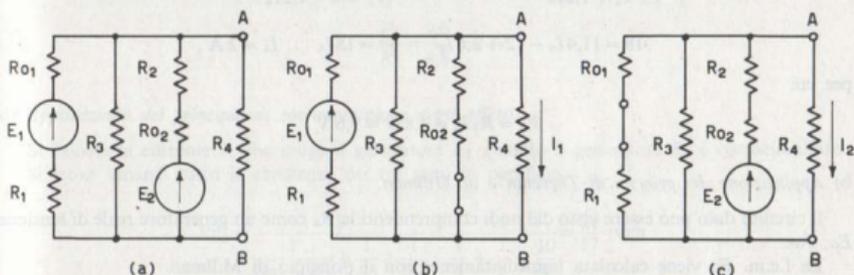


Fig. 4.25 - I circuiti in (b) e in (c) risolvono, per sovrapposizione degli effetti, la corrente nel ramo AB della rete rappresentata in (a).

La corrente che fluirà in  $R_4$  è data dalla somma della corrente provocata dal generatore  $E_1$  (fig. 4.25-b), supponendo cortocircuitato il generatore di tensione  $E_2$  (o aperto se fosse un generatore di corrente) con la corrente provocata in  $R_4$  dal generatore  $E_2$  (fig. 4.25-c) supponendo cortocircuitato il generatore  $E_1$ .

Le due correnti si sommano aritmeticamente se hanno lo stesso segno (come nel caso in esame), si sommano algebricamente se hanno segno contrario.

Ciascuna corrente può essere calcolata con la semplice legge di Ohm, oppure nei casi più complessi con i principi di Kirchhoff.

È ovvio che l'applicazione dei principi di sovrapposizione degli effetti, di Millman, di Thevenin e di Norton, conviene per semplici circuiti come quello considerato, in cui è superfluo l'uso dei principi di Kirchhoff.

#### Esempio numerico

Allo scopo di risolvere un circuito mediante tutti i principi esposti nel presente paragrafo e verificare la perfetta identità dei risultati, consideriamo ancora il circuito di fig. 4.25-a.

Sapendo che il generatore del primo ramo ha la f.e.m.  $E_1 = 18$  volt e la resistenza interna  $R_{01} = 0,4$  ohm, che il secondo generatore ha la f.e.m.  $E_2 = 16$  volt e la resistenza interna  $R_{02} = 0,6$  ohm e che  $R_1 = 2,6$  ohm,  $R_2 = 3,4$  ohm,  $R_3 = 4$  ohm e  $R_4 = 4,8$  ohm, calcolare la corrente in  $R_4$ .

#### Soluzione

a) Applicazione dei principi di Kirchhoff.

Si imposta il sistema:

$$\begin{cases} E_1 = I_1(R_{O1} + R_1) + I_4 R_4 \\ E_2 = I_2(R_{O2} + R_2) + I_4 R_4 \\ 0 = R_3 I_3 - R_4 I_4 \\ I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \end{cases} \equiv \begin{cases} 18 = (0,4 + 2,6)I_1 + 4,8I_4 \\ 16 = (0,6 + 3,4)I_2 + 4,8I_4 \\ 0 = 4I_3 - 4,8I_4 \\ I_1 + I_2 = I_3 + I_4 \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} 18 = 3I_3 + 3I_4 - 3I_2 + 4,8I_4 \\ 4 = I_2 + 1,2I_4 \end{cases} \equiv \begin{cases} 18 = 3,6I_4 + 7,8I_4 - 3I_2 \\ I_2 = 4 - 1,2I_4 \end{cases}$$

$$18 = 11,4I_4 - 12 + 3,6I_4 \quad 30 = 15I_4 \quad I_4 = 2 \text{ A},$$

per cui

$$V_4 = R_4 I_4 = 4,8 \cdot 2 = 9,6 \text{ V}.$$

b) *Applicazione dei principi di Thevenin e di Millman.*

Il circuito dato può essere visto dai nodi comprendenti la  $R_4$  come un generatore reale di tensione  $E_o$ ,  $R_o$ .

La f.e.m.  $E_o$  viene calcolata immediatamente con il principio di Millman.

$$E_o = \frac{\frac{E_1}{R_{O1} + R_1} + \frac{E_2}{R_{O2} + R_2}}{\frac{1}{R_{O1} + R_1} + \frac{1}{R_{O2} + R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{18}{3} + \frac{16}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 12 \text{ V}.$$

La resistenza interna  $R_o$  viene calcolata, secondo Thevenin:

$$R_o = \frac{1}{\frac{1}{R_{O1} + R_1} + \frac{1}{R_{O2} + R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = 1,2 \text{ ohm},$$

l'intensità della corrente in  $R_4$  è data da

$$I_4 = \frac{E_o}{R_o + R_4} = \frac{12}{1,2 + 4,8} = 2 \text{ A}.$$

c) *Applicazione del principio di Norton.*

Il circuito dato può essere visto dai nodi comprendenti  $R_4$  come un generatore reale di corrente  $I_o$ ,  $R_o$ .

La corrente di corto circuito  $I_o$  viene calcolata, secondo Norton, cortocircuitando  $R_4$  (per cui anche  $R_3$  risulta cortocircuitata).

$$I_o = \frac{E_1}{R_{O1} + R_1} + \frac{E_2}{R_{O2} + R_2} = \frac{18}{3} + \frac{16}{4} = 10 \text{ A}.$$

La resistenza  $R_o$  ha lo stesso significato dato da Thevenin e perciò vale ancora 1,2 ohm.

Si calcola la resistenza complessiva del circuito:

$$R_t = \frac{R_0 \cdot R_4}{R_0 + R_4} = \frac{1,2 \cdot 4,8}{1,2 + 4,8} = 0,96 \text{ ohm}.$$

Si calcola la tensione  $V_4$  tra i nodi A e B:

$$V_4 = R_t \cdot I_0 = 0,96 \cdot 10 = 9,6 \text{ V}.$$

Si calcola infine la corrente nella resistenza  $R_4$ :

$$I_4 = \frac{V_4}{R_4} = \frac{9,6}{4,8} = 2 \text{ A}.$$

d) *Applicazione del principio di sovrapposizione degli effetti.*

Si calcola la corrente  $I_1$  che eroga il generatore  $E_1$  quando il generatore  $E_2$  è cortocircuitato. Si trova innanzi tutto la resistenza dei tre rami in parallelo:

$$R_{p1} = \frac{1}{\frac{1}{R_{02} + R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}} = \frac{24}{17} \text{ ohm}.$$

Si calcola poi la corrente  $I_1$  erogata dal generatore  $E_1$ :

$$I_1 = \frac{E_1}{R_{01} + R_1 + R_{p1}} = \frac{18}{0,4 + 2,6 + \frac{24}{17}} = \frac{102}{25} \text{ A}.$$

La tensione  $V_{p1}$  che agisce su  $R_4$  è data da:

$$V_{p1} = E_1 - (R_{01} + R_1)I_1 = 18 - 3 \frac{102}{25} = \frac{144}{25} \text{ V},$$

e la corrente che fluisce in  $R_4$  vale perciò:

$$I_4' = \frac{V_{p1}}{R_4} = \frac{144}{25 \cdot 4,8} = \frac{6}{5} \text{ A}.$$

Si calcola la corrente  $I_2$  che eroga il generatore  $E_2$  quando il generatore  $E_1$  è cortocircuitato. La resistenza dei tre rami in parallelo è data da:

$$R_{p2} = \frac{1}{\frac{1}{R_{01} + R_1} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10}} = \frac{24}{19} \text{ ohm}.$$

La corrente  $I_2$  erogata dal generatore  $E_2$  è data da:

$$I_2 = \frac{E_2}{R_{02} + R_2 + R_{p2}} = \frac{16}{0,6 + 3,4 + \frac{24}{19}} = \frac{76}{25} \text{ A}.$$

La tensione  $V_{p2}$  che agisce su  $R_4$  vale:

$$V_{p2} = E_2 - (R_{o2} + R_2)I_2 = 16 - 4 \frac{96}{25} = \frac{96}{25} \text{ V},$$

e la corrente che fluisce in  $R_4$  è perciò:

$$I_4'' = \frac{V_{p2}}{R_4} = \frac{96}{25 \cdot 4,8} = \frac{4}{5} \text{ A},$$

la corrente totale che percorre la  $R_4$  è data dalla somma delle due correnti parziali, ossia:

$$I_4 = I_4 + I_4'' = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2 \text{ A}.$$

#### 4.14. ESERCIZI DA RISOLVERE

1. In un circuito elementare, il generatore, avente la f.e.m. di 100 V e la resistenza interna di 0,64 ohm, alimenta un carico di 9 ohm. Quale resistenza dovrà avere la linea di collegamento perché la sua caduta di tensione risulti il 4% della tensione di carico? Quale corrente fluisce nel circuito? (R.  $I = 10 \text{ A}$ ;  $R_L = 0,36 \text{ ohm}$ ).
2. Un generatore elettrico avente la resistenza interna di 0,5 ohm, alimenta un carico di 50 ohm alla tensione di 100 V. Sapendo che la caduta di tensione di linea è di 2 V, calcolare la resistenza di linea e la f.e.m. del generatore (R.  $R_L = 1 \text{ ohm}$ ;  $E = 103 \text{ V}$ ).
3. Un generatore avente la f.e.m. di 10 V e la resistenza interna di 2 ohm eroga la sua massima potenza. Calcolare tale massima potenza, le potenze e le tensioni ai morsetti del generatore quando la resistenza esterna è di 0,5 ohm e di 3 ohm. Calcolare inoltre la corrente di cortocircuito. (R.  $P_{mx} = 12,5 \text{ W}$ ;  $P_1 = 8 \text{ W}$ ;  $V_{m1} = 2 \text{ V}$ ;  $P_2 = 12 \text{ W}$ ;  $V_{m2} = 6 \text{ V}$ ;  $I_{cc} = 5 \text{ A}$ ).
4. Una resistenza  $R_1 = 2,6 \text{ ohm}$  è collegata in serie con due resistenze in parallelo  $R_2 = 6 \text{ ohm}$  e  $R_3 = 4 \text{ ohm}$ . Il gruppo è collegato in parallelo con una resistenza  $R_4 = 5 \text{ ohm}$ . Sapendo che  $R_1$  è percorsa dalla corrente  $I_1 = 5 \text{ A}$ , calcolare la caduta di tensione, la corrente e la potenza dissipata di ciascuna resistenza, la tensione, la corrente e la potenza totali. (R.  $\Delta V_1 = 13 \text{ V}$ ;  $\Delta V_{23} = 12 \text{ V}$ ;  $I_2 = 2 \text{ A}$ ;  $I_3 = 3 \text{ A}$ ;  $V_t = 25 \text{ V}$ ;  $I_4 = 5 \text{ A}$ ;  $I_t = 10 \text{ A}$ ;  $P_1 = 65 \text{ W}$ ;  $P_2 = 24 \text{ W}$ ;  $P_3 = 36 \text{ W}$ ;  $P_4 = 125 \text{ W}$ ;  $P_t = 250 \text{ W}$ ).
5. Due resistenze in serie  $R_1 = 4 \text{ ohm}$  e  $R_2 = 6 \text{ ohm}$ , sono in parallelo su  $R_3 = 20 \text{ ohm}$ . Sapendo che  $R_1$  dissipa una potenza di 100 W, calcolare la corrente e la caduta di tensione nelle resistenze, la corrente e la tensione totali. (R.  $I_{12} = 5 \text{ A}$ ;  $\Delta V_1 = 20 \text{ V}$ ;  $\Delta V_2 = 30 \text{ V}$ ;  $V_t = 50 \text{ V}$ ;  $I_3 = 2,5 \text{ A}$ ;  $I_t = 7,5 \text{ A}$ ).
6. Due resistenze in parallelo  $R_1 = 40 \text{ ohm}$  e  $R_2 = 60 \text{ ohm}$ , sono collegate in serie con una resistenza  $R_3$ . Sapendo che  $R_2$  è percorsa dalla corrente  $I_2 = 2 \text{ A}$  e che la tensione totale applicata al gruppo è  $V_t = 250 \text{ V}$ , calcolare la corrente nelle resistenze, la corrente totale e il valore di  $R_3$ . (R.  $I_1 = 3 \text{ A}$ ;  $I_t = 5 \text{ A}$ ;  $R_3 = 26 \text{ ohm}$ ).
7. Due resistenze in parallelo  $R_1 = 40 \text{ ohm}$  e  $R_2 = 60 \text{ ohm}$ , sono collegate in serie ad altre due resistenze in parallelo di cui  $R_3 = 40 \text{ ohm}$ . Sapendo che  $R_1$  è percorsa dalla corrente  $I_1 = 3 \text{ A}$  e che

- la  $R_3$  provoca la caduta di tensione  $\Delta V_3 = 40$  V, calcolare la corrente e le cadute di tensione in ciascuna resistenza, la tensione e la corrente totale e il valore di  $R_4$ . (R.  $V_{1,2} = 120$  V;  $I_2 = 2$  A;  $I_1 = 5$  A;  $I_3 = 1$  A;  $I_4 = 4$  A;  $R_4 = 10$  ohm;  $V_1 = 160$  V).
8. Due generatori in serie aventi la f.e.m.  $E_1 = 100$  V e  $E_2 = 150$  V e la resistenza interna  $R_1 = 0,5$  ohm e  $R_2 = 1$  ohm, alimentano un carico  $R_k = 98,5$  ohm. Trascurando la resistenza dei collegamenti, calcolare la corrente nel circuito, la tensione ai morsetti di ciascun generatore e totale, la potenza totale assorbita dal carico e quella erogata da ciascun generatore. (R.  $I = 2,5$  A;  $V_{m_1} = 98,75$  V;  $V_{m_2} = 147,5$  V;  $V_{m_t} = 246,25$  V;  $P_1 \cong 615$  W;  $P_2 \cong 247$  W;  $P_2 \cong 368$  W).
9. Sei generatori uguali aventi la resistenza interna di 1,5 ohm ciascuno sono collegati a due a due in serie e quindi collegati in parallelo. Essi alimentano un carico di 100 ohm alla tensione di 200 V. Calcolare la corrente, la f.e.m. e la tensione ai morsetti di ciascun generatore. (R.  $I = \frac{2}{3}$  A;  $E = 101$  V;  $V_m = 100$ ).
10. Un motore elettrico della potenza di 3 CV e del rendimento di 0,8 viene alimentato alla tensione di 276 V, attraverso una linea avente la resistenza di 1 ohm, da un generatore della resistenza interna di 0,5 ohm. Calcolare la corrente assorbita dal motore, la f.e.m. del generatore e i rendimenti elettrici parziali e totale del circuito, motore compreso. (R.  $I = 10$  A;  $E = 291$  V;  $\eta_g = 0,98$ ;  $\eta_L = 0,96$ ;  $\eta_t = 0,75$ ).
11. Un reostato potenziometrico ha la resistenza  $R$  di 120 ohm ed è sottoposto alla tensione di 100 V. Calcolare mediante la formula (4.46) e, per verifica, mediante le leggi delle serie-parallelo, la tensione  $V_u$  ai capi della resistenza  $R_u$  di carico di 15 ohm, quando tra il cursore e l'estremo comune è inclusa la resistenza  $R_1$  pari a  $1/3$  della resistenza del potenziometro. (R.  $V_u = 12$  V).
12. Due generatori reali di corrente  $I_{o_1} = 8$  A con  $R_{o_1} = 1,6$  ohm e  $I_{o_2} = 5$  A con  $R_{o_2} = 0,4$  ohm, collegati in serie, alimentano un carico avente la resistenza  $R = 5,4$  ohm. Calcolare il generatore equivalente di tensione e di corrente, nonché la corrente  $I$  nel carico. (R.  $E_o = 14,8$  V;  $R_o = 2$  ohm;  $I_o = 7,4$  A;  $I = 2$  A).
13. Due generatori di tensione  $E_1 = 9$  V con  $R_{o_1} = 2$  ohm e  $E_2 = 6$  V con  $R_{o_2} = 2$  ohm collegati in parallelo, alimentano una resistenza di carico  $R = 2$  ohm. Calcolare, applicando i principi di Kirchhoff, di Thevenin e di sovrapposizione degli effetti, la corrente in  $R$ . (R.  $I_k = 2,5$  A).
14. Due generatori di tensione  $E_1 = 10$  V con  $R_{o_1} = 3$  ohm e  $E_2 = 6$  V con  $R_{o_2} = 1$  ohm collegati fra loro in parallelo, sono posti in serie con un generatore di corrente  $I_o = 4$  A con  $R_o = 0,25$  ohm e con una resistenza di carico  $R = 3$  ohm. Calcolare, mediante i principi di Millman e di Thevenin, la corrente nel carico. Verificare il risultato applicando i principi di Kirchhoff. (R.  $I_k = 2$  A).
15. Due resistenze in serie  $R_1 = 3$  ohm e  $R_2 = 5,5$  ohm sono collegate in parallelo con altre due resistenze in serie  $R_3 = 11$  ohm e  $R_4 = 4,5$  ohm. Una quinta resistenza  $R_5 = 2$  ohm è collegata tra il nodo che congiunge  $R_1$  a  $R_2$  e il nodo che congiunge  $R_3$  con  $R_4$ . Sapendo che la tensione applicata alla serie è di 10 V, calcolare la corrente in  $R_5$ , applicando i principi di Kirchhoff.

## Capitolo Quinto

### Cenni di elettrochimica

L'elettrochimica studia i fenomeni e le leggi relative alla dinamica della corrente continua nei conduttori liquidi, studia cioè i *fenomeni chimici* della corrente elettrica.

Le considerazioni sul meccanismo della conduzione nei liquidi (vedi paragrafo 2.6.), hanno messo in evidenza che solo le soluzioni acide, basiche e saline sono conduttori di corrente. Infatti in esse vi è formazione spontanea di ioni, che, pur vagando disordinatamente, si mantengono uniformemente distribuiti nell'elettrolito.

Immergendo in questo due elettrodi collegati con i morsetti di un generatore elettrico, si ha passaggio di corrente elettrica. L'elettrodo positivo o *anodo* attira gli *ioni negativi* o *anioni*, i quali cedono ad esso gli elettroni in eccesso, mentre l'elettrodo negativo o *catodo* attira gli *ioni positivi* o *cationi*, cedendo ad essi gli elettroni mancanti.

In ultima analisi gli elettroni provenienti dal generatore vengono ceduti dal catodo all'elettrolito e vengono catturati dall'anodo per ritornare al generatore, come se passassero direttamente attraverso l'elettrolito. In realtà la corrente nei liquidi è costituita non da un flusso di elettroni liberi, come avviene nei conduttori metallici, ma da una duplice migrazione di cariche elettriche dovute agli ioni che si muovono in senso opposto e precisamente alla somma degli effetti delle cariche negative trasportate dagli ioni negativi verso l'anodo e delle cariche positive trasportate dagli ioni positivi verso il catodo.

Gli ioni a contatto con gli elettrodi neutralizzano la propria carica e assumono le proprietà fisiche e chimiche che competono al loro stato neutro, per cui danno origine alla dissociazione elettrolitica e a particolari reazioni chimiche.

In definitiva la corrente che attraversa un elettrolito produce due effetti: quello termico (sempre presente dove esiste corrente elettrica) e quello chimico.

#### 5.1. L'ELETTROLISI

L'effetto chimico della corrente, e più propriamente la trasformazione dell'energia elettrica in energia chimica, si chiama *elettrolisi*.

A seconda delle sostanze che costituiscono l'elettrolito e gli elettrodi e quindi a seconda della composizione chimica e dello stato fisico che assumono gli ioni quando neutralizzano la loro carica elettrica per effetto del contatto con gli elettrodi, si possono avere tre diversi effetti chimici della corrente elettrica:

- a) effetto dissociativo della materia;
- b) effetto di trasporto della materia;
- c) effetto reagente della materia.

I tre effetti sono il più delle volte interdipendenti e si manifestano contemporaneamente.

Consideriamo un *voltmetro* o *cella elettrolitica* costituita da una soluzione di acido solforico ( $H_2SO_4 + H_2O$ ) e da due elettrodi (fig. 5.1).

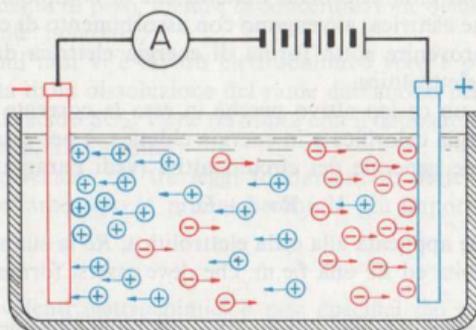


Fig. 5.1 - Voltmetro o cella elettrolitica.

Per quanto esposto al paragrafo 2.6., l'acido solforico diluito ionizza spontaneamente, scindendo le sue molecole nei due ioni  $H_2^{++}$  e  $SO_4^{--}$ .

Applicando agli elettrodi una tensione, gli ioni di idrogeno, attirati dal catodo, acquistano gli elettroni mancanti. Per effetto della neutralizzazione della carica elettrica, tali ioni assumono le proprietà fisiche e chimiche della sostanza che li costituisce e cioè si trasformano in due atomi di idrogeno  $2H$  che, assumendo lo stato gassoso, si liberano dall'elettrolito sotto forma di bollicine, le quali, aderendo al catodo, salgono alla superficie del liquido.

Gli ioni  $SO_4^{--}$ , attirati dall'anodo, cedono a questo gli elettroni per trasformarsi nel radicale acido  $SO_4$ .

Se l'anodo è inattaccabile dal radicale acido, questo si combina con l'idrogeno  $H_2$  dell'acqua per ripristinare acido solforico  $H_2SO_4$ , che si scinde ancora immediatamente nei suoi due ioni, mentre l'ossigeno  $O$  dell'acqua, rimasto libero, si svolge sottoforma di gas.

La corrente elettrica ha provocato quindi la *dissociazione* dell'acqua in idrogeno ed in ossigeno, con conseguente concentrazione dell'acido solforico. È questo l'*effetto dissociativo della materia*.

Se invece l'anodo è intaccabile dal radicale acido  $\text{SO}_4$ , come, per esempio, il rame (e quasi tutti i metalli) si ha, oltre ad un parziale effetto di dissociazione dell'acqua, una reazione chimica e cioè si ha formazione di solfato di rame  $\text{CuSO}_4$ , che si scinde negli ioni  $\text{Cu}^{++}$  e  $\text{SO}_4^{--}$ . Il catodo ora attira non solo gli ioni di idrogeno  $\text{H}_2^{++}$ , ma attira anche gli ioni  $\text{Cu}^{++}$ , i quali, neutralizzando la propria carica, diventano atomi solidi di rame Cu, che si depositano sul catodo formandovi un sottile rivestimento. L'elettrolito modifica via via la sua composizione chimica: da acido solforico si trasforma in solfato di rame. È questo l'*effetto del trasporto di materia* dall'anodo al catodo e l'*effetto reagente* tra elettrolito ed elettrodi.

Le trasformazioni chimiche della materia che si compiono nell'elettrolisi a causa della corrente elettrica, avvengono con assorbimento di energia, che necessariamente deve provenire sotto forma di energia elettrica dal generatore che alimenta la cella elettrolitica.

Infatti questa è un carico attivo perché in essa la corrente trasforma l'energia elettrica in energia calorifica e in energia chimica, e per essa la legge di Ohm assume l'espressione generale dei circuiti attivi (vedi paragrafo 4.6.):

$$V = Ro \cdot I + Ec, \quad (5.1)$$

dove  $V$  è la tensione applicata alla cella elettrolitica,  $Ro$  la sua resistenza interna,  $I$  la corrente assorbita ed  $Ec$  una f.e.m. che deve essersi formata in seno all'apparecchio.

Ricordiamo infatti (vedi paragrafo 2.5.) che nelle superfici di contatto tra due corpi conduttori diversi e quindi tra elettrodo ed elettrolito, ha sede una f.e.m. di contatto, che si oppone al passaggio della corrente e che perciò, essendo contraria alla tensione applicata, prende il nome di forza contro elettromotrice (f.c.e.m.).

Nel caso specifico dell'elettrolisi questa f.c.e.m. è data dall'effetto combinato delle tensioni di contatto tra i due elettrodi e la soluzione e deve interpretarsi come la conseguenza di una alterazione della catena voltaica e cioè delle sostanze in contatto, per effetto dei processi chimici che si compiono nel voltmetro al passaggio della corrente. Essa viene detta *tensione di polarizzazione* e rappresenta la *tensione di scomposizione* occorrente al lavoro elettrochimico che si compie nel voltmetro.

Moltiplicando per  $I$  l'espressione (5.1) si ottiene:

$$V \cdot I = Ro \cdot I^2 + Ec \cdot I,$$

dalla quale si deduce che della potenza  $V \cdot I$  assorbita dalla cella elettrolitica, solo la parte  $Ro \cdot I^2$ , generalmente la minore, viene trasformata per effetto Joule in calore, mentre la parte  $Ec \cdot I$  viene trasformata in lavoro chimico.

Ogni cella elettrolitica produce una sua propria f.c.e.m.  $E_c$  che dipende dalle sostanze che costituiscono i contatti anodo-elettrolito ed elettrolito-catodo, ossia la cosiddetta catena voltaica.

Logicamente, per poter produrre l'elettrolisi, occorre che la tensione  $V$  applicata al voltmetro sia maggiore della f.c.e.m.  $E_c$  di polarizzazione.

In un solo caso la  $E_c$  diventa nulla: quando l'elettrolito è composto da un sale disciolto il cui elemento metallico è uguale a quello dell'anodo.

Se l'elettrolito è costituito, per esempio, da una soluzione di solfato di rame  $\text{CuSO}_4$  e l'anodo è pure di rame  $\text{Cu}$ , gli ioni  $\text{Cu}^{++}$ , attratti dal catodo neutralizzano le proprie cariche e vi si depositano, mentre gli ioni  $\text{SO}_4^{-}$ , diventando neutri a contatto dell'anodo, si combinano con questo per ripristinare il  $\text{CuSO}_4$ .

Si verifica cioè un semplice trasporto di atomi di rame, per mezzo della corrente elettrica, dall'anodo, che progressivamente assottiglia, al catodo che progressivamente aumenta di peso, mentre la concentrazione della soluzione  $\text{CuSO}_4$  rimane praticamente invariata.

In tali condizioni non vi è lavoro elettrochimico vero e proprio, in quanto l'energia sviluppata dalla dissoluzione del rame dall'anodo per effetto della reazione con il radicale acido  $\text{SO}_4$ , viene restituita con il deposito di rame sul catodo e pertanto la f.c.e.m.  $E_c$  è nulla.

L'elettrolisi è governata da tre leggi fondamentali, dette leggi di Faraday, delle quali consideriamo solo la prima, perché la più importante dal punto di vista elettrico.

TABELLA 6 Equivalenti elettrochimici e pesi specifici dei principali elementi.

Elemento	Equivalente elettrochimico		Peso specifico
	mg per coul.	g per Ah	g per $\text{cm}^3$
Argento	1,118	4,0248	10,5
Alluminio	0,093	0,335	2,7
Cromo	0,180	0,647	6,7
Nichel	0,304	1,095	8,6
Oro	0,681	2,452	19,25
Rame (monovalente)	0,659	2,372	8,9
Rame (bivalente)	0,329	1,186	
Zinco	0,339	1,219	7,15
Idrogeno	0,0104	0,037	$9 \cdot 10^{-5}$
Ossigeno	0,083	0,298	$14 \cdot 10^{-4}$
Ferro (bivalente)	0,289	1,042	
Ferro (trivalente)	0,193	0,695	7,86

1<sup>a</sup> legge di Faraday: *Il peso  $P$  di elettrolito decomposto, ossia il peso delle sostanze che si depositano o si sviluppano sugli elettrodi, è proporzionale alla quantità di elettricità  $Q = I \cdot t$ , che ha attraversato la soluzione.*

Questa legge si traduce con la formula:

$$P = \alpha \cdot I \cdot t, \quad (5.2)$$

dove  $\alpha$  è l'*equivalente elettrochimico* dell'elemento depositato e cioè il peso di quell'elemento che si deposita o si sviluppa al passaggio di un coulomb.

Praticamente la quantità di elettricità si misura in ampere-ora, che equivale a 3.600 coulomb. I valori di  $\alpha$  di alcuni tra i principali elementi sono raccolti nella tabella 6.

L'unità di misura del peso  $P$  dipende dall'unità di peso per coulomb in cui è espresso l'equivalente elettrochimico.

La prima legge di Faraday ha permesso di definire l'unità di intensità di corrente denominata ampere internazionale:

*L'ampere internazionale è l'intensità di corrente che attraversando una soluzione di nitrato di argento (AgNO<sub>3</sub>), deposita al catodo mg 1,118 di argento in un secondo.*

Le applicazioni dell'elettrolisi sono molte. Le principali sono:

- a) la **galvanostegia**, detta anche galvanizzazione, che consiste nella ricopertura per via elettrolitica di metalli di poco pregio con metalli più preziosi od inossidabili (nichelatura, cromatura, argentatura, doratura, ecc.);
- b) la **galvanoplastica**, che consiste nel deposito elettrolitico di metalli su oggetti artistici modellati in materia plastica metallizzata in superficie;
- c) l'**elettrometallurgia**, che consiste nell'estrazione di metalli dai loro composti e nella raffinazione per mezzo della corrente elettrica;
- d) l'**elettrochimica industriale** e cioè la preparazione per via elettrolitica di composti o di elementi di uso industriale.

#### Esempio numerico

Si vuol ricoprire elettroliticamente la superficie laterale di un cilindro di ferro alto 10 cm e del diametro di 20 mm, con uno strato di cromo dello spessore  $s$  di 0,3 mm.

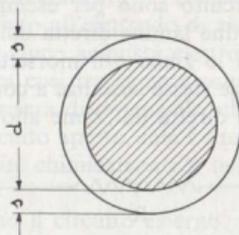
Calcolare la quantità di elettricità  $Q$  necessaria e il tempo  $t$ , sapendo che l'intensità della corrente che attraversa il bagno elettrolitico è di 10 ampere.

#### Soluzione

Calcolo del volume  $V$  di cromo da depositare sul cilindro di ferro:

$$V = \frac{\pi(d+2s)^2}{4} \cdot h - \frac{\pi d^2}{4} \cdot h,$$

$$V = \frac{3,14 (20 + 2 \cdot 0,3)^2}{4} \cdot 100 - \frac{3,14 \cdot 20^2}{4} \cdot 100 = 1.914 \text{ mm}^3 .$$



Calcolo del peso di cromo (peso specifico del cromo = 6,7 g/cm<sup>3</sup>):

$$P = V \cdot P_s = 1,914 \cdot 6,7 = 12,82 \text{ grammi} .$$

Calcolo della quantità di elettricità  $Q = I \cdot t$ :

Dalla tabella n. 6 si ha che l'equivalente elettrochimico del cromo è, espresso in g/Ah, di 0,647.  
Dalla legge di Faraday:

$$I \cdot t = Q = \frac{P}{\alpha} = \frac{12,82}{0,647} = 19,34 \text{ amperora} .$$

Calcolo del tempo  $t$ :

$$t = \frac{Q}{I} = \frac{19,34}{10} = 1 \text{ ora e } 57 \text{ minuti primi circa} .$$

## 5.2. LE PILE VOLTAICHE

Il fenomeno dell'elettrolisi è reversibile nel senso che se la corrente elettrica provoca particolari reazioni chimiche, esistono delle reazioni chimiche che producono corrente elettrica. È quest'ultimo il fenomeno che si compie nelle pile voltaiche.

Le pile voltaiche infatti sono generatori di energia elettrica, sotto forma di corrente continua, o meglio sono trasformatori di energia chimica o molecolare in energia elettrica.

Si è accennato (paragrafo 2.5.) all'effetto Volta che si manifesta quando due metalli diversi vengono messi in contatto, ossia alla d.d.p. o barriera di potenziale che nasce spontaneamente fra essi. Tale d.d.p. non è però utilizzabile su un circuito esterno. Infatti nei circuiti chiusi interamente metallici (catena chiusa di conduttori metallici), la somma delle varie f.e.m. di contatto è uguale a zero, purché la temperatura sia la stessa lungo tutto il circuito.

Consideriamo il circuito di fig. 5.2 dove le due lamine a contatto, una di rame  $Cu$  e l'altra di zinco  $Zn$ , sono collegate ad un circuito esterno  $R$ . Se i morsetti di collegamento e l'intero circuito sono per esempio, di rame, nascono due f.e.m. di contatto: una tra le due lamine diretta dal rame allo zinco avente un determinato valore, l'altra tra lo zinco e il morsetto di rame avente lo stesso valore, perché determinata dalle stesse sostanze a contatto, ma diretta nel senso opposto alla prima in quanto diretta dal rame allo zinco. La f.e.m. risultante è perciò nulla.

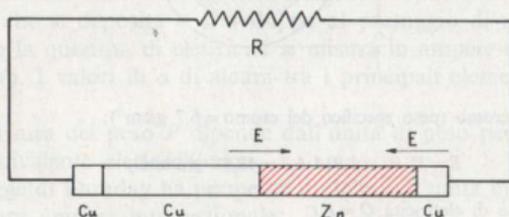


Fig. 5.2 - Forze elettromotrici di contatto.

Se però tra le due lamine metalliche si pone, come fece Volta, un conduttore elettrolitico, per esempio, una soluzione acida o di opportuni sali, la f.e.m. totale della nuova catena di contatti si mantiene anche a circuito chiuso, salvo una diminuzione più o meno grande dovuta alla caduta di tensione provocata dalla resistenza interna della cella elettrolitica al passaggio della corrente erogata. Si ottiene così una *pila voltaica*.

Il fenomeno è dovuto al fatto che tra elettrodi ed elettrolito avvengono delle reazioni chimiche che sviluppano energia elettrica.

Consideriamo una pila voltaica costituita da un elettrodo di rame e uno di zinco immersi in una soluzione di acido solforico (fig. 5.3).

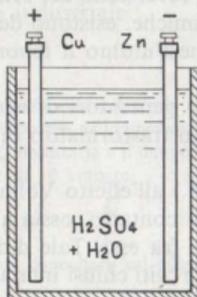


Fig. 5.3 - La pila voltaica.

Nella serie voltaica degli elementi il rame è negativo rispetto allo zinco, per cui, come gli elettrodi vengono a contatto con l'elettrolito, si ha una momentanea migrazione di ioni di idrogeno  $H_2^{++}$ , che si portano all'elettrodo di rame, e di ioni  $SO_4^{--}$  che si portano all'elettrodo di zinco. Il rame perde allora elettroni e libera idrogeno e lo zinco acquista elettroni e viene intaccato dal radicale acido  $SO_4$ . Si manifesta così tra rame e soluzione e tra soluzione e zinco una f.e.m. di contatto o barriera di potenziale, che evita ogni ulteriore passaggio di cariche, per cui, a circuito aperto, tale f.e.m. equilibra e compensa la tendenza degli elettrodi a reagire chimicamente e nella pila non possono avvenire ulteriori reazioni chimiche.

Quando però viene chiuso il circuito esterno, le cariche negative acquistate dall'elettrodo di zinco passano, attraverso il collegamento esterno, all'elettrodo di rame, per cui gli ioni  $SO_4^{--}$  reagiscono di nuovo con lo zinco cedendo ad esso altre cariche negative, mentre l'idrogeno portandosi di nuovo all'elettrodo di rame sottrae ad esso un uguale numero di cariche negative per poi liberarsi sotto forma di gas.

Nel circuito esterno si ha così un flusso continuo di cariche elettriche e cioè di elettroni che vanno dallo zinco al rame, perché lo zinco è diventato negativo rispetto al rame.

La pila voltaica sviluppa energia elettrica dovuta alla reazione chimica tra zinco e acido e cioè al consumo sia dell'acido che dello zinco metallico.

La f.e.m. che si manifesta tra i due elettrodi non è logicamente uguale a quella determinata dal contatto diretto tra rame e zinco, ma dipende dalla somma algebrica delle nuove f.e.m. dovute alla barriera di potenziale che si è stabilita tra ciascun elettrodo e l'elettrolito. Dipende cioè dall'energia chimica consumata e quindi dai componenti della pila.

La pila ora descritta dà una f.e.m. di circa 0,8 volt.

Un'altra grandezza che caratterizza la pila è la quantità di elettricità  $Q$  che essa può erogare e cioè l'intensità di corrente nel tempo. Essa dipende non dalla qualità, ma dalla quantità delle sostanze che compongono la pila.

A parità di corrente erogata, la durata delle reazioni chimiche, e quindi il tempo di scarica della pila, è più o meno lungo a seconda della quantità più o meno grande delle sostanze reagenti, e precisamente della quantità dell'elettrodo che si consuma e della quantità di elettrolito che si trasforma.

Si osserva però che, dopo un certo tempo di funzionamento, la tensione ai morsetti della pila va rapidamente diminuendo con conseguente diminuzione della corrente erogata.

Ciò è dovuto al fatto che, durante il passaggio della corrente, l'idrogeno che si sviluppa all'elettrodo di rame, anziché liberarsi dopo aver acquistato dall'elettrodo gli elettroni mancanti, aderisce sotto forma di bollicine alla superficie del rame. Il rivestimento gassoso, che viene a formarsi attorno all'elettrodo, presenta una grande resistenza al passaggio della corrente, per cui questa dimi-

nuisce e, per l'aumentata resistenza interna, aumenta la caduta di tensione e quindi diminuisce la tensione ai morsetti.

Inoltre, nella superficie di contatto tra rame e idrogeno depositato, si sviluppa una f.c.e.m., detta f.e.m. di polarizzazione che, essendo opposta a quella generata, riduce ulteriormente sia la tensione ai morsetti che la corrente erogata.

Il fenomeno prende il nome di *polarizzazione della pila*.

Basterebbe scuotere l'elettrodo di rame per liberare le bollicine di idrogeno, ma in breve tempo queste rivestirebbero di nuovo il rame, determinando ancora il fenomeno della polarizzazione. Per questo, in pratica, la pila di Volta ora descritta non può essere usata.

Per mantenere una erogazione di corrente abbastanza costante occorre *depolarizzare* continuamente la pila mediante speciali reagenti chimici capaci di assorbire l'idrogeno o di evitare che esso depositi sull'elettrodo di rame.

Tali reagenti vengono chiamati *depolarizzanti*.

Le pile di uso comune sono depolarizzate e cioè contengono determinate sostanze depolarizzanti a seconda dei componenti della pila.

Descriviamo brevemente alcuni tipi di pile depolarizzate.

a) **Pila Daniell.** È costituita da un vaso di vetro contenente un vaso di porcellana poroso (fig. 5.4). Nell'intercapedine tra i due vasi vi è una soluzione di acido solforico  $H_2SO_4$  (liquido attivo) e una lastra di zinco Zn (elettrodo negativo). Nell'interno del vaso poroso vi è una soluzione di solfato di rame  $CuSO_4$  (depolarizzante) e un bastoncino di rame Cu (elettrodo positivo).

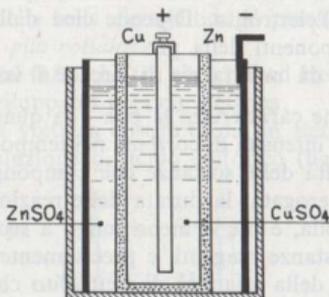


Fig. 5.4 - Pila Daniell.

Gli ioni di idrogeno  $H_2^{++}$ , come neutralizzano la propria carica a contatto con l'elettrodo di rame, si trasformano in molecole di idrogeno gassoso e vengono immediatamente assorbite dal solfato di rame  $CuSO_4$ , che si trasforma in acido solforico  $H_2SO_4$ , lasciando libero il rame che si deposita sull'elettrodo positivo.

Gli ioni  $SO_4^{--}$  cedono le proprie cariche all'elettrodo di zinco  $Zn$  intaccandolo, con conseguente formazione di solfato di zinco  $ZnSO_4$ .

In ultima analisi, durante il funzionamento della pila, il solfato di rame si decompone, l'acido solforico si rigenera ed intacca lo zinco, con formazione di solfato di zinco.

La pila Daniell genera una f.e.m. di 1 volt circa. La sua resistenza interna è piuttosto elevata. È adatta per un funzionamento continuo a causa della rapida azione depolarizzante.

b) **Pila a secco tipo Leclanché.** È costituita da un vaso di zinco (elettrodo negativo), da un bastoncino di carbone (elettrodo positivo) posto al centro del vaso e racchiuso in un sacchetto di tela, contenente un agglomerato di polvere di carbone di legna e di perossido di manganese (depolarizzante) (fig. 5.5).

Tra il recipiente e il sacchetto vi è una soluzione concentrata di cloruro di ammonio (liquido attivo) reso gelatinoso da apposite sostanze inerti.

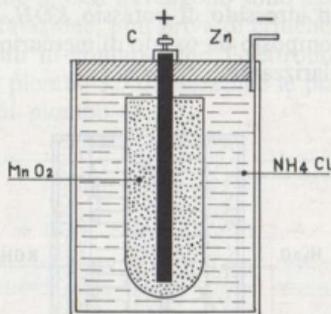


Fig. 5.5 - Pila Leclanché.

La pila Leclanché genera una f.e.m. di 1,5 volt circa.

La resistenza interna varia con le dimensioni della pila. È adatta per un funzionamento intermittente, perché l'azione depolarizzante è lenta.

c) **Pila Weston.** È una pila che mantiene inalterata la sua f.e.m. per parecchi anni, purché non venga usata per erogare corrente, ma solo per confronto di f.e.m. nelle misure di laboratorio. La sua f.e.m., alla temperatura di 20 °C è di 1,0186 volt.

È costituita (fig. 5.6) da un vaso di vetro a forma di *H*. L'elettrodo negativo è formato da una amalgama di cadmio, l'elettrodo positivo è di mercurio.

Il liquido attivo è una soluzione satura di solfato di cadmio  $CdSO_4$  e il depolarizzante è formato da solfato di mercurio  $HgSO_4$ . Per evitare l'evaporazione e l'alterazione delle sostanze, il vaso di vetro deve essere ermeticamente chiuso e protetto dalla luce da un involucro opaco.

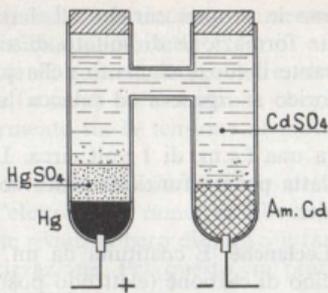


Fig. 5.6 - Pila Weston.

d) **Pila al mercurio.** È costituita da una capsula di acciaio nichelato contenente al centro l'anodo di zinco amalgamato. Questo è attorniato da materiale assorbente imbevuto con idrossido di potassio  $KOH$ . Attorno al materiale assorbente vi è il catodo composto da ossido di mercurio  $Hg_2O$  mescolato e pressato con sostanze depolarizzanti.

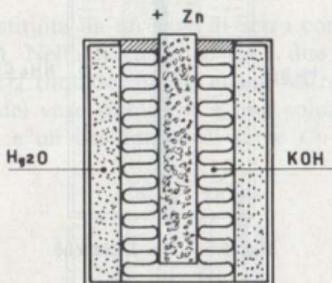


Fig. 5.7 - Pila al mercurio.

La pila al mercurio (fig. 5.7) genera la f.e.m. di 1,4 volt ed ha una capacità più che doppia di quella delle pile Leclanché. Sopporta bene lunghi periodi di immagazzinamento ed è stabile alle variazioni di temperatura. Inoltre, per il fatto di mantenere una tensione di scarica molto costante, può essere usata come pila campione. Trova però largo impiego, oltre che nelle normali apparecchiature industriali, negli apparecchi miniaturizzati per le piccole dimensioni con cui può venire costruita.

### 5.3. GLI ACCUMULATORI ELETTRICI

Gli accumulatori sono trasformatori di energia elettrica in energia chimica e di energia chimica in energia elettrica. Sono cioè apparecchi a rigenerazione,

nel senso che, sottoposti ad una d.d.p. (carica dell'accumulatore), assorbono energia elettrica per compiere un lavoro chimico, con produzione di una f.c.e.m., come avviene nelle celle elettrolitiche; mentre, collegando i loro morsetti ad un circuito esterno (scarica dell'accumulatore), essi utilizzano la f.c.e.m. per generare una corrente esterna, la quale ritrasforma l'energia chimica in energia elettrica.

Gli accumulatori di uso pratico si possono distinguere in due grandi categorie: quelli acidi o al piombo che sono i più diffusi, e quelli alcalini o al ferro-nichel e al cadmio-nichel.

### 1) Gli accumulatori al piombo

Sono costituiti da una cella elettrolitica contenente una soluzione al 20 % di acido solforico  $H_2SO_4$  e due piastre che, inizialmente, sono di piombo puro  $Pb$ .

Le reazioni chimiche che in essa avvengono sono assai complesse: seguendo la teoria della doppia solfatazione, non priva di critiche, possiamo ritenere che, come gli elettrodi vengono in contatto con l'elettrolito, una parte degli ioni  $SO_4^{--}$  reagiscono con il piombo  $Pb$  di entrambe le piastre ricoprendole di un sottile strato di solfato di piombo  $PbSO_4$ .

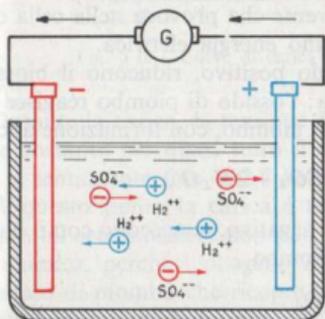


Fig. 5.8 - Carica dell'accumulatore.

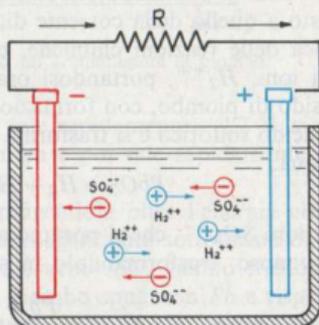
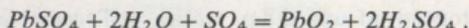


Fig. 5.9 - Scarica dell'accumulatore.

Se ora colleghiamo gli elettrodi (piastre) con un generatore di corrente continua (fig. 5.8), gli ioni  $H_2^{++}$  si portano al catodo (polo negativo), riacquistano gli elettroni perduti, riducono il solfato di piombo  $PbSO_4$  in piombo spugnoso  $Pb$  e, combinandosi con l' $SO_4$ , rigenerano l'acido solforico.



Gli ioni  $SO_4^{--}$  si portano all'anodo (polo positivo) e dopo aver ceduto le loro cariche, reagiscono con l'acqua e con il solfato di piombo, trasformando quest'ultimo in biossido di piombo  $PbO_2$  e rigenerando acido solforico.



Durante questo processo, che costituisce la *carica dell'accumulatore*, si ha una vera e propria trasformazione di energia elettrica in energia chimica. Infatti:

- 1) l'anodo da solfato di piombo si trasforma in biossido di piombo;
- 2) il catodo da solfato di piombo si trasforma in piombo spugnoso;
- 3) l'elettrolito aumenta la sua concentrazione;
- 4) l'apparecchio si polarizza, diventa cioè sede di una f.e.m. di polarizzazione, o meglio di una f.c.e.m.  $E_c$ , dovuta alle f.e.m. di contatto, che si sono generate tra gli elettrodi (non più uguali tra loro) e l'elettrolito.

Durante la carica, l'accumulatore si comporta da voltmetro, ossia da carico attivo, per cui la tensione  $V_c$  di carica deve essere:

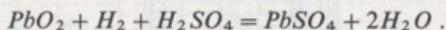
$$V_c = R_o \cdot I + E_c ,$$

dove  $R_o$  è la resistenza interna dell'accumulatore e  $I$  la corrente di carica.

Chiudendo gli elettrodi attraverso un circuito esterno (fig. 5.9), ha inizio il *processo di scarica*, ossia la trasformazione dell'energia chimica in energia elettrica.

La f.e.m. di polarizzazione infatti fa circolare una corrente di scarica in senso opposto a quello della corrente di carica, corrente che provoca nella cella elettrolitica delle reazioni chimiche, che sviluppano energia elettrica.

Gli ioni,  $H_2^{++}$ , portandosi ora all'elettrodo positivo, riducono il biossido in ossido di piombo, con formazione di acqua; l'ossido di piombo reagisce poi con l'acido solforico e si trasforma in solfato di piombo, con formazione ancora di acqua.



Gli ioni  $SO_4^{--}$ , che si portano all'elettrodo negativo, reagiscono con il piombo spugnoso, trasformandolo in solfato di piombo.



Durante la scarica si ha:

- 1) l'anodo da biossido di piombo si ritrasforma in solfato di piombo;
- 2) il catodo da piombo spugnoso si ritrasforma in solfato di piombo;
- 3) la concentrazione dell'acido solforico diminuisce;
- 4) la f.e.m. di polarizzazione va pian piano scomparendo perché tra le piastre, che ridiventano uguali, e l'elettrolito si hanno due f.e.m. opposte che tendono via via a divenire uguali.

Durante la scarica, l'accumulatore si comporta da generatore elettrico, per cui la tensione  $V_s$  usufruibile ai suoi morsetti è:

$$V_s = E_c - R_o \cdot I .$$

La f.e.m. che gli accumulatori al piombo manifestano a fine carica (a circuito aperto) è di circa 2,1 volt.

La tensione  $V_c$  necessaria alla carica e la tensione  $V_s$  usufruibile durante la scarica, variano invece (per carico costante) con lo stato di carica dell'accumulatore. Infatti per la variazione del grado di concentrazione dell'elettrolito e per i fenomeni di polarizzazione delle piastre, varia la resistenza interna, con conseguente variazione delle cadute interne di tensione.

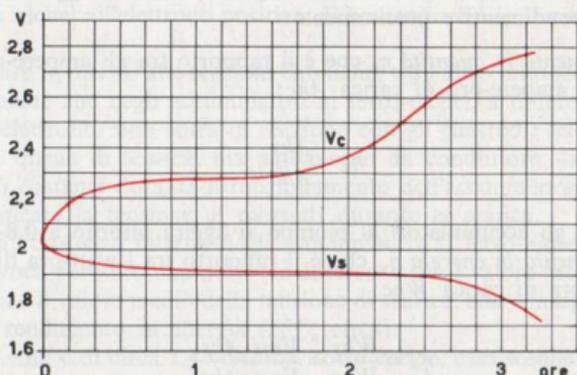


Fig. 5.10 - Curve di carica e di scarica di un accumulatore al piombo.

Durante la carica, la tensione  $V_c$  richiesta sale rapidamente a 2,2 V, si mantiene costante per quasi tutto il tempo di carica e poi sale rapidamente a 2,5 volt e lentamente fino a 2,7 volt (fig. 5.10).

A questo punto la carica è terminata. Spingendola oltre l'energia elettrica fornita all'accumulatore non può più essere immagazzinata sotto forma di energia chimica, perché l'idrogeno  $H_2$  e il radicale acido  $SO_4$  hanno trasformato il solfato di piombo che ricopre le piastre in piombo spugnoso  $Pb$  e rispettivamente in biossido di piombo  $PbO_2$ . Ogni ulteriore apporto di energia elettrica determinerebbe nell'accumulatore il fenomeno dell'elettrolisi dell'acqua con sviluppo di bolle gassose di idrogeno e di ossigeno e con conseguente concentrazione dell'elettrolito.

Durante la scarica la tensione  $V_s$  scende subito a 1,95 volt a causa della caduta di tensione dovuta alla resistenza interna  $R_o$ , che negli accumulatori è sempre piccola (varia da pochi centesimi a qualche millesimo di ohm), scende poi lentamente a 1,83 volt, dopo di che si abbassa rapidamente fino ad annullarsi (fig. 5.10).

La scarica non deve scendere al disotto di 1,8 volt, perché spingendola oltre, le piastre si ricoprirebbero di uno strato troppo profondo di solfato di piombo, difficile poi da togliere durante la carica.

Un accumulatore è definito:

- 1) dalla sua f.e.m.  $E$ , che dipende dalla qualità delle sostanze reagenti;
- 2) dalla sua *capacità*  $Q$  o quantità di elettricità o numero di ampere-ora che può erogare durante la scarica, che dipende dalla quantità delle sostanze reagenti;
- 3) dal tempo  $t$  di scarica: protraendosi la scarica e riducendo corrispondentemente l'intensità della corrente, la capacità risulta maggiore;
- 4) dai suoi rendimenti e precisamente:
  - a) dal *rendimento in quantità*  $\eta_q$  che è il rapporto tra gli ampere-ora di scarica  $Ahs$  e gli ampere-ora di carica  $Ahc$ :

$$\eta_q = \frac{Ahs}{Ahc}, \quad (5.3)$$

e che per gli accumulatori al piombo si aggira intorno a 0,8-0,9;

- b) dal *rendimento in energia*  $\eta_w$  che è il rapporto tra i watt-ora di scarica  $Whs$  e i watt-ora di carica  $Whc$ :

$$\eta_w = \frac{Whs}{Whc} = \frac{Vms \cdot Ahs}{Vmc \cdot Ahc}, \quad (5.4)$$

e che si aggira intorno a 0,7-0,8.

Il rendimento in energia è più basso del rendimento in quantità per il fatto che la tensione media di scarica  $Vms$  è di 1,9 volt circa, mentre la tensione media di carica  $Vmc$  è di 2,4 volt circa.

Gli accumulatori al piombo si differenziano fra loro per la costituzione dei loro elettrodi o piastre. In alcuni, e precisamente negli accumulatori portatili e per autoveicoli, le piastre sono costituite da griglie di piombo-antimonio riempite con una pasta di ossido di piombo (piastre di tipo Faure) che, durante la formazione dell'accumulatore, si trasforma in piombo spugnoso all'elettrodo positivo e in biossido di piombo all'elettrodo negativo.

Poiché la piastra positiva è soggetta a sgretolarsi durante il funzionamento dell'accumulatore, essa viene sostituita, negli accumulatori stazionari, con una piastra di piombo purissimo (piastra tipo Planté) alettata per aumentare la superficie a contatto con l'elettrolito.

Osserviamo infine che per ottenere tensioni e capacità superiori a quelle di un solo elemento di accumulatore, in pratica vengono disposti in uno stesso contenitore (normalmente di materiale sintetico) più elementi collegati o in serie o in parallelo o in serie-parallelo a secondo delle necessità, ottenendo in tal modo le cosiddette *batterie di accumulatori* aventi la tensione e la capacità richieste.

## 2) Gli accumulatori al ferro-nichel

Essi appartengono alla categoria degli accumulatori alcalini perché l'elettrolito è una soluzione alcalina e precisamente una soluzione di idrossido di potassio (KOH) al 20 % circa, con tracce di idrossido di litio atte a migliorare alcune caratteristiche dell'accumulatore.

Gli elettrodi sono costituiti da tanti tubetti di lamiera di acciaio perforata, sorretti da un telaio di ferro, riempiti di ossido di ferro all'elettrodo negativo e di ossido di nichel all'elettrodo positivo. Il contenitore è in lamiera di acciaio nichelato.

Senza entrare in merito alle reazioni chimiche, tra l'altro piuttosto complesse, diremo solamente che negli accumulatori al ferro-nichel, a differenza di quelli al piombo, l'elettrolito non entra in reazione con gli elettrodi, sia nella fase di carica che in quella di scarica, ma agisce solo da conduttore; la sua densità rimane perciò costante durante il funzionamento dell'accumulatore e non concorre a modificare la tensione ai morsetti durante la scarica.

Tuttavia la resistenza interna degli accumulatori al ferro-nichel è piuttosto elevata e provoca pertanto una notevole differenza tra il valore medio della tensione di carica e il valore medio della tensione di scarica, con conseguente abbassamento del rendimento in energia (55 % circa).

Infatti la f.e.m. è di circa 1,4 volt, ma, sotto carico, essa scende rapidamente a circa 1,1 volt a causa della caduta di tensione interna, rimane poi abbastanza costante per tutto il tempo di funzionamento dell'accumulatore, per precipitare repentinamente in corrispondenza alla fine scarica. La tensione media di scarica può essere dunque ritenuta di 1,1 volt circa.

Durante la carica la tensione richiesta sale rapidamente a 1,7 volt e poi lentamente fino a 1,8 volt con un valore medio di 1,75 volt circa.

Gli accumulatori al ferro-nichel, anche se dispongono di tensioni più basse di quelle degli accumulatori al piombo e rendimenti più scadenti, trovano ugualmente largo impiego perché hanno il vantaggio di essere meccanicamente molto robusti, di sopportare bene brusche variazioni di carico e il corto circuito, di non risentire di lunghi periodi di inattività e di esigere poca manutenzione.

## 3) Gli accumulatori al cadmio-nichel

Gli accumulatori al cadmio-nichel sono costruttivamente uguali a quelli al ferro-nichel. Il contenitore è ancora in lamiera di acciaio nichelato e l'elettrolito è sempre una soluzione di idrossido di potassio che, come negli accumulatori al ferro-nichel, non partecipa alle reazioni chimiche, ma serve unicamente alla conduzione, per cui la sua concentrazione rimane costante sia durante la carica che durante la scarica.

Gli elettrodi possono essere costruttivamente di due tipi, anche se chimicamente il materiale attivo è costituito in entrambi i casi da idrossido di nichel per la piastra positiva e da idrossido di cadmio per quella negativa.

In un tipo gli elettrodi sono costruiti allo stesso modo di quelli impiegati negli accumulatori al ferro-nichel: sono formati cioè da tanti tubetti in lamiera di acciaio perforata, sostenuti da un telaietto di ferro e riempiti di materiale attivo.

Nel secondo tipo le piastre devono subire un processo di formazione. Si parte da un supporto di nichel sul quale è depositato uno strato di polvere finissima di nichel. L'elettrodo positivo viene poi impregnato con un sale di nichel e quindi sottoposto a formazione per ottenere uno strato di idrossido di nichel. L'elettrodo negativo viene invece impregnato con un sale di cadmio che durante il processo di formazione si trasforma in idrossido di cadmio.

Questo secondo tipo risulta più leggero del primo e presenta caratteristiche elettriche migliori soprattutto per quanto riguarda la resistenza elettrica interna il cui valore è ancor più basso di quello già ridotto del primo tipo ( $10^{-3}$  ohm per un elemento di accumulatore da 50 Ah).

Per questo motivo entrambi i tipi hanno un rendimento in energia piuttosto elevato dato che la differenza tra la tensione media di scarica e la tensione media di carica è piccola. Infatti, anche se la f.e.m. è di circa 1,3 volt, la tensione media di scarica è di 1,2 volt circa e la tensione media di carica è di 1,4 volt circa, pur avendo a fine carica una tensione di 1,7 volt.

Gli accumulatori al cadmio-nichel vengono impiegati soprattutto nelle apparecchiature portatili radio e fotografiche.

#### 5.4. ESERCIZI DA RISOLVERE

1. Si vuole depositare per via elettrolitica uno spessore di oro di 0,2 mm sulla superficie laterale di un cilindretto di rame del diametro di 15 mm e dell'altezza di 60 mm. Sapendo che il peso specifico dell'oro è di  $19,25 \text{ g/cm}^3$  e che il suo equivalente elettrochimico è di 0,861 mg/coulomb, calcolare la durata dell'operazione avendo a disposizione una corrente di 5 ampere. (R.  $t = 44$  minuti primi).
2. Se per ricavare, per via elettrolitica, 12,82 g di cromo, si è dovuto far circolare una corrente di 10 ampere per 1 h e 57', calcolare l'equivalente elettrochimico del cromo. (R.  $\alpha = 0,647 \text{ g/Ah}$ ).
3. Per argentare per via elettrolitica una superficie di  $40 \times 50 \text{ cm}$ , si è dovuto far circolare una corrente di 20 ampere per 4 ore; calcolare lo spessore di argento depositato, sapendo che il suo peso specifico è di  $10,5 \text{ g/cm}^3$  e che il suo equivalente elettrochimico è di 1,118 mg/coulomb. (R.  $s = 1,53 \text{ mm}$ ).
4. Un accumulatore al piombo avente la capacità di 20 Ah, si scarica alla tensione media di 1,9 volt e si carica alla tensione media di 2,4 volt. Sapendo che il rendimento in quantità è di 0,8, calcolare il tempo necessario alla carica con una corrente di 4 ampere e il rendimento in energia. (R.  $Tc = 6 \text{ h } 15'; \eta_w = 0,63$ ).

## Capitolo Sesto

### Elettrostatica

Nel capitolo dell'elettrodinamica e dell'elettrochimica sono stati considerati i fenomeni legati alla trasformazione dell'energia elettrica dovuti al passaggio della corrente elettrica.

L'elettrostatica studia invece i fenomeni dovuti alle cariche elettriche in equilibrio sui corpi e cioè i fenomeni conservativi dell'energia elettrica.

#### 6.1. IL CAMPO ELETTRICO

Abbiamo accennato all'esistenza del campo elettrico.

Lo spazio che circonda le cariche elettriche o qualunque corpo elettrizzato, spazio nel quale si risentono le azioni di attrazione e di repulsione delle forze coulombiane, si chiama *campo elettrico*.

Esso può immaginarsi un insieme di *linee di forza* che si staccano perpendicolarmente dalla superficie del corpo elettrizzato, per irradiarsi nello spazio e terminare su un altro corpo elettrizzato di opposta polarità.

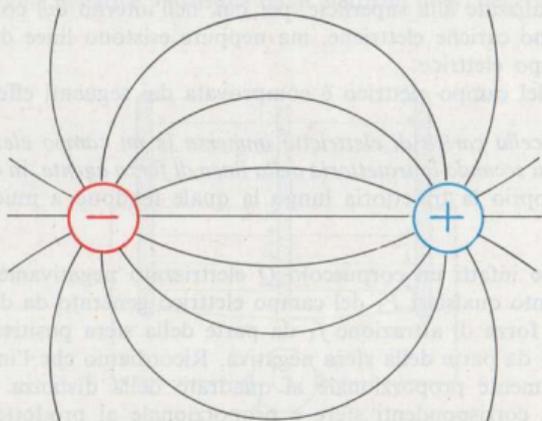


Fig. 6.1 - Campo elettrico di due sfere di segno opposto.

L'andamento delle linee di forza dipende dalla forma delle superfici affacciate dei corpi elettrizzati.

Due sfere elettrizzate di segno opposto, l'una esterna all'altra, producono un campo che ha l'andamento rappresentato in fig. 6.1; il campo elettrico di due cilindri concentrici è costituito da linee di forza radiali (fig. 6.2); tra due superficie piane parallele il campo elettrico è formato da linee di forza parallele (fig. 6.3).

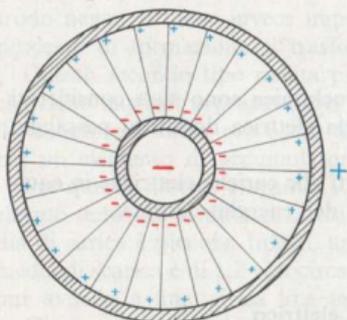


Fig. 6.2 - Campo elettrico di due cilindri concentrici.

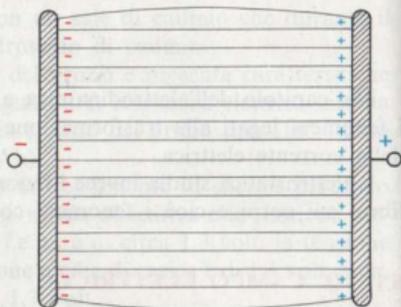


Fig. 6.3 - Campo elettrico di due elettrodi piani paralleli.

In tutti i casi, salvo la loro diversa disposizione, le linee di forza hanno sempre l'aspetto di *linee aperte*, che hanno per estremi una carica positiva e una carica negativa. Ciò significa che in un conduttore elettrizzato le cariche elettriche sono localizzate alla superficie, per cui, nell'interno del conduttore, non solo non vi sono cariche elettriche, ma neppure esistono linee di forza e cioè non esiste campo elettrico.

L'esistenza del campo elettrico è comprovata dai seguenti effetti principali:

a) Una particella carica di elettricità immersa in un campo elettrico, è sollecitata a muoversi secondo la traiettoria della linea di forza agente, in quanto questa rappresenta proprio la traiettoria lungo la quale tendono a muoversi le cariche elettriche.

Consideriamo infatti un corpuscolo  $Q$  elettrizzato negativamente (fig. 6.4), posto in un punto qualsiasi  $P_1$  del campo elettrico generato da due sfere: esso è soggetto alla forza di attrazione  $f_1$  da parte della sfera positiva e alla forza di repulsione  $f_2$  da parte della sfera negativa. Ricordiamo che l'intensità di tali forze è inversamente proporzionale al quadrato della distanza che separa il punto  $P_1$  dalle corrispondenti sfere e proporzionale al prodotto della carica  $Q$  del corpuscolo per la carica  $q$  della sfera agente.

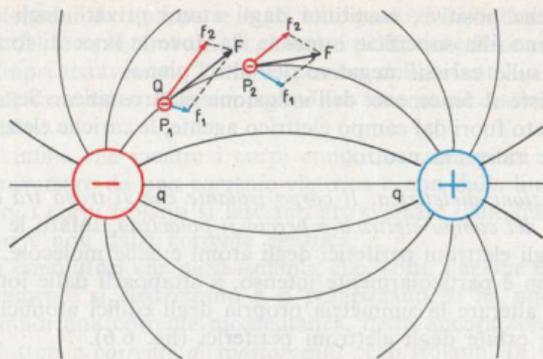


Fig. 6.4 - Azione del campo elettrico su una carica  $Q$ .

Il corpuscolo tende a muoversi secondo la risultante  $F$  delle due forze. Non appena però si è spostato nel punto  $P_2$  le due forze cambiano di intensità e di direzione, per cui anche la risultante cambia direzione ed intensità.

Procedendo punto per punto, si osserva che la particella elettrizzata descrive la traiettoria della linea di forza del campo agente.

*b) Induzione elettrostatica.* Un corpo conduttore (per esempio, una lamina metallica) immerso in un campo elettrico generato da due corpi piani elettrizzati, si elettrizza (fig. 6.5).

Infatti le linee di forza provenienti dalle cariche di un piano si interrompono al loro arrivo sul conduttore e fanno affiorare alla superficie di questo un egual numero di cariche negative, costituite dagli elettroni liberi del conduttore stesso.

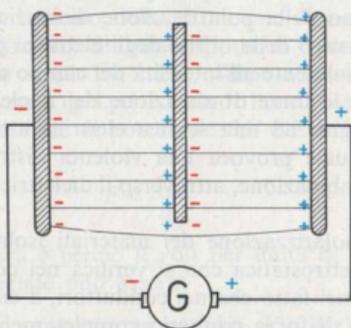


Fig. 6.5 - Induzione elettrostatica.

Uguali cariche positive, costituite dagli atomi privati degli elettroni (ioni positivi) affiorano alla superficie opposta, da dove le linee di forza riprendono per terminare sulle cariche negative dell'altro piano.

In ciò consiste il fenomeno dell'induzione elettrostatica. Se ora il conduttore viene portato fuori dal campo elettrico agente, le cariche elettriche rientrano e il conduttore ridiventa neutro.

c) *Polarizzazione dielettrica.* Il corpo isolante che si trova tra due corpi elettrizzati, è sede del campo elettrico e perciò si polarizza. Infatti le linee di forza, pur agendo sugli elettroni periferici degli atomi e delle molecole, non riescono, se il campo non è particolarmente intenso, a strapparli dalle loro orbite. Riescono solo ad alterare la simmetria propria degli edifici atomici e molecolari, deformando le orbite degli elettroni periferici (fig. 6.6).

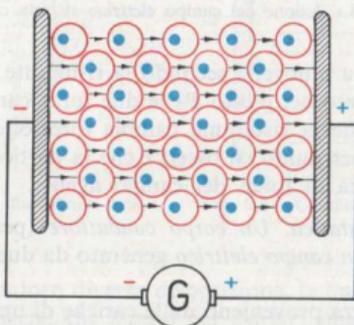


Fig. 6.6 - Polarizzazione dielettrica.

Tali edifici vengono allora a presentare un polo negativo dalla parte verso cui sono dislocati gli elettroni e un polo positivo dalla parte opposta.

È questo il fenomeno della polarizzazione dielettrica, che consiste dunque in uno spostamento elastico delle orbite degli elettroni periferici. Tale deformazione cresce proporzionalmente all'intensità del campo elettrico. Quando questo riuscirà però a vincere le forze di attrazione dei nuclei, gli elettroni periferici si staccano, dando origine ad una scarica elettrica attraverso l'isolante, detta *scarica disruptiva*, la quale provoca una violenta distruzione del campo elettrico a causa della ricombinazione, attraverso il dielettrico, delle cariche di opposti segni.

Il fenomeno della polarizzazione dei materiali isolanti è analogo al fenomeno dell'induzione elettrostatica che si verifica nei corpi conduttori. La differenza sostanziale sta nel fatto che nei conduttori, a causa della mobilità degli elettroni liberi, le linee di forza risultano completamente interrotte in tutto lo spessore del corpo, perché raggiungono il loro equilibrio sulla superficie, dove

affiorano gli elettroni da una parte e gli ioni positivi dall'altra. Negli isolanti invece, a causa del forte legame tra gli elettroni periferici e il loro nucleo, le linee di forza del campo attraversano l'intero spessore dell'isolante, in quanto, determinando una deformazione orbitale, legano fra loro in successione tutte le molecole polarizzate.

Osserviamo infine che mentre i corpi conduttori sottoposti ad una d.d.p., si lasciano attraversare da una corrente elettrica e non dalle linee di forza del campo elettrico, i corpi isolanti si lasciano attraversare dalle linee di forza del campo elettrico e non dalla corrente elettrica.

Però sia nei conduttori che negli isolanti, che, sotto l'azione del campo elettrico, rispettivamente si elettrizzano e si polarizzano, si ha uno spostamento di cariche e quindi una corrente momentanea, detta ancora *corrente di conduzione* nei conduttori e *corrente di spostamento* negli isolanti. In corrispondenza della superficie di separazione tra un conduttore e un isolante, la corrente non presenta discontinuità: dove cessa la corrente di conduzione, nasce la corrente di spostamento di egual valore.

Si deduce pertanto che *una d.d.p. crea negli isolanti un campo elettrico e quindi una corrente di spostamento, e un campo elettrico crea nei conduttori una d.d.p. che dà origine ad una corrente di conduzione.*

È questo un fenomeno importante, che verrà ripreso nello studio della irradiazione e della captazione delle onde elettromagnetiche.

## 6.2. L'INTENSITÀ DEL CAMPO ELETTRICO O GRADIENTE DI POTENZIALE - RIGIDITÀ DIELETTICA

Il campo elettrico è caratterizzato oltre che dalla direzione e dal senso delle linee di forza, anche dalla sua *intensità*  $F$ , che dipende dal numero delle linee di forza per ogni unità di superficie. Nella tecnica tale intensità viene spesso denominata *gradiente di potenziale*.

Esso rappresenta l'andamento della variazione di potenziale  $V$  di punto in punto fra due corpi elettrizzati. Stabilisce quindi il valore  $F$  del campo elettrico tra punto e punto dello spazio in cui il campo stesso agisce.

Il gradiente di potenziale (g.d.p.) e quindi l'intensità del campo, è definito dal rapporto tra la variazione di potenziale  $\Delta V$  esistente tra due punti e la distanza  $d$  che li separa:

$$F = \frac{\Delta V}{d}. \quad (6.1)$$

La sua unità di misura è perciò il volt per unità di lunghezza:  $V/m$ .

Il gradiente di potenziale può essere:

a) **costante**, quando il rapporto tra la d.d.p.  $V$  e la distanza  $d$  tra due punti consecutivi equidistanti è costante. Ciò significa che il campo elettrico è uni-

forme e cioè formato da linee di forza parallele ed uniformemente distanziate, come quello che si ottiene tra due corpi piani e paralleli separati da un mezzo isolante omogeneo.

Il g.d.p. costante è graficamente rappresentato da una retta (fig. 6.7). Consideriamo infatti due piatti posti parallelamente alla distanza di 5 mm, sottoposti alla tensione di 100 volt. Il mezzo dielettrico sia omogeneo. Muovendo dal piatto positivo verso il piatto negativo, l'incremento della d.d.p. è costante:

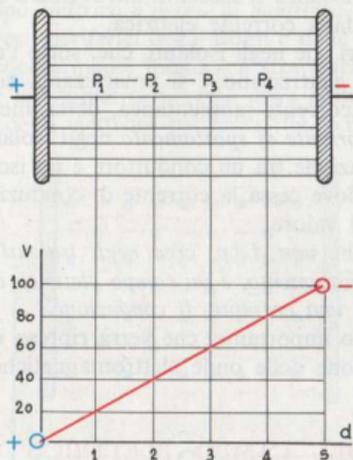


Fig. 6.7 - Gradiente di potenziale costante.

a 1 mm è di 20 V, a 2 mm è di 40 V, a 3 mm è di 60 V, ecc. Per cui la differenza tra un valore e il precedente è sempre di 20 V, oppure il rapporto tra il potenziale  $V$  del punto considerato e la distanza  $d$  tra lo stesso punto e il piatto negativo è costante. Infatti:

$$\text{in } P_1 \quad F_1 = \frac{20}{1} = 20 \text{ volt/mm} ,$$

$$\text{in } P_2 \quad F_2 = \frac{40}{2} = 20 \text{ volt/mm} ,$$

$$\text{in } P_3 \quad F_3 = \frac{60}{3} = 20 \text{ volt/mm} .$$

b) **variabile**, quando il campo elettrico non è uniforme, quando cioè tra punti consecutivi equidistanti, la d.d.p.  $V$  non è costante. È il caso che si verifica, per esempio, per il campo prodotto da due corpi elettrizzati non piani o quando il dielettrico interposto non è omogeneo.

Consideriamo due archi di due cilindri concentrici (fig. 6.8). Le linee di forza, dovendo risultare perpendicolari alle superfici cilindriche, hanno andamento radiale.

Il campo non è uniforme: va diradando dal cilindro di diametro minore a quello di diametro maggiore.

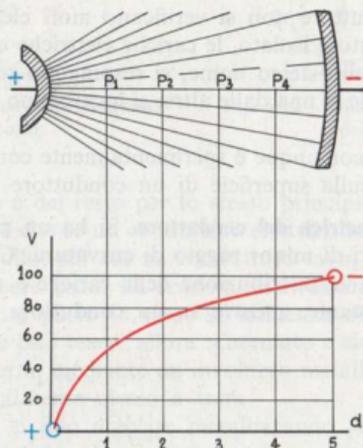


Fig. 6.8 - Gradiente di potenziale variabile.

Ciò significa che muovendo dal cilindro positivo verso il cilindro negativo il gradiente di potenziale va diminuendo. Naturalmente il grafico che esprime i valori del potenziale in funzione della distanza è rappresentato da una curva, che, nel caso considerato, ha l'andamento come in figura.

Abbiamo detto che la polarizzazione di un dielettrico è proporzionale all'intensità del campo elettrico che la determina.

Quando però il g.d.p. supera un certo valore, l'isolante cede e si lascia attraversare da una carica elettrica perforante (scarica disruptiva), che annulla il campo.

Si dice *rigidità dielettrica* il valore del g.d.p. o della tensione  $V$  per unità di spessore  $d$  di isolante, capace di perforare il dielettrico.

La rigidità si misura quindi in  $V/m$  o in unità derivate:  $V/mm$ ,  $KV/cm$ ,  $KV/m$ , ecc.

Teoricamente la rigidità dielettrica di un isolante dovrebbe essere proporzionale allo spessore  $d$  del dielettrico. Praticamente, a causa dell'eterogeneità di qualsiasi isolante, cresce meno rapidamente dello spessore. Varia anche con la temperatura e con il grado di umidità dell'isolante, con la forma degli elettrodi fra i quali avviene la scarica disruptiva, ecc.

La tabella 7 dà i valori della rigidità dielettrica di alcuni isolanti di uso comune.

### 6.3. DISTRIBUZIONE DELLE CARICHE ELETTRICHE SUI CONDUTTORI E SCHERMI ELETTROSTATICI

Quando in un conduttore non si verificano moti elettronici, ossia quando un conduttore elettrizzato è isolato, le cariche elettriche elementari in esso contenute, essendo tutte dello stesso nome, si respingono reciprocamente e allontanandosi il più possibile le una dalle altre, si localizzano sulla superficie esterna del conduttore stesso.

Si può dimostrare e comunque è sperimentalmente confermato, che la distribuzione delle cariche sulla superficie di un conduttore isolato, dipende:

a) **Dalla forma geometrica del conduttore.** Si ha un maggior addensamento di cariche sulle superfici di minor raggio di curvatura. Cosicché su un conduttore sferico elettrizzato, la distribuzione delle cariche è uniforme (fig. 6.9), essendo la curvatura costante; mentre su un conduttore ovoidale le cariche si

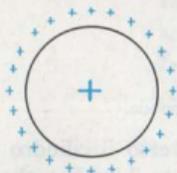


Fig. 6.9 - Distribuzione delle cariche su un conduttore sferico.

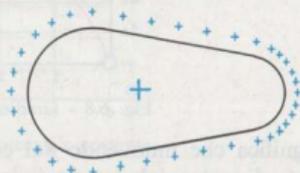


Fig. 6.10 - Distribuzione delle cariche su un conduttore ovoidale.

distribuiscono con una densità inversamente proporzionale al raggio di curvatura (fig. 6.10). Da qui il *potere disperdente delle punte*. Infatti sulle punte la densità delle cariche è così elevata, che il gradiente di potenziale può superare la rigidità dell'isolante che avvolge il conduttore, dando origine alla scarica e quindi alla dispersione di cariche attraverso il dielettrico.

b) **Dall'influenza di corpi elettrizzati esterni.** Due conduttori elettrizzati messi in presenza uno dell'altro si influenzano reciprocamente, modificando la distribuzione superficiale delle cariche nelle zone prospicienti, e precisamente aumentandone o diminuendone la densità a seconda che i conduttori affacciati sono elettrizzati di nome opposto (fig. 6.11) o dello stesso nome (fig. 6.12).

Se i due conduttori di una linea elettrica a potenziale elevato, fossero di piccolo raggio e a distanza limitata, l'addensamento delle cariche potrebbe determinare, come per le punte, un gradiente di potenziale maggiore della rigidità

dielettrica dell'aria e, in tal caso, si manifesterebbe lungo la superficie dei conduttori una scarica sotto forma di una corona luminosa, detta appunto *effetto corona*.

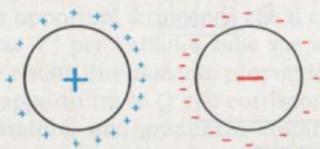


Fig. 6.11 - Influenza tra due corpi elettrizzati di segno opposto.

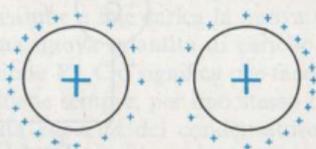


Fig. 6.12 - Influenza tra due corpi elettrizzati dello stesso segno.

Da quanto esposto e del resto per lo stesso principio dell'induzione elettrostatica, risulta evidente che se un conduttore elettrizzato è cavo, nel suo interno il campo elettrico è nullo, per cui un conduttore cavo, e comunque un involucro metallico, può essere usato da *schermo elettrostatico*, perché sottrae qualunque altro conduttore posto in esso, all'influenza di campi elettrici esterni.

Un tubo elettronico può essere allora schermato e cioè sottratto all'influenza dei campi elettrici esterni, mediante un involucro metallico che lo avvolge completamente ed eventualmente messo a terra.

Allo stesso effetto si può arrivare metallizzando la superficie esterna dell'ampolla di vetro del tubo elettronico.

#### 6.4. IL CONDENSATORE ELETTRICO

Due piatti metallici disposti su due piani paralleli e isolati fra loro (fig. 6.13), collegati con un generatore elettrico, assumono, per un momentaneo passaggio di corrente di conduzione nei conduttori di collegamento e nei piatti e di corrente di spostamento nell'isolante, il potenziale del morsetto o polo a cui sono collegati, e tra loro viene a determinarsi la stessa f.e.m. del generatore.

Lo spazio compreso tra i due piatti diviene allora sede di un campo elettrico e cioè di un insieme di linee di forza elettriche che, attraverso l'isolante, lega le cariche di nome opposto affiorate sulle superfici affacciate dei piatti.

Staccando il generatore, possiamo constatare:

- a) tra i piatti esiste e persiste ancora la d.d.p.; le cariche positive di un piatto e le negative dell'altro si attirano reciprocamente, rimanendo *condensate* sulla superficie dei piatti stessi;
- b) se nello spazio fra i piatti si sostituisce l'isolante esistente con un altro, la tensione varia; ciò significa che la densità delle cariche elettriche sulla superficie dei piatti è determinata anche da particolari proprietà dell'isolante;

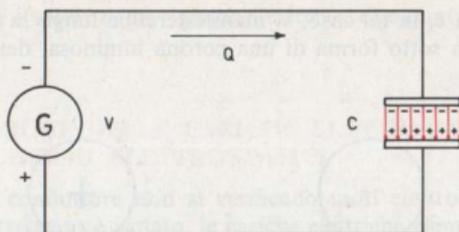


Fig. 6.13 - Il condensatore piano.

c) se i piatti vengono collegati fra loro mediante un conduttore, in questo scorcio per un brevissimo tempo una corrente elettrica, analogamente a quanto si è verificato durante la connessione dei piatti con il generatore, e la tensione si annulla. Tale corrente è variabile e di così breve durata, che non si riesce a misurare. Si può misurare però il suo impulso ossia il prodotto della sua intensità per il tempo, che, come s'è detto, corrisponde alla quantità di elettricità  $Q = I \cdot t$ , che è poi la misura delle cariche elettriche che passano, attraverso il conduttore di collegamento, da un piatto all'altro.

Notiamo subito che questa quantità di elettricità non dipende dalla resistenza del conduttore: variando questa, varia solo il tempo della scarica.

Un apparecchio così costituito prende il nome di *condensatore elettrico*. Ai piatti si dà il nome di *armature*. Se queste sono piane e parallele, il condensatore si dice *piano*.

Consideriamo il circuito di fig. 6.14 costituito da un condensatore  $C$ , da un generatore  $G$  a tensione continua variabile, da una resistenza  $R$  e da un deviatore.

Quando il deviatore è in posizione 1, il condensatore, collegato con il generatore, si carica alla tensione  $V$  per l'affluire di  $Q$  cariche elettriche alle sue armature. Spostando il deviatore in posizione 2, il condensatore si scarica attraverso

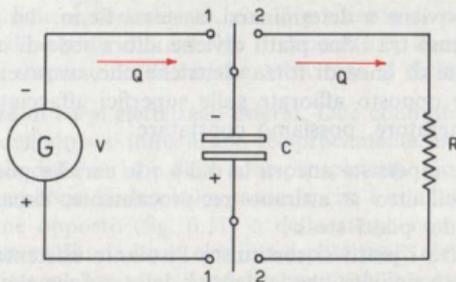


Fig. 6.14 - Carica e scarica di un condensatore.

la resistenza  $R$ , facendo scorrere in questa la stessa quantità di elettricità  $Q$ , mentre la tensione  $V$  si annulla.

Variando ora la tensione del generatore dal valore  $V$  al valore  $V'$  e ripetendo le operazioni di carica e scarica del condensatore, si osserva (e si può misurare con opportuni strumenti) che il condensatore assume a fine carica la nuova tensione  $V'$  per l'affluire sulle sue armature di una nuova quantità di cariche  $Q'$ , che risulta direttamente proporzionale alla tensione  $V'$ . Ciò significa che facendo il rapporto tra le  $Q$  e le corrispondenti  $V$ , si ottiene sempre, per uno stesso condensatore, una grandezza costante  $C$ , chiamata *capacità* del condensatore.

Si può quindi scrivere:

$$C = \frac{Q}{V} \quad \text{da cui} \quad Q = C \cdot V \quad \text{e} \quad V = \frac{Q}{C}. \quad (6.2)$$

La capacità  $C$  è l'attitudine o la proprietà del condensatore di *condensare* e cioè di trattenere sulle sue armature le cariche elettriche e quindi di immagazzinare energia elettrostatica.

La capacità, la cui unità di misura è il *farad*, è legata alle caratteristiche strutturali del condensatore; per un condensatore piano il suo valore dipende da tre elementi:

- dalla superficie  $S$  delle armature affacciate: più grande è la superficie e maggiore è il numero di cariche che può contenere e quindi maggiore è la capacità;
- dalla distanza  $d$  tra le armature: la capacità diminuisce con l'aumentare della distanza perché diminuisce la forza di attrazione in virtù della quale le cariche elettriche rimangono in equilibrio sulle superficie delle armature;
- dal mezzo isolante che separa le armature o più propriamente dalla *costante dielettrica*  $\epsilon$  o *permittività*, che è una caratteristica del dielettrico legata alla sua polarizzazione e cioè al suo potere isolante: più alta è la costante dielettrica e maggiore risulta la capacità.

Si ha perciò:

$$C = \epsilon \frac{S}{d} \quad \text{da cui} \quad S = C \frac{d}{\epsilon} \quad d = \frac{S\epsilon}{C} \quad \epsilon = C \frac{d}{S}, \quad (6.3)$$

dove  $S$  deve essere espresso in  $m^2$ ,  $d$  in metri e  $\epsilon$  in  $F/m$  per ottenere la capacità  $C$  in farad.

La costante dielettrica  $\epsilon_0$  dell'aria secca e del vuoto è di  $8,858 \cdot 10^{-12} F/m$ . Per gli altri isolanti ha valori variabili da materiale a materiale e viene data in *valore relativo*  $\epsilon_r$  a quello dell'aria  $\epsilon_0$ , per cui per ottenere la costante dielettrica assoluta  $\epsilon_a$  di un isolante bisogna moltiplicare il valore relativo  $\epsilon_r$ , dato da tabelle, per il valore  $\epsilon_0$  dell'aria:

$$\epsilon_a = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r. \quad (6.4)$$

La tabella 7 dà le costanti dielettriche relative  $\epsilon_r$  di alcuni isolanti di uso comune.

Si è detto che l'unità di misura della capacità è il farad (F). Essa corrisponde al prodotto di un siemens (unità di misura della conduttanza) per un secondo. Infatti:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{I}{V} \cdot t = G \cdot t = \text{Siemens} \cdot \text{secondo} = \text{farad} .$$

Il farad è quindi la capacità di un condensatore che sottoposto alla tensione di un volt, si carica con la quantità di elettricità di un coulomb. È una unità molto grande. Per avere l'idea della grandezza di un farad, si considerino le dimensioni che assumerebbe un condensatore della capacità di un farad, costituito, per esempio, da due armature piane distanti un millimetro e isolate in aria. La superficie delle armature dovrebbe essere:

$$S = C \frac{d}{\epsilon} = 1 \frac{0,001}{8,858 \cdot 10^{-12}} = 113.000.000 \text{ m}^2 \text{ circa} .$$

In pratica si usano i sottomultipli del farad, e cioè:

millifarad	$mF = 10^{-3}$	farad	
microfarad	$\mu F = 10^{-6}$	farad	
millimicrofarad	$m\mu F = 10^{-9}$	farad	detto anche nanofarad $nF$
micromicrofarad	$\mu\mu F = 10^{-12}$	farad	detto anche picofarad $pF$ .

Si osservi l'analogia tra la capacità dei condensatori e la conduttanza dei conduttori.

La formula strutturale della capacità  $C = \epsilon \frac{S}{d}$  è analoga alla formula della conduttanza  $G = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{S}{l}$ , se si fa corrispondere alla costante dielettrica  $\epsilon$  l'inverso della resistività  $\frac{1}{\rho}$  (o conduttività  $\gamma$ ), alla superficie  $S$  delle armature la sezione  $S$  del conduttore e alla distanza  $d$  tra le armature la lunghezza  $l$  del conduttore.

Si può anche pensare che l'inverso della capacità sia una specie di resistenza che incontrerebbe una delle armature del condensatore, se fosse libera di spostarsi parallelamente a se stessa fino a raggiungere l'altra, così come avviene per le cariche elettriche che si spostano lungo il conduttore per portarsi da un potenziale ad un altro.

Tale analogia risulterà ancor più evidente nelle formule funzionali relative ai collegamenti tra condensatori.

TABELLA 7 Rigidità dielettrica e permittività relativa degli isolanti più comuni.

Isolante	Rigidità dielettrica in V per mm	Costante dielettrica relativa $\epsilon_r$
Acqua pura	—	78-81
Aria secca	2.400	1
Bachelite	10.000-12.000	5,5-8,8
Carta paraffinata	40.000-50.000	2,5-4
Ebanite	30.000-60.000	2-3,5
Gomma elastica	16.000-30.000	2,1-2,3
Marmo	1.000-1.400	6-8,3
Mica chiara	60.000-80.000	4-8
Micanite	30.000-40.000	4,5-5
Olii da trasformatore	11.500-17.000	2-2,5
Porcellana	10.000-12.000	4,4-6,8
Vetro comune	10.000-20.000	5-10

Oltre ai condensatori piani, costituiti cioè da due armature piane disposte parallelamente tra loro, si possono avere:

a) **condensatori cilindrici concentrici**, come quelli determinati dai cavi elettrici costituiti da un conduttore centrale o anima e da un involucro metallico esterno o armatura, separati da un isolante (fig. 6.15).

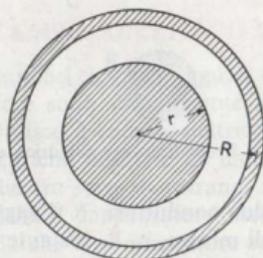


Fig. 6.15 - Il condensatore cilindrico concentrico.

Indicando con  $r$  il raggio del conduttore e con  $R$  il raggio medio dell'armatura, espressi entrambi nella stessa unità di misura, con  $\epsilon_r$  ed  $\epsilon_0$  rispettivamente la costante dielettrica relativa ed assoluta dell'isolante e con  $l$  la lunghezza, espressa in metri, del cavo, la capacità  $C$  è data dalla seguente espressione:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,434 \cdot \epsilon_a l}{\log \frac{R}{r}} \text{ farad ,} \quad (6.5)$$

sostituendo, al posto di  $\epsilon_a$  la  $\epsilon_r$ , si ha:

$$C = \frac{24 \cdot 10^{-12} \epsilon_r}{\log \frac{R}{r}} \text{ farad per ogni metro di cavo ,} \quad (6.6)$$

oppure:

$$C = \frac{0,024 \epsilon_r}{\log \frac{R}{r}} \text{ microfarad per ogni Km di cavo .} \quad (6.7)$$

b) **condensatori cilindrici esterni**, come quelli formati da due conduttori cilindrici paralleli di una linea elettrica (fig. 6.16). Per ogni metro di lunghezza, la capacità  $C$  della linea è data da:

$$C = \frac{\pi \cdot 0,434 \cdot \epsilon_0}{\log \frac{D}{R}} \text{ farad ,} \quad (6.8)$$

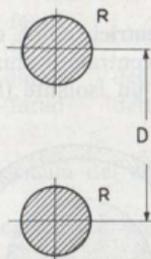


Fig. 6.16 - Il condensatore cilindrico esterno.

dove  $D$  è la distanza tra i due conduttori,  $R$  il raggio dei conduttori, espressi entrambi nella stessa unità di misura,  $\epsilon_0$  la costante dielettrica dell'aria, espressa in  $F/m$ . Oppure:

$$C = \frac{0,012}{\log \frac{D}{R}} \text{ microfarad per ogni Km di linea .} \quad (6.9)$$

c) **condensatori piano-cilindrici**, come quelli ottenuti tra un conduttore aereo di una linea di trasmissione dell'energia elettrica e la terra. Essendo  $D$  la distan-

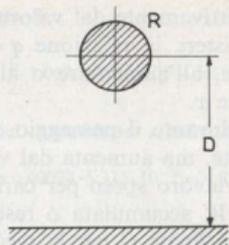


Fig. 6.17 - Il condensatore piano-cilindrico.

za tra il filo aereo e la terra (fig. 6.17),  $R$  il raggio del conduttore, espressi entrambi nella stessa unità di misura,  $\epsilon_0$  la costante dielettrica dell'aria e  $l$  la lunghezza in metri del conduttore, la capacità  $C$  è data da:

$$C = \frac{2 \cdot \pi \cdot 0,434 \cdot \epsilon_0 l}{\log \frac{2D}{R}} \text{ farad.} \quad (6.10)$$

Oppure risolvendo ed esprimendo la capacità in microfarad per ogni Km di conduttore:

$$C = \frac{0,0241}{\log \frac{2D}{R}} \quad (6.11)$$

## 6.5. L'ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO DI UN CONDENSATORE

Abbiamo detto che le cariche elettriche uguali ed opposte condensate sulle armature di un condensatore sono virtualmente legate fra loro da un fascio di linee di forza, che costituisce il campo elettrico.

Per tenere separate le cariche negative di un'armatura dalle cariche positive dell'altra armatura, che fra loro si attirano, occorre spendere un lavoro corrispondente all'energia che il condensatore assorbe dal generatore durante la carica, oppure all'energia che il condensatore restituisce durante la scarica.

Tale energia non risiede nelle cariche elettriche, bensì nel campo elettrico e quindi nel dielettrico interposto tra le armature.

La valutazione di essa è facile se si considera che per caricare (o scaricare) un condensatore, occorre trasportare tante cariche unitarie  $q$  da una armatura all'altra, fino a raggiungere (o ad annullare) un determinato valore  $Q$ , e che per ogni carica elementare  $q$  trasportata, la tensione fra le armature cresce (o diminuisce) di un certo valore  $v$ . La quantità di cariche e la tensione crescono

cioè progressivamente e rispettivamente dal valore zero al valore finale  $Q$  e  $V$ . Infatti dovendo sempre sussistere la relazione  $q = C \cdot v$ , dove  $C$ , capacità del condensatore, è una costante, all'aumentare o al diminuire di  $q$ , aumenta o diminuisce proporzionalmente  $v$ .

Considerando allora che durante il passaggio della carica totale  $Q$ , la tensione non si mantiene costante, ma aumenta dal valore zero al valore finale  $V$ , o diminuisce da  $V$  a zero, il lavoro speso per caricare o per scaricare un condensatore e perciò l'energia  $W$  accumulata o restituita dal campo elettrico, è data dal prodotto della carica finale  $Q$  per la media della tensione  $V$  ottenuta od annullata, che è evidentemente data da  $\frac{1}{2} V$ .

Si ha pertanto:

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot V, \quad (6.12)$$

sostituendo al posto di  $Q$  il valore  $C \cdot V$  si ottiene:

$$W = \frac{1}{2} C \cdot V^2, \quad (6.13)$$

sostituendo al posto di  $V$  il valore  $Q/C$  si ottiene:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C}. \quad (6.14)$$

L'energia viene espressa in joule, quando  $C$  è espresso in farad,  $V$  in volt e  $Q$  in coulomb.

#### Esempio numerico

Un condensatore piano costituito da due armature di  $40 \text{ cm}^2$  di superficie e isolate con un foglio di mica dello spessore di un mm, viene caricato alla tensione di 500 volt.

Calcolare la quantità di elettricità  $Q$  e l'energia  $W$  assorbite.

Se poi il condensatore viene scaricato attraverso una resistenza  $R$ , quante calorie si sono sviluppate in questa?

#### Soluzione

Calcolo della capacità  $C$  del condensatore.

Dalla tabella n. 7 si ricava la  $\epsilon_r$  della mica:

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \frac{S}{d} = 8,858 \cdot 10^{-12} \cdot 6 \cdot \frac{0,004}{0,001} = 212,6 \cdot 10^{-12} \text{ farad.}$$

Calcolo della quantità di elettricità  $Q$ :

$$Q = C \cdot V = 212,6 \cdot 10^{-12} \cdot 500 = 1,063 \cdot 10^{-10} \text{ coulomb.}$$

Calcolo dell'energia immagazzinata  $W$ :

$$W = \frac{1}{2} Q \cdot V = \frac{1}{2} 1,063 \cdot 10^{-10} \cdot 500 = 5,315 \cdot 10^{-8} \text{ joule .}$$

L'energia  $W$  durante la scarica del condensatore si trasforma nella resistenza  $R$  in calore:

$$Q = 0,00024 W = 0,00024 \cdot 5,315 \cdot 10^{-8} = 1,27 \cdot 10^{-8} \text{ calorie .}$$

## 6.6. RISPOSTA DI UN CIRCUITO RC AD UNA TENSIONE A GRADINO

La carica e la scarica di un condensatore  $C$ , in pratica, avvengono sempre attraverso una resistenza  $R$  più o meno elevata.

Infatti la carica avviene collegando le armature del condensatore ai poli di un generatore. Potendo anche minimizzare la resistenza dei conduttori di collegamento, nel circuito è sempre presente la resistenza interna del generatore, per cui il circuito di carica è, in ogni caso, caratterizzato dalle due costanti  $R$  e  $C$ .

La scarica può avvenire in vari modi:

- a) **Scarica conduttiva.** Si ha quando le armature del condensatore vengono collegate mediante un conduttore; in questo si ha un passaggio di elettroni dall'armatura negativa a quella positiva, con conseguente neutralizzazione delle cariche elettriche;
- b) **Scarica convettiva.** Può verificarsi quando il dielettrico è un gas. Se in esso si trovano particelle ionizzate, queste, sotto l'azione del campo elettrico, si spostano verso l'armatura di nome opposto, cedendo elettroni all'armatura positiva e sottraendo elettroni all'armatura negativa, sino ad eguagliare i potenziali o a ridurne la differenza. Per questo motivo i condensatori isolati in aria non possono mantenere inalterata la loro carica per lungo tempo;
- c) **Scarica distruttiva.** Si manifesta quando la d.d.p. tra le armature ha un valore tale da determinare un gradiente di potenziale superiore alla rigidità dielettrica dell'isolante. Si ha allora un violento passaggio di elettroni attraverso il dielettrico (perforazione) dall'armatura negativa a quella positiva, con conseguente neutralizzazione del campo e distruzione dell'isolante.

Un condensatore può scaricarsi anche attraverso la massa di un dielettrico solido se questo è difettoso, oppure lungo la superficie esterna del dielettrico per effetto della conducibilità superficiale dovuta all'umidità e al deposito di polvere o di particelle conduttrici.

Nei circuiti pratici, la scarica di un condensatore è sempre di tipo conduttivo, ma, in ogni caso, essa avviene attraverso la resistenza del mezzo, più o meno conduttore, che collega le due armature. Dunque anche il circuito di scarica è caratterizzato dalle due costanti  $R$  e  $C$ .

È importante conoscere, per calcolare alcuni tipici circuiti elettronici, il tempo che impiega un condensatore a caricarsi e a scaricarsi attraverso una resistenza e l'andamento che assumono la tensione e le correnti di carica e di scarica in funzione del tempo, quando al condensatore viene applicata una tensione costante in un tempo nullo, ossia una *tensione a gradino*, o quando un condensatore carico viene chiuso in un tempo nullo su una resistenza di scarica.

### 1) Leggi di carica di un condensatore

Consideriamo il circuito di fig. 6.18 e supponiamo che il condensatore  $C$  sia inizialmente scarico. Portando il deviatore in posizione 1, il condensatore viene collegato al generatore di f.e.m.  $E$  attraverso la resistenza interna  $R_0$  e la resistenza  $R_1$  del circuito. Indichiamo con  $R_c$  la resistenza complessiva del circuito di carica, ossia  $R_c = R_0 + R_1$ .

La funzione del generatore è di caricare il condensatore, cioè di inviargli una quantità di cariche  $Q_c$  fino a che la tensione  $V_c$  tra le armature raggiunge il valore della f.e.m.  $E$ , ossia  $V_c = E = Q_c/C$ .

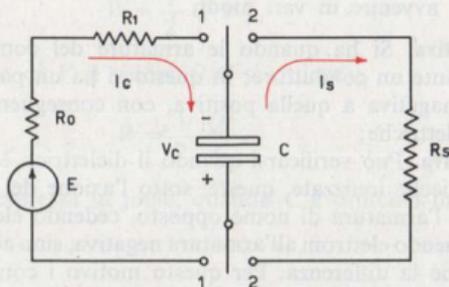


Fig. 6.18 - Circuito per la carica e la scarica di un condensatore.

Il fenomeno non può avvenire istantaneamente, anche se il deviatore viene chiuso in un tempo nullo. Infatti, il generatore per fornire energia al condensatore in un tempo nullo dovrebbe possedere una potenza infinita. Del resto si può considerare che, essendo  $Q_c = I_c \cdot t$  ed essendo  $I_c$  inversamente proporzionale alla resistenza  $R_c$  del circuito e alla f.c.e.m.  $V_c$  che il condensatore assume durante la carica, la sola presenza della  $R_c$  (che al limite può essere ridotta al valore  $R_0$ ) condiziona il valore della  $I_c$  e perciò quello di  $t$  che aumenta o diminuisce rispettivamente con il diminuire o l'aumentare della  $I_c$ .

Dunque la carica di un condensatore non può che avvenire in un certo tempo  $T$ , che verrà meglio definito, detto *periodo transitorio di carica*.

Le leggi che stabiliscono l'andamento della tensione  $V_c$  e della corrente  $I_c$  durante il periodo transitorio di carica, o, come si suol dire, la risposta del cir-

cuito  $RC$  alla tensione a gradino  $E$  del generatore (supposto nullo il tempo di chiusura del deviatore), sono espresse da equazioni di tipo esponenziale.

Occorre innanzi tutto ammettere che in un qualsiasi istante della carica, la tensione  $E$  applicata deve fare equilibrio sia alla caduta di tensione  $V_r = R_c I_c$  che alla f.c.e.m.  $V_c$  che si stabilisce tra le armature del condensatore.

Quindi:

$$E = R_c \cdot I_c + V_c ,$$

da cui:

$$I_c = \frac{E - V_c}{R_c} , \quad (6.15)$$

mentre in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , la variazione  $\Delta V_c$  che subisce la tensione fra le armature del condensatore, vale:

$$\Delta V_c = \frac{I_c \Delta t}{C} . \quad (6.16)$$

Sostituendo in quest'ultima espressione, al posto della  $I_c$ , la (6.15) si ha:

$$\Delta V_c = \frac{(E - V_c) \Delta t}{R_c \cdot C} ,$$

da cui:

$$\frac{\Delta V_c}{\Delta t} = \frac{E - V_c}{R_c \cdot C} . \quad (6.17)$$

La (6.17) rappresenta una tangente, ossia una generica pendenza della tensione  $V_c$  rispetto all'asse dei tempi in qualsiasi istante della carica. Ciò signi-

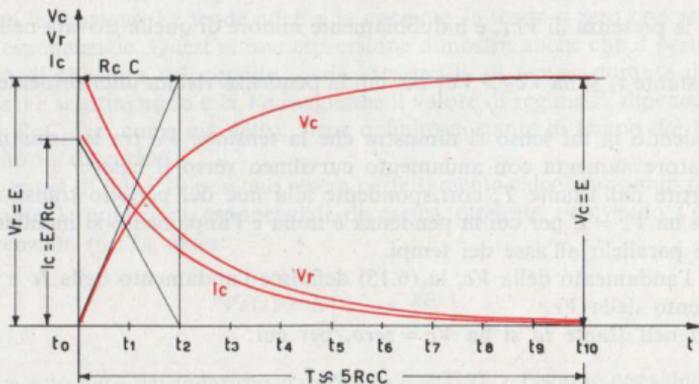


Fig. 6.19 - Andamento delle tensioni e della corrente di carica di un condensatore.

fica che la tensione alle armature del condensatore non può stabilirsi istantaneamente, ma raggiungerà il suo valore massimo  $V_c = E$  dopo un certo tempo  $T$  (in realtà tale tempo tende all'infinito, ma in pratica si può ritenere finito purché preso sufficientemente maggiore del prodotto  $RcC$ ).

Per definire, in prima approssimazione, l'andamento della  $V_c$ , della  $V_r$ , e della  $I_c$ , durante la fase di carica, consideriamo il grafico di fig. 6.19, dove sulle ascisse sono riportati i tempi  $t$  e sulle ordinate le tensioni  $V_c$  e  $V_r$  e la corrente  $I_c$  e calcoliamo mediante la (6.17) la pendenza che  $V_c$  assume rispetto all'asse dei tempi ad intervalli costanti, partendo dall'istante  $t_0$ .

Nell'istante  $t_0$  si ha  $V_c = 0$  e perciò:

$$\left(\frac{\Delta V_c}{\Delta t}\right)_{t_0} = \frac{E}{RcC},$$

il che dimostra che la tensione  $V_c$  tende a nascere con una ben determinata pendenza caratterizzata dal prodotto  $RcC$ , detto *costante di tempo del fenomeno transitorio di carica*, perché omogeneo ad un tempo:

$$Rc \cdot C = \text{ohm} \cdot \text{siemens} \cdot \text{sec} = \text{ohm} \frac{1}{\text{ohm}} \text{sec} = \text{sec}.$$

Tale costante rappresenta quell'intervallo di tempo che occorrerebbe alla  $V_c$  per raggiungere il valore di regime  $E$  se continuasse a salire con la pendenza iniziale.

Senonché nell'istante  $t_1$  si ha  $V_{c1} > 0$  e la pendenza vale:

$$\left(\frac{\Delta V_c}{\Delta t}\right)_{t_1} = \frac{E - V_{c1}}{RcC},$$

che, per la presenza di  $V_{c1}$ , è indubbiamente minore di quella trovata nell'istante  $t_0$ .

Nell'istante  $t_2$  si ha  $V_{c2} > V_{c1}$  per cui la pendenza risulta ulteriormente diminuita.

Procedendo in tal senso si dimostra che la tensione  $V_c$  tra le armature del condensatore aumenta con andamento curvilineo verso il basso.

A partire dall'istante  $T$ , corrispondente alla fine del periodo transitorio di carica, si ha  $V_c = E$  per cui la pendenza è nulla e l'andamento si mantiene rettilineo e parallelo all'asse dei tempi.

Nota l'andamento della  $V_c$ , la (6.15) definisce l'andamento della  $I_c$  e perciò l'andamento della  $V_r$ .

Infatti nell'istante  $t_0$  si ha  $V_c = \text{zero}$ , per cui:

$$I_c = \frac{E}{Rc},$$

da cui si deduce che la  $I_c$  è massima e che la tensione  $E$  di alimentazione risulta applicata per intero ai capi della sola  $R_c$ .

Nell'istante  $t_1$  si ha  $V_{c1} > \text{zero}$ , per cui l'intensità della corrente:

$$I_c = \frac{E - V_{c1}}{R_c},$$

è minore della precedente di quanto corrispondentemente è aumentata la  $V_c$  e diminuita la  $V_r$ . Procedendo in tal senso si nota che la corrente  $I_c$  e la caduta di tensione  $V_r$  decrescono con andamento curvilineo simmetrico a quello della  $V_c$ . Terminato il periodo transitorio  $T$  di carica del condensatore, la  $I_c$  e la  $V_r$  si sono azzerate e la tensione  $E$  di alimentazione si è trasferita per intero sulla  $C$ , dovendo essere, dopo il periodo  $T$ ,  $V_c = E$ .

Per meglio definire l'andamento curvilineo della  $V_r$ , della  $V_c$  e della  $I_c$ , si può introdurre un secondo concetto.

Durante il periodo transitorio di carica del condensatore, la tensione  $E$  di alimentazione si trasferisce dalla  $R_c$  alla  $C$ ; ciò vuol dire che per un qualsiasi intervallo di tempo  $\Delta t$ :

$$\Delta V_r = - \Delta V_c = \frac{V_r \Delta t}{R_c C},$$

da cui:

$$\frac{\Delta V_r}{V_r} = \frac{\Delta t}{R_c C},$$

il che dimostra che ad intervalli di tempo  $\Delta t$  costanti, la diminuzione percentuale di  $V_r$  è costante, e perciò l'andamento della  $V_r$  è esponenziale. Di conseguenza la tensione  $V_c$  tende ad  $E$  e la corrente  $I_c$  tende a zero con andamento pure esponenziale. Quest'ultima espressione dimostra anche che il periodo transitorio di chiusura del circuito, ossia l'intervallo di tempo durante il quale la  $I_c$  e la  $V_r$  si estinguono e la  $V_c$  raggiunge il valore di regime  $E$ , dipende dal prodotto  $R_c C$  che, come già detto, viene definito costante di tempo del fenomeno transitorio di carica.

Le curve di fig. 6.19 possono essere perfettamente calcolate istante per istante mediante le equazioni esponenziali di carica ottenute risolvendo l'equazione differenziale (6.17), ossia:

$$V_c(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{R_c C}} \right). \quad (6.18)$$

dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali ( $e = 2,718$ ),  $t$  l'istante considerato,  $R_c C$  la costante di tempo del circuito di carica ed  $E$  la f.e.m. del generatore.

Sostituendo la (6.18) nella (6.15) si ottiene anche l'equazione esponenziale della corrente di carica:

$$I_c(t) = \frac{E}{Rc} e^{-\frac{t}{RcC}}. \quad (6.19)$$

Dalle due equazioni suesposte si deduce che  $V_c$  tende a  $E$  e  $I_c$  tende a zero, per  $t$  tendente all'infinito, per cui anche il periodo transitorio di carica  $T$  dovrebbe tendere all'infinito. In pratica invece, la carica può ritenersi ultimata quando la tensione  $V_c$  differisce da  $E$  per meno dell'1% o quando la corrente  $I_c$  è ridotta nel circuito a valori trascurabili. Tali condizioni si ottengono quando il periodo transitorio di carica  $T$  corrisponde a circa 5 volte la costante di tempo  $RcC$ :

$$T \approx 5 RcC.$$

Dopo tale periodo le variazioni della  $V_c$  e della  $I_c$  sono così lente che per raggiungere la piena carica occorrerebbe attendere appunto un tempo infinito.

Per tracciare le curve della  $V_c$  e della  $I_c$ , note le costanti  $Rc$  e  $C$  del circuito di carica e la f.e.m.  $E$  del generatore, conviene considerare, per semplificare il calcolo, intervalli di tempo multipli interi della costante di tempo  $RcC$ , così da ottenere nelle equazioni (6.18) e (6.19) potenze di  $e$  con esponente intero.

## 2) Leggi di scarica di un condensatore

Riprendiamo il circuito di fig. 6.18. Ultimata la carica del condensatore, si porta il deviatore in posizione 2. Il condensatore, chiuso sulla resistenza  $R_s$ , incomincia a scaricarsi.

Anche il fenomeno della scarica, come quello della carica, non può avvenire istantaneamente, perché non è possibile che l'energia elettrostatica accumulata nel condensatore durante la carica, venga dissipata in calore nella resistenza  $R_s$  di scarica in un tempo nullo.

Occorrerà quindi un certo intervallo di tempo affinché la tensione  $V_c = E$  si azzeri e di conseguenza si annulli anche la corrente  $I_s$  di scarica che, osserviamo subito, fluirà in senso opposto a quello della corrente di carica.

All'inizio della scarica, la  $V_c$  è dunque massima e darà origine ad una corrente  $I_s$ , pure massima, dovendo essere:

$$I_s = \frac{V_c}{R_s} = \frac{E}{R_s}, \quad (6.20)$$

come rappresentato nell'istante  $t_0$  del grafico di fig. 6.20.

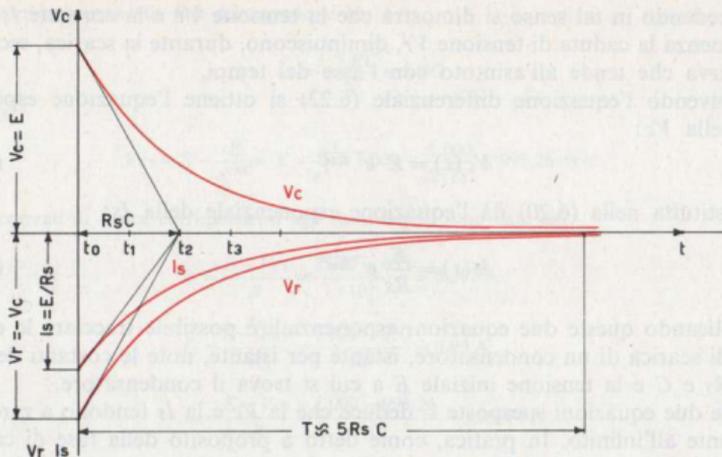


Fig. 6.20 - Andamento della tensione e della corrente di scarica di un condensatore.

Dopo un intervallo di tempo  $\Delta t$ , la variazione  $\Delta V_c$  che subisce la tensione tra le armature del condensatore, vale:

$$\Delta V_c = \frac{I_s \Delta t}{C} \quad (6.21)$$

Sostituendo in  $I_s$  la (6.20) si ha:

$$\Delta V_c = \frac{E \Delta t}{R_s C},$$

e quindi:

$$\frac{\Delta V_c}{\Delta t} = \frac{E}{R_s C}, \quad (6.22)$$

da cui si deduce che nell'istante  $t_0$ , dovendo essere ancora  $V_c = E$ , la pendenza con cui la  $V_c$  (e di conseguenza la  $I_s$ ) tende a diminuire è massima e vale:

$$\left( \frac{\Delta V_c}{\Delta t} \right)_{t_0} = \frac{E}{R_s C},$$

dove  $R_s C$  è la costante di tempo del fenomeno transitorio di scarica.

Nell'istante  $t_1$ , essendo  $V_{c1} < E$ , la pendenza di  $V_c$  (e di  $I_s$ ) decresce. Nell'istante  $t_2$ , dovendo essere  $V_{c2} < V_{c1}$ , la pendenza decresce ulteriormente.

Procedendo in tal senso si dimostra che la tensione  $V_c$  e la corrente  $I_s$ , e di conseguenza la caduta di tensione  $V_r$ , diminuiscono, durante la scarica, secondo una curva che tende all'asintoto con l'asse dei tempi.

Risolviendo l'equazione differenziale (6.22) si ottiene l'equazione esponenziale della  $V_c$ :

$$V_c(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{R_s C}}, \quad (6.23)$$

che sostituita nella (6.20) dà l'equazione esponenziale della  $I_s$ :

$$I_s(t) = \frac{E}{R_s} e^{-\frac{t}{R_s C}}. \quad (6.24)$$

Applicando queste due equazioni esponenziali è possibile tracciare le esatte curve di scarica di un condensatore, istante per istante, note le costanti del circuito  $R_s$  e  $C$  e la tensione iniziale  $E$  a cui si trova il condensatore.

Dalle due equazioni suesposte si deduce che la  $V_c$  e la  $I_s$  tendono a zero per  $t$  tendente all'infinito. In pratica, come detto a proposito della fase di carica, il periodo transitorio  $T$  della scarica si fa coincidere a circa 5 volte la costante di tempo  $R_s C$ , potendosi ritenere quasi nullo (a meno dell'1%), dopo tale periodo, sia il valore di  $V_c$  che l'intensità di  $I_s$ .

#### Esempio numerico

Calcolare il valore della  $V_c$  che si stabilisce tra le armature di un condensatore di  $2 \mu\text{F}$  a un quinto, a tre quinti e alla fine del periodo transitorio, sapendo che la f.e.m. del generatore è di  $1.000 \text{ V}$  e che la resistenza del circuito di carica è di  $1 \text{ Kohm}$ . Calcolare inoltre l'intensità della corrente di carica in corrispondenza agli stessi istanti. Volendo poi scaricare lo stesso condensatore in  $10^{-4} \text{ sec}$ , calcolare la resistenza del circuito di scarica.

#### Soluzione

In corrispondenza di  $1/5$  di periodo si ha:

$$t_1 = \frac{5 RC}{5} = RC,$$

per cui la tensione tra le armature del condensatore vale:

$$V_{c1} = E - \frac{E}{e^{t/RC}} = E - \frac{E}{e} = 1.000 - \frac{1.000}{2,718} = 633 \text{ volt}.$$

In corrispondenza di  $3/5$  di periodo si ha:

$$t_2 = \frac{3 \cdot 5 RC}{5} = 3 RC,$$

per cui,

$$V_{c2} = E - \frac{E}{e^{t/RC}} = E - \frac{E}{e^3} = 1.000 - \frac{1.000}{2,718^3} = 950 \text{ volt}.$$

In corrispondenza alla fine del periodo si ha:

$$t_3 = \frac{5 \cdot 5 RC}{5} = 5 RC,$$

e quindi,

$$V_{C_3} = E - \frac{E}{e^{t/RC}} = E - \frac{E}{e^5} = 1.000 - \frac{1.000}{2,718^5} = 993,26 \text{ volt}.$$

Le correnti di carica corrispondenti agli stessi istanti sono date da:

$$I_1 = \frac{E - V_{C_1}}{R} = \frac{1.000 - 633}{10^3} = 0,367 \text{ A},$$

$$I_2 = \frac{E - V_{C_2}}{R} = \frac{1.000 - 950}{10^3} = 0,05 \text{ A},$$

$$I_3 = \frac{E - V_{C_3}}{R} = \frac{1.000 - 993,26}{10^3} = 0,00674 \text{ A}.$$

Si osservi che alla fine del periodo la  $V_C$  tende a  $E$  per meno dell'1 % e che la  $I$  raggiunge un valore trascurabile.

La resistenza  $R_s$  del circuito di scarica è data da:

$$R_s = \frac{t}{5C} = \frac{10^{-4}}{5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ ohm}.$$

## 6.7. RAGGRUPPAMENTI DI CONDENSATORI ELETTRICI

I condensatori, come le resistenze e i generatori elettrici, possono essere collegati tra loro in serie, in parallelo e in modo misto.

Di ciascun collegamento si vuol calcolare la capacità equivalente  $C_t$ , la quantità di elettricità totale  $Q_t$ , le quantità  $q$  e la tensione  $V$  di ciascun condensatore, noti la tensione  $V_t$  applicata al collegamento e il valore  $C$  di ciascun condensatore.

Ai fini del calcolo occorre però distinguere i collegamenti di condensatori scarichi sottoposti ad un generatore elettrico e il collegamento di condensatori precaricati a tensioni diverse.

### a) Collegamento serie di condensatori sotto generatore

I condensatori collegati in serie (fig. 6.21) risultano caricati con la stessa quantità di elettricità  $Q$ . Infatti per effetto del fenomeno dell'induzione elettrostatica, sulle armature immerse nel campo elettrico generato dalla tensione  $V_t$  applicata all'intera serie, affiorano ugual numero di cariche alternativamente

di segno opposto, per cui la quantità di elettricità totale  $Q$  è la stessa in ciascun condensatore e in tutti i punti del circuito:

$$Q_t = q_1 = q_2 = q_3. \quad (6.25)$$

I condensatori risultano allora sottoposti rispettivamente alla tensione:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2} \quad V_3 = \frac{Q}{C_3}, \quad (6.26)$$

da cui si deduce che le tensioni sono inversamente proporzionali alle capacità  $C$ , e che, perciò, il condensatore di minore capacità risulta sottoposto alla tensione maggiore.

La capacità equivalente  $C_t$  del sistema si ricava da:

$$C_t = \frac{Q_t}{V_t} = \frac{Q}{V_1 + V_2 + V_3} = \frac{Q}{\frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}}, \quad (6.27)$$

La capacità equivalente di un gruppo di condensatori in serie è data dall'inverso della somma degli inversi di ciascuna capacità.

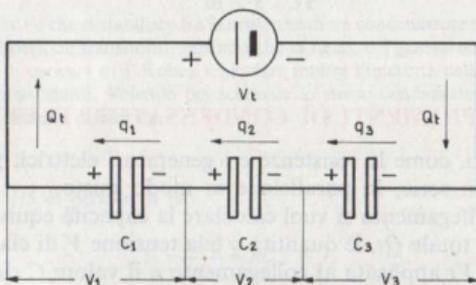


Fig. 6.21 - Condensatori in serie.

Le capacità, come s'è detto, si comportano come le conduttanze e difatto la formula della capacità totale  $C_t$  è analoga a quella della conduttanza totale  $G_t$  di un collegamento di resistenze in serie.

Per il calcolo della capacità equivalente di due soli condensatori in serie si può usare l'espressione:

$$C_t = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}. \quad (6.28)$$

Se poi i condensatori hanno la stessa capacità  $C$ , la capacità equivalente è:

$$C_t = \frac{C}{s}, \quad (6.29)$$

dove  $s$  è il numero dei condensatori in serie.

L'energia accumulata da ciascun condensatore è data da:

$$W_1 = \frac{1}{2} C_1 V_1^2 \text{ oppure } W_1 = \frac{1}{2} Q V_1 \text{ oppure } W_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_1},$$

$$W_2 = \frac{1}{2} C_2 V_2^2 \text{ oppure } W_2 = \frac{1}{2} Q V_2 \text{ oppure } W_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_2},$$

$$W_3 = \frac{1}{2} C_3 V_3^2 \text{ oppure } W_3 = \frac{1}{2} Q V_3 \text{ oppure } W_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C_3}.$$

L'energia complessiva dell'intero collegamento si ricava facilmente:

$$W_t = \frac{1}{2} Q_t \cdot V_t = \frac{1}{2} Q (V_1 + V_2 + V_3) = \frac{1}{2} Q V_1 + \frac{1}{2} Q V_2 + \frac{1}{2} Q V_3.$$

*L'energia totale di un gruppo di condensatori collegati in serie è data dunque dalla somma delle energie dei singoli condensatori.*

Il collegamento in serie si usa quando si vuole ottenere una capacità minore della più piccola capacità dei condensatori collegati.

#### Esempio numerico

Tre condensatori della capacità  $C_1 = 60 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 16 \mu\text{F}$  e  $C_3 = 48 \mu\text{F}$  sono collegati in serie. La tensione  $V_2$  alle armature del secondo condensatore risulta di 500 volt.

Calcolare la quantità di elettricità totale  $Q_t$ , la tensione alle armature del primo e del terzo condensatore, la tensione totale  $V_t$  e l'energia totale  $W_t$ .

#### Soluzione

Nota la tensione e la capacità del secondo condensatore, si può calcolare la quantità di elettricità totale  $Q_t$ :

$$Q_t = C_2 V_2 = 16 \cdot 500 = 8.000 \mu\text{C}.$$

Calcolo della capacità equivalente  $C_t$ :

$$C_t = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}} = \frac{1}{\frac{1}{60} + \frac{1}{16} + \frac{1}{48}} = 10 \mu\text{F}.$$

Calcolo della tensione totale  $V_t$ :

$$V_t = \frac{Q_t}{C_t} = \frac{8.000}{10} = 800 \text{ volt}.$$

La tensione  $V_1$  alle armature del primo condensatore è:

$$V_1 = \frac{Qt}{C_1} = \frac{8.000}{60} = \frac{400}{3} \text{ volt.}$$

La tensione  $V_3$  alle armature del terzo condensatore è:

$$V_3 = \frac{Qt}{C_3} = \frac{8.000}{48} = \frac{500}{3} \text{ volt.}$$

Per verifica, la tensione totale  $V_t$  è data da:

$$V_t = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{400}{3} + 500 + \frac{500}{3} = 800 \text{ volt.}$$

L'energia complessiva  $W_t$  si può calcolare con l'espressione:

$$W_t = \frac{1}{2} C_t V_t^2 = \frac{1}{2} 10 \cdot 10^{-6} \cdot 800^2 = 3,2 \text{ joule.}$$

### b) Collegamento parallelo di condensatori sotto generatore

Ciascun condensatore è sottoposto alla medesima tensione  $V$  di alimentazione, per cui:

$$V_t = V_1 = V_2 = V_3.$$

La quantità di elettricità totale  $Qt$  si distribuisce in ciascun condensatore secondo valori direttamente proporzionali alle capacità:

$$q_1 = V \cdot C_1 \quad q_2 = V \cdot C_2 \quad q_3 = V \cdot C_3,$$

e vale la somma delle singole quantità:

$$Qt = q_1 + q_2 + q_3.$$

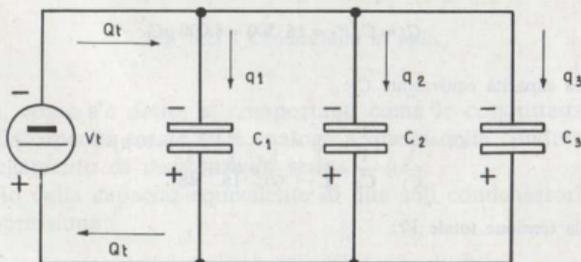


Fig. 6.22 - Condensatori in parallelo.

La capacità totale  $C_t$  si ricava da:

$$C_t = \frac{Q_t}{V_t} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{V} = \frac{VC_1 + VC_2 + VC_3}{V} = C_1 + C_2 + C_3. \quad (6.30)$$

La capacità equivalente di un gruppo di condensatori in parallelo (fig. 6.22) è data dunque dalla somma delle singole capacità.

Si osserva ancora che, all'effetto del calcolo, le capacità in parallelo si comportano come le conduttanze in parallelo.

Se i condensatori hanno tutti la medesima capacità  $C$ , la capacità equivalente  $C_t$  è anche:

$$C_t = p \cdot C, \quad (6.31)$$

dove  $p$  è il numero dei condensatori in parallelo.

L'energia complessiva  $W_t$  è:

$$W_t = \frac{1}{2} Q_t \cdot V_t = \frac{1}{2} V(q_1 + q_2 + q_3) = \frac{1}{2} V \cdot q_1 + \frac{1}{2} V \cdot q_2 + \frac{1}{2} V \cdot q_3.$$

Quindi l'energia totale di un gruppo di condensatori in parallelo è data, come per i condensatori collegati in serie, dalla somma delle energie dei singoli condensatori.

#### Esempio numerico

Un collegamento di tre condensatori in parallelo è alimentato alla tensione  $V$  di 500 volt. Il primo condensatore ha la capacità  $C_1$  di  $50 \mu\text{F}$ , il secondo risulta con una quantità di elettricità  $q_2$  di  $20.000 \mu\text{C}$ , il terzo ha una capacità  $C_3$  di  $10 \mu\text{F}$ .

Calcolare la capacità  $C_2$  del secondo condensatore e la capacità totale  $C_t$ , le quantità  $q_1$  e  $q_3$  del primo e del terzo condensatore e la quantità totale  $Q_t$ .

#### Soluzione

Calcolo delle capacità  $C_2$  e  $C_t$ :

$$C_2 = \frac{q_2}{V} = \frac{20.000}{500} = 40 \mu\text{F},$$

$$C_t = C_1 + C_2 + C_3 = 50 + 40 + 10 = 100 \mu\text{F}.$$

Calcolo delle quantità  $q_1$ ,  $q_3$  e  $Q_t$ :

$$q_1 = C_1 V = 50 \cdot 500 = 25.000 \mu\text{C},$$

$$q_3 = C_3 V = 10 \cdot 500 = 5.000 \mu\text{C},$$

$$Q_t = q_1 + q_2 + q_3 = 25.000 + 20.000 + 5.000 = 50.000 \mu\text{C},$$

per verifica:

$$Qt = CtV = 100 \cdot 500 = 50.000 \mu C.$$

### c) Collegamento misto di condensatori sotto generatore

I collegamenti misti si possono ridurre ad un solo collegamento di condensatori in serie oppure in parallelo, mediante l'applicazione delle leggi del parallelo e della serie.

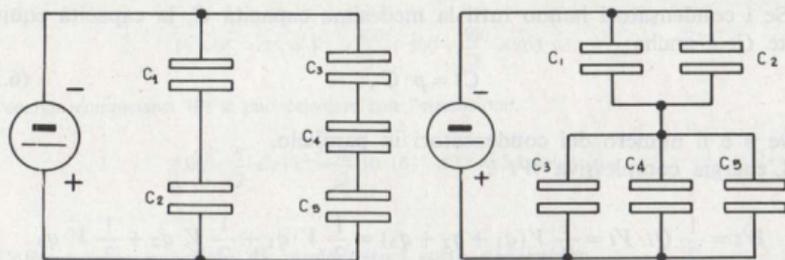


Fig. 6.23 - Condensatori in serie-parallelo (a) e condensatori in parallelo-serie (b).

Se i condensatori sono collegati in serie-parallelo (fig. 6.23-a), per calcolare la capacità equivalente, prima si risolve la serie e poi il parallelo. Se invece sono collegati in parallelo-serie (fig. 6.23-b), prima si risolve il parallelo e poi la serie.

Per collegamenti più complessi, la riduzione alle capacità equivalenti inizia dai collegamenti più interni, come si fa per la risoluzione delle espressioni matematiche con parentesi.

#### Esempio numerico

Un gruppo di condensatori della capacità  $C_1$  di  $45 \mu F$ ,  $C_2$  di  $35 \mu F$ ,  $C_3$  di  $20 \mu F$ ,  $C_4$  di  $40 \mu F$  e  $C_5$  di  $60 \mu F$ , sono collegati come in figura. La tensione  $V_4$  alle armature di  $C_4$  è di 240 volt.

Calcolare la capacità  $C_t$ , la quantità di elettricità totale  $Qt$ , la tensione totale applicata  $V_t$ , la quantità e la tensione di ciascun condensatore.

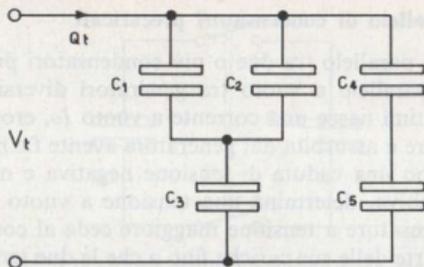
#### Soluzione

Calcolo della capacità totale  $C_t$ :

$$C_t = \frac{(C_1 + C_2) \cdot C_3}{C_1 + C_2 + C_3} + \frac{C_4 \cdot C_5}{C_4 + C_5} = \frac{(45 + 35) \cdot 20}{45 + 35 + 20} + \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 40 \mu F.$$

La quantità di elettricità  $Q_4$ , che poi è uguale a  $Q_5$ , è:

$$Q_4 = Q_5 = C_4 \cdot V_4 = 40 \cdot 240 = 9.600 \mu C.$$



La tensione  $V_5$  alle armature di  $C_5$  è allora:

$$V_5 = \frac{Q_5}{C_5} = \frac{9.600}{60} = 160 \text{ volt.}$$

La tensione totale applicata  $V_t$  è:

$$V_t = V_4 + V_5 = 240 + 160 = 400 \text{ volt.}$$

La quantità di elettricità totale  $Q_t$  è:

$$Q_t = C_t \cdot V_t = 40 \cdot 400 = 16.000 \mu C.$$

Calcolo della quantità di elettricità  $Q_{1,2}$ , che poi è uguale a  $Q_3$ :

$$Q_{1,2} = Q_3 = C_{1,2,3} \cdot V_t = 16 \cdot 400 = 6.400 \mu C,$$

per verifica,

$$Q_t = Q_{1,2,3} + Q_{4,5} = 6.400 + 9.600 = 16.000 \mu C.$$

La tensione  $V_{1,2}$  alle armature di  $C_1$  e  $C_2$  e la tensione  $V_3$  di  $C_3$  sono:

$$V_{1,2} = \frac{Q_{1,2,3}}{C_{1,2}} = \frac{6.400}{80} = 80 \text{ volt,}$$

$$V_3 = \frac{Q_{1,2,3}}{C_3} = \frac{6.400}{20} = 320 \text{ volt,}$$

per verifica:

$$V_t = V_{1,2} + V_3 = 80 + 320 = 400 \text{ volt.}$$

Calcolo delle quantità di elettricità  $Q_1$  e  $Q_2$  nei condensatori  $C_1$  e  $C_2$ :

$$Q_1 = V_{1,2} \cdot C_1 = 80 \cdot 45 = 3.600 \mu C,$$

$$Q_2 = V_{1,2} \cdot C_2 = 80 \cdot 35 = 2.800 \mu C.$$

#### d) Collegamento parallelo di condensatori precaricati

Il collegamento in parallelo tra due o più condensatori precaricati è analogo al collegamento in parallelo a vuoto tra generatori diversi.

Come in questi ultimi nasce una corrente a vuoto  $I_0$ , erogata dal generatore avente f.e.m. maggiore e assorbita dal generatore avente f.e.m. minore, la quale, provocando nel primo una caduta di tensione negativa e nel secondo una caduta di tensione positiva, determina una tensione a vuoto  $V_0$  comune ad entrambi, così il condensatore a tensione maggiore cede al condensatore caricato a tensione minore parte delle sue cariche fino a che le due tensioni si eguagliano.

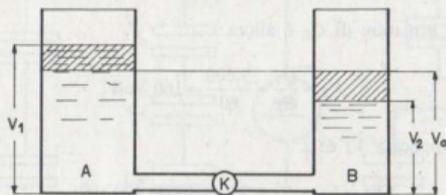


Fig. 6.24 - Il principio dei vasi comunicanti.

Unica differenza sta nel fatto che, mentre nei generatori la corrente perdura fino a che esiste il collegamento, nei condensatori il passaggio di cariche è momentaneo.

Per meglio comprendere il comportamento e l'assestamento delle cariche di due condensatori precaricati a tensione diversa collegati in parallelo, consideriamo due vasi comunicanti di capacità diverse  $C_1$  e  $C_2$  (fig. 6.24), contenenti rispettivamente una quantità d'acqua  $Q_1$  e  $Q_2$ , che determina livelli diversi  $V_1$  e  $V_2$ .

Per il principio dei vasi comunicanti, dal momento in cui la valvola  $K$  collega i due vasi, una certa quantità d'acqua passa dal vaso A a livello  $V_1$  maggiore, al vaso B a livello  $V_2$  minore, fino a che si stabilisce un livello  $V_0$  comune ai due vasi.

La quantità totale  $Q_t$  d'acqua rimane però la stessa sia prima che dopo il collegamento.

Analogamente, due condensatori di capacità  $C_1$  e  $C_2$ , precaricati rispettivamente alla tensione  $V_1$  e  $V_2$  (fig. 6.25), come vengono collegati, devono risultare caricati alla tensione comune  $V_0$ , non potendo sussistere tra i nodi A e B che una sola d.d.p.

Il passaggio di un certo numero  $Q_0$  di cariche elettriche dal condensatore  $C_1$  a tensione maggiore  $V_1$  al condensatore  $C_2$  a tensione minore  $V_2$ , non comporta teoricamente alcuna perdita, per cui la quantità di elettricità totale  $Q_t$  è la stessa sia prima che dopo il collegamento.

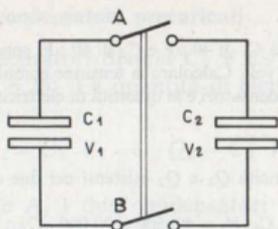


Fig. 6.25 - Condensatori precaricati in parallelo.

Indicando con  $Q_1$  e con  $Q_2$  le quantità di elettricità prima del collegamento e con  $Q'_1$  e con  $Q'_2$  le quantità dopo il collegamento, si ha:

$$Q_t = Q_1 + Q_2 = Q'_1 + Q'_2. \quad (6.32)$$

La capacità totale  $C_t$  è:

$$C_t = C_1 + C_2.$$

La tensione comune  $V_o$  che si è stabilita dopo il collegamento è:

$$V_o = \frac{Q_t}{C_t}. \quad (6.33)$$

La quantità di elettricità  $Q'_1$  e  $Q'_2$  che si hanno dopo il collegamento sono date da:

$$Q'_1 = V_o \cdot C_1 \quad Q'_2 = V_o \cdot C_2. \quad (6.34)$$

Gli stessi risultati si possono ottenere calcolando la quantità di elettricità  $Q_o$  che è passata da un condensatore all'altro. Tale quantità è dovuta alla differenza delle due tensioni  $V_1 - V_2$  e alla capacità equivalente dei due condensatori come se fossero collegati in serie:

$$Q_o = (V_1 - V_2) \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}. \quad (6.35)$$

Le quantità di elettricità  $Q'_1$  e  $Q'_2$  sono allora date da:

$$Q'_1 = Q_1 - Q_o \quad Q'_2 = Q_2 + Q_o. \quad (6.36)$$

La tensione comune  $V_o$  può essere calcolata con una delle due espressioni:

$$V_o = \frac{Q'_1}{C_1} \quad \text{oppure} \quad V_o = \frac{Q'_2}{C_2}. \quad (6.37)$$

### Esempio numerico

Due condensatori della capacità  $C_1$  di  $40 \mu\text{F}$  e  $C_2$  di  $60 \mu\text{F}$ , sono caricati rispettivamente alla tensione  $V_1$  di 500 volt e  $V_2$  di 1.000 volt. Calcolare la tensione comune  $V_0$  che si stabilisce dopo il collegamento in parallelo dei due condensatori e le quantità di elettricità  $Q_1$  e  $Q_2$  a cui risultano caricati.

#### Soluzione

Calcolo delle quantità di elettricità  $Q_1$  e  $Q_2$  esistenti nei due condensatori e della  $Q_t$ :

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 = 40 \cdot 500 = 20.000 \mu\text{C},$$

$$Q_2 = C_2 \cdot V_2 = 60 \cdot 1.000 = 60.000 \mu\text{C},$$

$$Q_t = Q_1 + Q_2 = 20.000 + 60.000 = 80.000 \mu\text{C}.$$

Calcolo della capacità totale  $C_t$ :

$$C_t = C_1 + C_2 = 40 + 60 = 100 \mu\text{F}.$$

Calcolo della tensione comune  $V_0$ :

$$V_0 = \frac{Q_t}{C_t} = \frac{80.000}{100} = 800 \text{ volt}.$$

Calcolo delle quantità di elettricità  $Q_1'$  e  $Q_2'$  dopo il collegamento:

$$Q_1' = C_1 \cdot V_0 = 40 \cdot 800 = 32.000 \mu\text{C},$$

$$Q_2' = C_2 \cdot V_0 = 60 \cdot 800 = 48.000 \mu\text{C},$$

per verifica:

$$Q_t = Q_1' + Q_2' = 32.000 + 48.000 = 80.000 \mu\text{C}.$$

Oppure si può calcolare la quantità di elettricità  $Q_0$  che si è trasferita dal condensatore a tensione maggiore al condensatore a tensione minore:

$$Q_0 = (V_2 - V_1) \cdot \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = (1.000 - 500) \cdot \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 12.000 \mu\text{C}.$$

Le quantità di elettricità  $Q_1'$  e  $Q_2'$  che si hanno dopo il collegamento sono date da:

$$Q_1' = Q_1 + Q_0 = 20.000 + 12.000 = 32.000 \mu\text{C},$$

$$Q_2' = Q_2 - Q_0 = 60.000 - 12.000 = 48.000 \mu\text{C}.$$

La tensione comune  $V_0$  risulta pertanto:

$$V_0 = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{32.000}{40} = 800 \text{ volt},$$

oppure,

$$V_0 = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{48.000}{60} = 800 \text{ volt}.$$

### e) Collegamento serie di condensatori precaricati

Consideriamo due condensatori diversi  $C_1$  e  $C_2$  precaricati rispettivamente alla tensione  $V_1$  e  $V_2$  (fig. 6.26). La quantità di elettricità in ciascun condensatore è:

$$Q_1 = C_1 \cdot V_1 \quad \text{e} \quad Q_2 = C_2 \cdot V_2 ,$$

Chiudendo l'interruttore A, i due condensatori vengono collegati in serie. Per le stesse leggi della serie, viste precedentemente, deve verificarsi:

a) un assestamento di cariche elettriche che stabilisca la medesima quantità di elettricità  $Q_0$  nei due condensatori, per cui, chiamando con  $Q'_1$  e con  $Q'_2$  le quantità che si ottengono dopo il collegamento, deve essere:

$$Q_0 = Q'_1 = Q'_2 , \quad (6.38)$$

b) una ripartizione della tensione totale  $V_t$  in parti  $V'_1$  e  $V'_2$  inversamente proporzionali alle capacità  $C_1$  e  $C_2$ , per cui:

$$V'_1 : V'_2 = C_2 : C_1 .$$

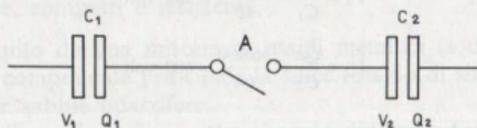


Fig. 6.26 - Collegamento in serie di condensatori precaricati.

Considerando che la tensione totale  $V_t$  è la medesima sia prima che dopo il collegamento, si ha:

$$V_t = V_1 + V_2 = V'_1 + V'_2 . \quad (6.39)$$

Pertanto, essendo la capacità totale  $C_t$ :

$$C_t = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} ,$$

la quantità di elettricità comune  $Q_0$  si calcola con la formula:

$$Q_0 = V_t \cdot C_t .$$

Di conseguenza, si ha:

$$V'_1 = \frac{Q_0}{C_1} \quad \text{e} \quad V'_2 = \frac{Q_0}{C_2} . \quad (6.40)$$

### Esempio numerico

Due condensatori della capacità  $C_1$  di  $40 \mu\text{F}$  e  $C_2$  di  $60 \mu\text{F}$ , sono caricati rispettivamente alla tensione  $V_1$  di 500 volt e  $V_2$  di 1.000 volt. Calcolare la quantità di elettricità  $Q_0$  che si stabilisce dopo il collegamento in serie e le tensioni  $V'_1$  e  $V'_2$  a cui risultano caricati.

#### Soluzione

Calcolo della tensione totale  $V_t$ :

$$V_t = V_1 + V_2 = 500 + 1.000 = 1.500 \text{ volt.}$$

Calcolo della capacità totale  $C_t$ :

$$C_t = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} = \frac{40 \cdot 60}{40 + 60} = 24 \mu\text{F.}$$

Calcolo della quantità di elettricità comune  $Q_0$ :

$$Q_0 = V_t \cdot C_t = 1.500 \cdot 24 = 36.000 \mu\text{C.}$$

Calcolo delle tensioni  $V'_1$  e  $V'_2$  che si hanno dopo il collegamento:

$$V'_1 = \frac{Q_0}{C_1} = \frac{36.000}{40} = 900 \text{ volt,}$$

$$V'_2 = \frac{Q_0}{C_2} = \frac{36.000}{60} = 600 \text{ volt,}$$

per verifica:

$$V_t = V'_1 + V'_2 = 900 + 600 = 1.500 \text{ volt.}$$

## 6.8. CARATTERISTICHE DI ALCUNI MATERIALI DIELETTRICI DI USO COMUNE

I materiali isolanti devono possedere in misura più o meno rilevante, le seguenti proprietà:

- elevata rigidità dielettrica;
- trascurabile dissipazione di energia anche quando il dielettrico è sottoposto a campi elettrici alternativi di elevate frequenze;
- resistenza alle sollecitazioni meccaniche, tenacità e durezza;
- buona conduttività termica;
- resistenza all'azione del calore, degli agenti atmosferici e chimici;
- bassa igroscopicità.

I dielettrici si possono dividere, a seconda della loro costituzione chimica, in isolanti organici e in isolanti inorganici, artificiali e naturali, semplici e composti.

Gli isolanti di uso comune sono i seguenti:

**Mica.** Sta al primo posto tra gli isolanti solidi naturali per le sue preziose qualità: è meccanicamente resistente, pieghevole, non igroscopica, resistente al calore ed ha altissima rigidità dielettrica.

È un silicato complesso di alluminio, sodio, calcio, magnesio e potassio. Si ricava dai suoi minerali, il principale dei quali è la muscovite (mica potassica). Si presenta sotto forma di cristalli facilmente sfaldabili in lamine sottili, elastiche, biancastre con lucentezza madreperlacea.

In commercio si trova in fogli o placche di spessore variabile. Trova largo impiego nell'industria elettrica; in campo radiotecnico il suo uso è limitato a quello di dielettrico nei condensatori fissi e semifissi.

**Micanite.** La micanite si fabbrica con i residui di lavorazione della mica, ridotti in sottilissime lamine e poi incollate con gommalacca o con resine sintetiche su fogli di carta o di tela a strati alterni e poi pressati fortemente a caldo (100 °C).

Si ottengono così fogli di micanite delle dimensioni volute, pieghevoli, resistenti al calore e di alto potere isolante.

Se arrotolati su cilindri di ferro e pressati a caldo, si ottengono dei tubi, anche di grosso spessore, compatti e resistenti.

**Vetro.** È costituito da una miscela di ossidi metallici (sodio, potassio, calcio) avente come componente principale la silice (ossido di silicio), che si trova nel quarzo e nelle sabbie quarzifere.

A seconda degli ossidi usati si ottengono le diverse colorazioni del vetro.

Viene preparato fondendo una miscela perfettamente omogenea di polvere, ottenuta dalla macinazione delle varie materie prime.

Viene poi foggiato per soffiatura quando la massa è ancora sufficientemente plastica.

Il vetro come isolante è usato nell'industria degli isolatori elettrici, mentre è scarsamente usato in campo radiotecnico.

**Gomma elastica o caucciù.** È un prodotto naturale che si ricava dal lattice che cola dalle incisioni fatte nella corteccia di alcune piante tropicali.

Il lattice coagula all'aria e forma una massa gommosa, che, vulcanizzata e cioè mescolata con lo zolfo (5-10 %), acquista elasticità e particolari proprietà chimiche, che la rendono insolubile negli ordinari solventi, come l'etere, la benzina, ecc.

Rammollisce però attorno ai 100 °C, perciò viene usata come rivestimento isolante di fili conduttori non soggetti a riscaldamento.

Intacca il rame per cui i fili devono essere preventivamente stagnati.

**Ebanite.** Vulcanizzando il caucciù con una percentuale di zolfo del 70-75 % si ottiene un prodotto più o meno nero, duro e molto fragile, che è l'ebanite.

È un buon isolante per le basse frequenze, mentre a frequenze elevate ha grandi perdite dielettriche.

**Marmo.** È una roccia a struttura granulare cristallina, costituito da carbonato di calcio accompagnato spesso da altri minerali. È un isolante di scarse proprietà dielettriche, per cui il suo uso nel campo elettro-radiò è limitatissimo e solo per tensioni non superiori ai 500 volt.

Resiste bene però agli agenti atmosferici, all'umidità ed è di facile lavorazione.

**Carta.** La carta è costituita essenzialmente da fibre vegetali e viene ottenuta dalla pasta di legno, dalla cellulosa e da ritagli di fibre tessili vegetali (cenci e stracci).

Le migliori qualità di carta dal punto di vista dielettrico, sono ottenute dai cascami di cotone, che rappresentano la cellulosa più pura che si trovi in natura, e si impiegano come dielettrico nei condensatori, detti appunto condensatori a carta.

È igroscopica e perciò perde facilmente ogni potere coibente.

Per questo in commercio si trovano le carte impregnate con apposite vernici isolanti per proteggerle dall'umidità, quali la carta bachelizzata, laccata, oleata, catramata, sterlingata, ecc.

**Resine naturali.** Sono sostanze organiche naturali che si ricavano dalla secrezione ottenuta raschiando il fusto dei pini e delle altre conifere.

Sono insolubili in acqua, ma solubili in alcool e in altri solventi.

Queste resine disciolte in solventi danno una vernice più o meno adesiva, che, per evaporazione del solvente, lascia sul materiale su cui viene depositata, una pellicola isolante e resistente agli agenti atmosferici.

**Resine sintetiche.** Sono molto più importanti delle resine naturali sia per le loro buone proprietà dielettriche e meccaniche, che per la vasta gamma di prodotti che ne derivano.

Si hanno infatti:

- a) Resine sintetiche termoindurenti o irreversibili: diventano plastiche per effetto del calore per poi passare irreversibilmente dallo stato solubile e fusibile allo stato insolubile ed infusibile, a causa del cambiamento della loro struttura chimica durante la formatura e il raffreddamento.
- b) Resine sintetiche termoplastiche: diventano plastiche per effetto del calore, ma mancano di termoindurimento, non raggiungono cioè uno stato finale irreversibile, in quanto non cambiano affatto la loro struttura chimica né durante né dopo il periodo di formatura.

Tra le resine termoindurenti accenniamo solamente alla bachelite, costituita da fenoli e da aldeide formica.

I fenoli oggi usati sono ricavati sinteticamente partendo dal benzolo ottenuto per distillazione dal catrame greggio. L'aldeide formica è invece ricavata dall'alcool metilico ottenuto dalla distillazione del legno.

La bachelite è un discreto isolante, resiste alle sollecitazioni meccaniche e a diversi agenti chimici.

Viene spesso mescolata con segatura di legno, amianto, ecc., per aumentarne la resistenza meccanica. Si trova in commercio anche in lastre stratificate, aventi cioè come supporto strati alterni di tela o carta e resina, e in stampati di diversa foglia.

Tra le resine termoplastiche indichiamo il teflon, che è uno dei nuovi materiali plastici usato come isolante per alte frequenze. È resistente al calore e alla corrosione, ha elevata rigidità dielettrica e basse perdite, è di facile lavorazione ed ininfiammabile, ha colore bianco o grigio.

Si prepara per polimerizzazione (unione di molecole a basso peso molecolare in una sola molecola) del tetrafluoroetilene.

## 6.9. ESERCIZI DA RISOLVERE

1. Calcolare l'intensità del campo elettrico in V/m nell'interno di un condensatore piano avente la capacità di  $C = 2 \mu\text{F}$ , caricato con una quantità di elettricità  $Q = 2 \cdot 10^{-8} \text{ C}$ , sapendo che la distanza tra le armature è di 2 mm. (R.  $F = 10^5 \text{ V/m}$ .)
2. Un condensatore piano, avente le superfici di  $4 \text{ cm}^2$  e distanziate di 1 mm, è isolato in aria. Sostituendo l'aria con la mica ( $\epsilon_r = 6$ ), in che rapporto sta la capacità  $C_2$  rispetto alla capacità  $C_1$  precedente? (R.  $C_2/C_1 = 6$ .)
3. Un condensatore piano, sottoposto alla tensione di 100 V, assume l'energia di  $25 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ . Calcolare la sua capacità e la quantità di elettricità immagazzinata. (R.  $C = 5 \mu\text{F}$ ,  $Q = 5 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ .)
4. Tracciare i grafici relativi all'andamento della corrente di carica e della tensione che si stabilisce tra le armature di un condensatore di  $10 \mu\text{F}$  sottoposto alla tensione di 100 V attraverso una resistenza di 1 Kohm, considerando intervalli di tempo uguali e multipli interi della costante di tempo.
5. Tracciare i grafici relativi alla corrente e alla tensione di scarica di un condensatore di  $10 \mu\text{F}$  che viene chiuso su una resistenza di 10 Kohm, supponendo che la tensione iniziale sia di 100 V.
6. Un condensatore, della capacità  $C = 10 \mu\text{F}$ , viene caricato con una tensione costante di 200 V attraverso un circuito avente la resistenza complessiva di 100 Kohm. Calcolare la tensione tra le armature del condensatore dopo 200 ms e il tempo necessario affinché la tensione ai capi del condensatore raggiunga i 60 V. (R.  $V = 36,2 \text{ V}$ ;  $t = 356 \text{ ms}$ .)
7. Un condensatore carico avente la capacità di  $1 \mu\text{F}$ , lasciato a riposo si scarica in 2 h. Calcolare la resistenza di isolamento del condensatore. (R.  $R = 1.440 \text{ Mohm}$ .)
8. Un condensatore piano realizzato con armature quadrate di 10 cm di lato, distanziate di 2 mm, ha il dielettrico suddiviso in due strati di ugual spessore, uno di mica ( $\epsilon_r = 6$ ) e l'altro di carta

paraffinata ( $\epsilon_r = 3$ ). Calcolare la capacità del condensatore e la tensione agente su ciascun dielettrico, sapendo che la tensione applicata alle armature è di 600 V.

(R.  $C_1 = 177 \text{ pF}$ ;  $V_1 = 200 \text{ V}$ ;  $V_2 = 600 \text{ V}$ ).

9. Due condensatori della capacità  $C_1 = 60 \text{ }\mu\text{F}$  e  $C_2 = 40 \text{ }\mu\text{F}$  sono collegati in serie tra loro e posti in parallelo alla capacità  $C_3 = 26 \text{ }\mu\text{F}$ . Si domanda a quale tensione devono essere sottoposti affinché la tensione  $V_1$  tra le armature di  $C_1$  risulti di 200 V. Calcolare inoltre la quantità di elettricità totale e l'energia totale.

(R.  $V_1 = 500 \text{ V}$ ;  $Q_1 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ ;  $W_1 = 6,25 \text{ J}$ ).

10. Due condensatori della capacità  $C_1 = 45 \text{ }\mu\text{F}$  e  $C_2 = 15 \text{ }\mu\text{F}$  sono collegati fra loro in parallelo e posti in serie alla capacità  $C_3 = 30 \text{ }\mu\text{F}$ . Sapendo che la quantità di elettricità su  $C_1$  è  $Q_1 = 135 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ , calcolare la capacità complessiva, la tensione e la quantità totali e su ciascun condensatore.

(R.  $C_1 = 20 \text{ }\mu\text{F}$ ;  $V_1 = 900 \text{ V}$ ;  $Q_1 = Q_3 = 180 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ;  $Q_2 = 45 \cdot 10^{-4} \text{ C}$ ;  $V_1 = V_2 = 300 \text{ V}$ ;  $V_3 = 600 \text{ V}$ ).

11. Un condensatore di  $10 \text{ }\mu\text{F}$  viene caricato alla tensione di 1.200 V. Dopodiché viene posto in parallelo ad un condensatore scarico di  $20 \text{ }\mu\text{F}$ . Calcolare la tensione, la quantità di elettricità e l'energia che si vengono a determinare sui due condensatori.

(R.  $V_1 = V_2 = V_0 = 400 \text{ V}$ ;  
 $Q_1 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ ;  $Q_2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ C}$ ;  $W_1 = 0,8 \text{ J}$ ;  $W_2 = 1,6 \text{ J}$ ).

12. Un condensatore di  $30 \text{ }\mu\text{F}$  possiede, dopo la carica, una energia di 1,35 J. Se poi viene posto in serie con un condensatore scarico di  $60 \text{ }\mu\text{F}$ , quale tensione e quale energia risultano su ciascun condensatore?

(R.  $V_1 = 200 \text{ V}$ ;  $V_2 = 100 \text{ V}$ ;  $W_1 = 0,6 \text{ J}$ ;  $W_2 = 0,3 \text{ J}$ ).

## Capitolo Settimo

### Elettromagnetismo

La corrente elettrica, oltre a produrre l'effetto termico e l'effetto chimico, ha la proprietà di generare attorno a se stessa un *campo magnetico* e cioè un insieme di *linee di forza* che, a differenza di quelle elettriche, sono sempre chiuse su se stesse.

È questo *l'effetto magnetico della corrente*: effetto assai importante, in quanto su di esso si basa il funzionamento di quasi tutte le macchine ed apparecchi elettrici.

#### 7.1. IL CAMPO MAGNETICO

Abbiamo visto che lo spazio circostante le cariche elettriche in equilibrio sui corpi è sede di un campo elettrico e cioè di un insieme di linee di forza *aperte* che, staccandosi perpendicolarmente dalla superficie di un corpo elettrizzato, si irradiano nello spazio per terminare sulla superficie di un altro corpo diversamente elettrizzato.

Le cariche elettriche in movimento (corrente elettrica), oltre a produrre un campo elettrico e cioè delle forze di natura elettrica, producono nello spazio circostante il conduttore che percorrono, una perturbazione distinta da quella elettrica, detta *campo magnetico*.

Il campo magnetico può immaginarsi costituito da un complesso di linee di forza che, a differenza di quelle elettriche, sono sempre *chiuse* su se stesse.

È importante osservare che il campo magnetico esiste fin tanto che esiste il moto delle cariche elettriche e cioè la corrente elettrica; cessando questa il campo magnetico scompare.

Vedremo in seguito che il campo magnetico viene generato anche da magneti naturali e da magneti artificiali permanenti, il comportamento dei quali, anche se in apparenza è molto diverso da quello di una corrente elettrica, in realtà si identifica con questo.

Infatti troveremo che le forze magnetiche che si sprigionano dai poli di una calamita sono in definitiva dovute al moto di cariche elettriche.

L'andamento e la forma delle linee di forza magnetiche dipendono:

- a) dalla forma del circuito percorso dalle cariche elettriche;
- b) dalla natura del mezzo attraverso il quale le linee di forza si chiudono.

Mentre le linee di forza elettriche esistono solo nei mezzi coibenti e non nei corpi conduttori, le linee di forza magnetiche possono attraversare, sia pure con difficoltà diverse, tutte le sostanze e il vuoto.

Consideriamo dapprima l'andamento e la forma delle linee di forza magnetiche generate da circuiti percorsi da corrente costante posti in un mezzo omogeneo (vuoto o aria), lontani da materiali magnetizzabili.

#### a) Campo magnetico di una corrente rettilinea indefinita

Supponiamo che un filo rettilineo molto lungo sia percorso da una corrente costante di intensità  $I$  (fig. 7.1). Le linee di forza magnetiche assumono la forma di cerchi concentrici giacenti nei piani perpendicolari al filo, aventi per asse il filo stesso.

Esse vanno via via diradando quanto più ci si allontana dal conduttore. Tale andamento delle linee di forza del campo magnetico può essere verificato per mezzo dei cosiddetti *spettri magnetici*.

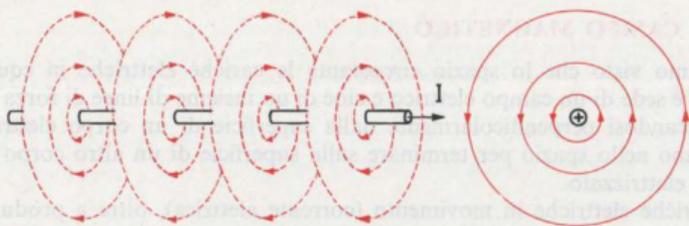


Fig. 7.1 - Linee di forza magnetiche generate da una corrente rettilinea presa nel verso reale.

Spargendo sopra un foglio di carta (fig. 7.2) attraversato normalmente dal conduttore rettilineo, della limatura di ferro, le particelle di questa si dispongono a catena lungo le linee di forza, disegnando dei cerchi concentrici con il centro sul filo. I motivi del comportamento presentato dalla limatura di ferro verranno chiariti quando studieremo le proprietà magnetiche della materia (v. paragrafo 7.4).

Il senso convenzionale che viene attribuito alle linee di forza dipende dal verso della corrente e si può determinare applicando delle regole *classiche*, che sono però valide solo se si accetta il verso convenzionale della corrente (dal + al -) e non il verso reale (dal - al +) che è stato in precedenza qui adottato e che verrà considerato anche in seguito.

Potremo così giovarci della seguente regola, detta della *vite destrorsa*, ricordando che essa si riferisce al *verso convenzionale* della corrente:

*Il verso delle linee di forza magnetiche prodotte da una corrente rettilinea coincide con quello di rotazione di una vite destrorsa che si sposta nel senso della corrente.*

Nella figura 7.1 il senso delle linee di forza, essendo riferito ad una corrente reale, è opposto logicamente a quello della regola, ma è evidente che coincide comunque con lo stesso verso della regola se la corrente è presa con il verso convenzionale.

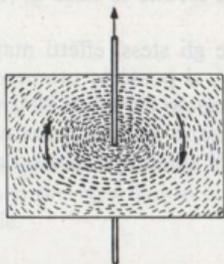


Fig. 7.2 - Spettro magnetico di una corrente rettilinea.

Considerato un piano qualsiasi passante per il conduttore (fig. 7.3) le linee di forza escono ed entrano da ciascun semipiano delimitato dal conduttore stesso. Per convenzione si chiama *polo Nord magnetico* la faccia del semipiano dal quale escono le linee di forza e *polo Sud magnetico* la faccia del semipiano nel quale entrano.

È importante osservare che, mentre la polarità di una carica elettrica può sussistere isolata, le polarità magnetiche, proprio per il fatto che le linee di forza sono chiuse su se stesse, sono indissolubili.

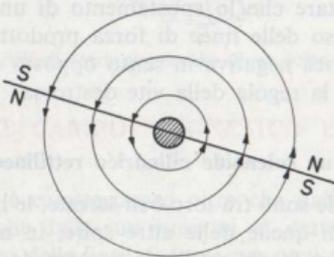


Fig. 7.3 - Polarità magnetiche delle linee di forza.

## b) Campo magnetico di una corrente circolare

Nel caso di una spira circolare percorsa da una corrente costante, le linee di forza hanno l'andamento rappresentato in figura 7.4: esse sono linee chiuse concatenate con la spira, tranne quella passante per il centro, che è una retta perpendicolare al piano della spira stessa.

Il verso di tali linee è dato ancora dalla regola della vite destrorsa, riferita sempre al verso convenzionale della corrente: *Il verso delle linee di forza magnetiche prodotte da una corrente circolare coincide con l'avanzamento di una vite destrorsa che ruota nel senso della corrente.*

Il piano della spira da dove escono le linee di forza è il polo *N* e il piano nel quale entrano è il polo *S*.

È importante osservare che gli stessi effetti magnetici prodotti da una spira circolare percorsa da corrente, si possono ottenere imprimendo un rapido movimento circolare ad un corpuscolo carico di elettricità. Infatti esso genera delle linee di forza che si concatenano con la traiettoria percorsa dal corpuscolo, aventi lo stesso andamento di quelle prodotte dalla spira.

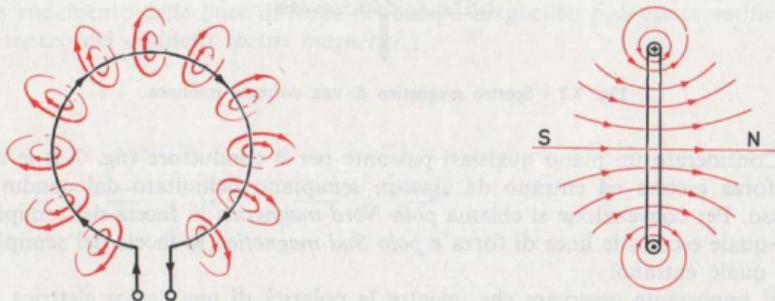


Fig. 7.4 - Linee di forza magnetiche generate da una corrente circolare.

Si può così sperimentare che lo spostamento di una carica positiva in un senso, all'effetto del verso delle linee di forza prodotte, equivale allo spostamento di una eguale carica negativa in senso opposto e avente stessa velocità, in perfetta armonia con la regola della vite destrorsa.

## c) Campo magnetico di un solenoide cilindrico rettilineo

Se le spire del solenoide sono fra loro ben serrate, le linee di forza di ciascuna spira si concatenano con quelle delle altre spire, in modo da costituire, nell'interno del solenoide, un fascio rettilineo uscente da una estremità (polo *N*) ed entrante nell'altra (polo *S*), come rappresentato in fig. 7.5.

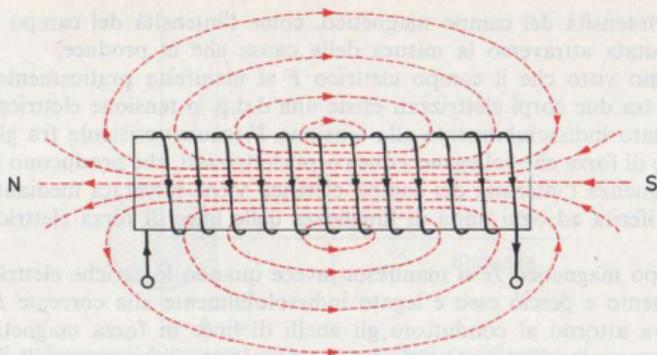


Fig. 7.5 - Linee di forza magnetiche di un solenoide rettilineo.

Il verso delle linee di forza può determinarsi ancora con la regola della vite destrorsa usata per la spira, sempre ricordando che essa è valida per le correnti prese nel verso convenzionale.

#### d) Campo magnetico di un solenoide toroidale

Nel caso di un solenoide a forma toroidale, le linee di forza magnetiche rimangono chiuse nella sezione del solenoide, per cui non presentano alcuna polarità magnetica (fig. 7.6). Il loro verso è legato a quello della corrente come nei casi precedenti.

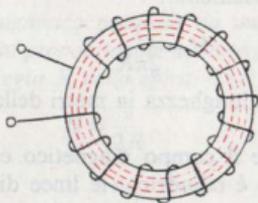


Fig. 7.6 - Linee di forza magnetiche di un solenoide toroidale.

## 7.2. INTENSITÀ DEL CAMPO MAGNETICO E FORZA MAGNETO-MOTTRICE

Il campo magnetico è caratterizzato oltre che dall'andamento e dal verso delle linee di forza, anche dalla sua *intensità*  $H$ , detta anche *forza magnetica*. Essa dipende dal numero delle linee di forza per ogni unità di superficie e dalle caratteristiche del mezzo in cui il campo si manifesta.

Però l'intensità del campo magnetico, come l'intensità del campo elettrico, viene valutata attraverso la misura della causa che la produce.

Abbiamo visto che il campo elettrico  $F$  si manifesta praticamente tutte le volte che tra due corpi elettrizzati esiste una d.d.p. o tensione elettrica  $V$ . Esso è cioè legato indissolubilmente alla tensione  $V$  (causa) esistente fra gli estremi delle linee di forza che collegano i due corpi elettrizzati, che producono il campo. Di conseguenza l'intensità del campo elettrico viene misurata mediante la tensione  $V$  riferita ad ogni unità di lunghezza delle linee di forza elettriche: volt/metro.

Il campo magnetico  $H$  si manifesta invece quando le cariche elettriche sono in movimento e perciò esso è legato indissolubilmente alla corrente  $I$  (causa), che genera attorno al conduttore gli anelli di linee di forza magnetiche.

Di conseguenza l'intensità del campo magnetico, in un punto  $P$  dello spazio viene misurata dal rapporto tra la corrente  $I$  e la lunghezza delle linee di forza passanti per il punto  $P$  e cioè viene misurata in *ampere/metro* o, come vedremo fra poco, in *amperspire/metro* (Asp/m).

In base a tali concetti, l'intensità di campo, nei circuiti elementari esaminati nel paragrafo precedente, vengono calcolati con le seguenti leggi, dette *leggi di Biot e Savart*.

#### a) Per un conduttore rettilineo

L'intensità di campo magnetico prodotto da una corrente che percorre un conduttore rettilineo è, in un punto  $P$  dello spazio, direttamente proporzionale all'intensità  $I$  della corrente ed inversamente proporzionale alla distanza  $R$  del punto  $P$  dall'asse del filo. E precisamente:

$$H = \frac{I}{2\pi R}, \quad (7.1)$$

dove  $2\pi R$  non è altro che la lunghezza in metri delle linee di forza passanti per il punto  $P$ .

È opportuno rilevare che il campo magnetico esiste anche nell'interno del conduttore e che, se questo è cilindrico, le linee di forza sono cerchi concentrici aventi il centro sull'asse.

L'andamento dell'intensità del campo magnetico è rappresentato con il diagramma di figura 7.7, che esprime appunto i valori del campo  $H$  in funzione della distanza  $R$  dal centro del conduttore.

Si osserva che l'intensità del campo è:

1) massima alla superficie del conduttore e vale:

$$H_{mx} = \frac{I}{2\pi r},$$

dove  $r$  è il raggio del conduttore;

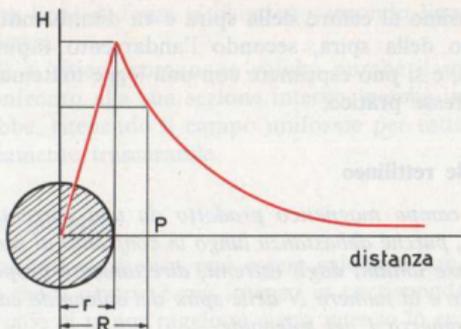


Fig. 7.7 - Diagramma dell'intensità di campo nell'interno e all'esterno di un conduttore.

- 2) decrescente con l'aumentare di  $R$  con legge non lineare a causa del raggio  $r$ , non trascurabile, del conduttore;
- 3) decrescente verso l'interno del conduttore con andamento lineare.

Infatti muovendo dall'asse del conduttore verso la superficie esterna, ogni linea di forza abbraccia una corrente sempre maggiore in ragione diretta della sezione e cioè secondo il quadrato del raggio. Per cui, aumentando il raggio delle linee di forza, cresce la loro lunghezza  $2\pi r$ , ma la corrente  $I$ , che le attraversa, aumenta con il quadrato del raggio e quindi il campo cresce proporzionalmente ad  $r$  ed è nullo sull'asse del conduttore.

#### b) Per una spira

L'intensità del campo magnetico prodotto da una corrente che percorre una spira è, nel centro della spira, proporzionale all'intensità  $I$  della corrente ed inversamente proporzionale al raggio  $R$  della spira. Cioè:

$$H = \frac{I}{2R} \quad (7.2)$$

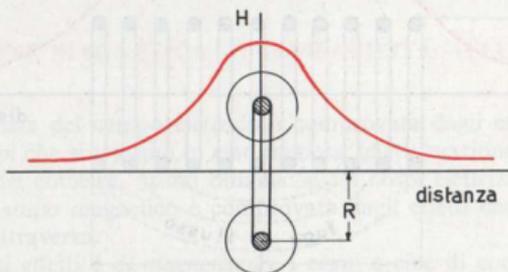


Fig. 7.8 - Diagramma dell'intensità di campo in una spira.

Il campo è massimo al centro della spira e va diminuendo in funzione della distanza dal piano della spira, secondo l'andamento rappresentato dal diagramma di fig. 7.8, e si può esprimere con una legge matematica, che però non ha qui alcun interesse pratico.

### c) Per un solenoide rettilineo

L'intensità del campo magnetico prodotto da una corrente che percorre un solenoide rettilineo, purché abbastanza lungo in confronto al suo diametro interno, è, nei punti dell'asse lontani dagli estremi, direttamente proporzionale all'intensità  $I$  della corrente e al numero  $N$  delle spire del solenoide ed inversamente proporzionale alla lunghezza  $l$  del solenoide.

$$H = \frac{NI}{l} \quad (7.3)$$

Questa formula dà ragione del nome di *amperspira/metro* dato all'unità di misura del campo magnetico.

Osserviamo infatti che una certa intensità  $H$  di campo si può ottenere, per esempio, per ogni unità di lunghezza del solenoide, con una certa intensità  $I$  di corrente per un certo numero  $N$  di spire, oppure con una corrente di intensità doppia per metà numero di spire, od anche con una sola spira cilindrica di altezza pari all'unità di lunghezza considerata, percorsa da una corrente di intensità  $N \cdot I$ .

Dal diagramma di fig. 7.9, rappresentante l'andamento dell'intensità di campo in un solenoide rettilineo, si rileva che il campo diminuisce di intensità verso gli estremi del solenoide, fino ad assumere un valore circa metà in corrispondenza delle teste. Ciò è dovuto al fatto che, procedendo dal centro verso gli estremi

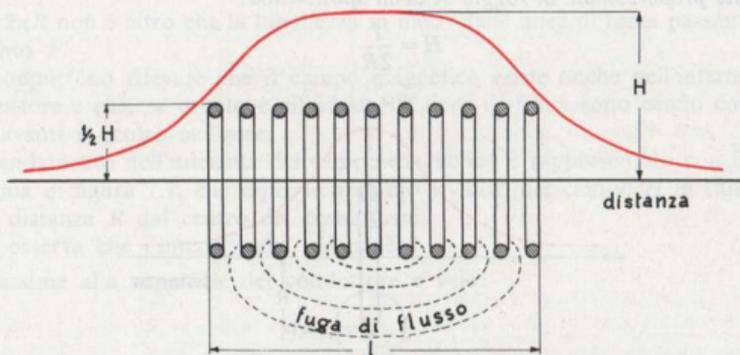


Fig. 7.9 - Diagramma dell'intensità di campo in un solenoide rettilineo.

del solenoide, molte linee di forza si chiudono secondo linee più brevi, come rappresentato in figura.

La formula (7.3) si ritiene comunque valida, purché il solenoide sia abbastanza lungo in confronto alla sua sezione interna, perché in tal caso, l'errore che si commetterebbe, ritenendo il campo uniforme per tutta la lunghezza del solenoide, è praticamente trascurabile.

#### d) Per un solenoide toroidale

L'intensità del campo magnetico può essere calcolata con la stessa formula (7.3), pur sapendo che il campo è più intenso in corrispondenza delle linee di forza più interne e cioè di minor raggio, e meno intenso in corrispondenza delle linee più esterne e cioè di maggior lunghezza.

In pratica si assume per  $H$  il valore medio e cioè il valore corrispondente alla lunghezza della linea di forza mediana.

Dalla formula (7.3) si rileva dunque che la causa prima della formazione di un campo magnetico non è solo la corrente elettrica, ma anche il numero di spire che essa percorre e cioè il prodotto  $NI$ .

A questo prodotto si dà il nome di *forza magnetomotrice*  $\mathcal{F}$  o *tensione magnetica*, per analogia formale con la forza elettromotrice o tensione elettrica che è la causa prima di ogni campo elettrico.

$$\mathcal{F} = N \cdot I \quad \text{e dalla (7.3)} \quad \mathcal{F} = H \cdot l. \quad (7.4)$$

La forza magnetomotrice (f.m.m.), che si misura in *amperspire* (Asp), è dunque la grandezza base di ogni studio quantitativo dei fenomeni magnetici, come la f.e.m. è alla base di ogni fenomeno elettrico.

In generale ogni conduttore percorso da corrente genera una f.m.m. che determina nello spazio circostante quella particolare perturbazione che abbiamo chiamato campo magnetico.

### 7.3. INDUZIONE MAGNETICA - PERMEABILITÀ - FLUSSO MAGNETICO

Come l'esistenza del campo elettrico è comprovata dagli effetti che questo produce sui corpi che si trovano in esso immersi (elettrizzazione dei conduttori, polarizzazione dei coibenti, azioni dinamiche sui corpi elettrizzati), così anche l'esistenza del campo magnetico è comprovata dagli effetti che esso manifesta nei corpi che attraversa.

Uno di questi effetti è di *magnetizzare* i corpi e cioè di conferire ad essi le proprietà magnetiche della corrente elettrica.

Abbiamo detto che le linee di forza del campo magnetico possono chiudersi attraverso qualsiasi sostanza, per cui tutte le sostanze sono magnetizzabili, sia pure in modo molto diverso.

La magnetizzazione che le varie sostanze acquistano sotto l'azione del campo magnetico, viene chiamata *induzione magnetica* e si indica con la lettera  $B$ .

Essa è direttamente proporzionale all'intensità  $H$  del campo agente e dipende dalle proprietà magnetiche delle sostanze, ossia dalla attitudine che queste hanno di lasciarsi attraversare dalle linee di forza magnetiche e di lasciarsi magnetizzare.

La grandezza specifica che esprime le proprietà magnetiche delle sostanze prende il nome di *permeabilità magnetica* e si indica con il simbolo  $\mu$  (pron. mu).

Si ha cioè:

$$B = \mu \cdot H. \quad (7.5)$$

Un corpo si dice magnetizzato quando produce un campo magnetico e cioè delle linee di forza magnetiche.

Perciò un corpo che sotto l'azione di un campo magnetico si magnetizza, risulta attraversato non solo dalle linee del campo agente, ma anche dalle linee di forza che esso produce.

All'insieme di tutte queste linee di forza si dà il nome di *linee di flusso* o semplicemente di *flusso magnetico* e si indica con la lettera  $\Phi$  (pron. fi).

Pertanto l'induzione magnetica  $B$  di un corpo assume anche il significato di *densità di flusso magnetico* e si esprime con il rapporto tra il flusso totale  $\Phi$  e la sezione trasversale  $S$  dello spazio occupato dal flusso stesso:

$$B = \frac{\Phi}{S}. \quad (7.6)$$

L'unità di misura del flusso magnetico è il *weber* ( $Wb$ ), che vale, come vedremo in seguito, il prodotto di *un volt per un secondo*:  $Wb = V \cdot \text{sec}$ .

Di conseguenza l'unità di misura dell'induzione magnetica  $B$  è il  $Wb/m^2$ , e l'unità di misura della permeabilità magnetica  $\mu$  è, per la (7.5):

$$\mu = \frac{B}{H} = \frac{Wb}{m^2} \cdot \frac{m}{A} = \frac{V \cdot \text{sec}}{m \cdot A} = \frac{\Omega \cdot \text{sec}}{m}.$$

Al prodotto  $\Omega \cdot \text{sec}$  si dà il nome di *henry* ( $Hr$ ), per cui la permeabilità  $\mu$  si misura in *henry/metro* ( $Hr/m$ ).

Logicamente, la permeabilità del vuoto, che si indica con  $\mu_0$ , è una grandezza fisica legata solamente al modo con il quale le linee di forza passano e si chiudono nel vuoto, e vale:

$$\mu_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \text{ Hr/m}.$$

In tal caso l'induzione magnetica, che indichiamo con  $B_0$ , acquista solamente il significato di densità di flusso, per cui *nel vuoto l'induzione magnetica  $B_0$  determinata da un campo magnetico di intensità  $H$* , vale:

$$B_0 = 1,256 \cdot 10^{-6} \cdot H \text{ Wb/m}^2 .$$

Per tutte le sostanze invece la permeabilità ha un valore diverso da  $\mu_0$  e prende il nome di *permeabilità assoluta*  $\mu_a$  o semplicemente  $\mu$  della sostanza considerata, come meglio vedremo nel successivo paragrafo.

#### 7.4. LE PROPRIETÀ MAGNETICHE DELLA MATERIA

Vediamo brevemente in che cosa consiste il fenomeno della magnetizzazione dei corpi, ossia il motivo per il quale un corpo immerso in un campo magnetico si magnetizza.

Ricordiamo che gli atomi di qualunque sostanza sono costituiti da un nucleo positivo attorno al quale orbitano gli elettroni.

Ciascun elettrone è una carica elettrica in rapidissima rotazione, paragonabile quindi, come abbiamo detto precedentemente, ad una spira, sia pure di dimensioni estremamente piccole, percorsa da corrente che produce un campo magnetico, sia pure di minima intensità.

Poiché nelle molecole tali moti elettronici sono di regola orientati in tutte le possibili direzioni (fig. 7.10), il campo magnetico risultante generato dall'insieme delle correnti contenute nell'intero corpo, è di regola nullo.

Fanno eccezione alcuni minerali, come la magnetite (minerale di ferro), nei quali esiste un parziale orientamento naturale, dovuto a cause non ancora del tutto note, che conferisce una certa magnetizzazione (magneti naturali).

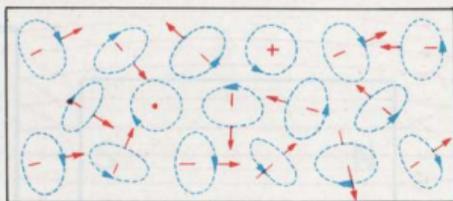


Fig. 7.10 - La somma delle correnti elettroniche è nulla.

Le molecole delle varie sostanze possono essere divise in due gruppi:

- a) molecole nelle quali la risultante dei campi magnetici generati dai moti elettronici è nulla, in quanto le correnti elettroniche, orientate in tutti i sensi, si annullano;

b) molecole nelle quali il campo magnetico risultante dai moti elettronici è diverso da zero, in quanto le correnti elettroniche non si compensano.

Un campo magnetico applicato ad una sostanza costituita da molecole del primo gruppo, riesce, per il fenomeno magnetoelettrico, che studieremo in seguito, ad orientare, dipendentemente dalla struttura atomica e molecolare della sostanza, un certo numero di orbite elettroniche, disponendole nel piano perpendicolare alla direzione del campo agente, ma con l'asse magnetico diretto in senso opposto a quello del campo applicato (fig. 7.11).

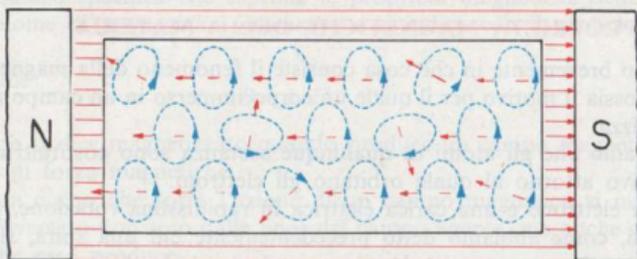


Fig. 7.11 - Orientamento delle correnti molecolari nelle sostanze diamagnetiche.

Ne consegue che queste sostanze, dette *diamagnetiche*, si magnetizzano in senso opposto a quello del campo applicato, per cui vengono attraversate dalla differenza tra le linee di forza magnetizzanti e le linee di forza prodotte; e poiché le prime prevalgono sempre sulle seconde, si ha che nelle sostanze diamagnetiche, quali il bismuto, il rame, l'acqua, ecc., le linee di forza risultano diradate (fig. 7.12).

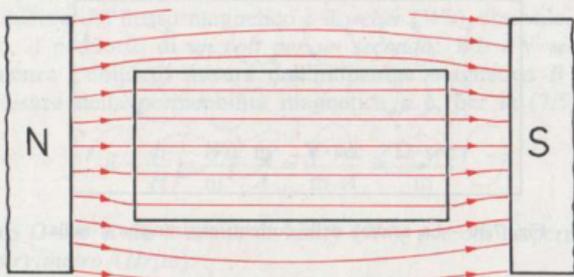


Fig. 7.12 - Le sostanze diamagnetiche diradano il flusso.

Di conseguenza il flusso totale  $\Phi$  che le attraversa risulta diminuito e, a parità di superficie  $S$ , risulta diminuita anche l'induzione  $B$ . Ciò vuol dire che la

permeabilità magnetica assoluta  $\mu$  delle sostanze diamagnetiche è inferiore a quella del vuoto  $\mu_0$ .

Il fenomeno ora descritto, detto *polarizzazione magnetica per deformazione*, è però di lieve entità, per cui non trova applicazioni pratiche.

Le sostanze costituite da molecole del secondo gruppo, dette *sostanze paramagnetiche*, hanno l'effetto opposto e cioè, portate in un campo magnetico, si magnetizzano nello stesso senso delle linee di forza del campo applicato (fig. 7.13).

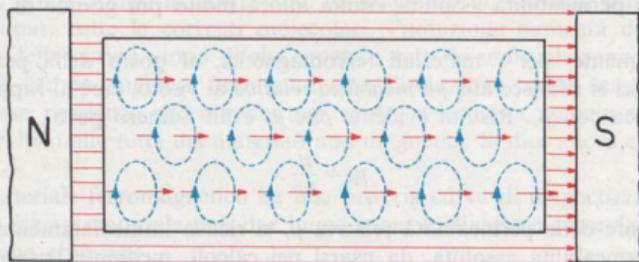


Fig. 7.13 - Orientamento delle correnti molecolari nelle sostanze paramagnetiche.

Infatti questo, oltre a produrre la polarizzazione per deformazione, produce anche una *polarizzazione per orientamento* e cioè determina un orientamento delle orbite elettroniche in modo che le linee di forza dovute alle correnti elettroniche risultano dello stesso senso di quelle del campo applicato. Dato che questo effetto prevale sul primo, nelle sostanze paramagnetiche si ha un addensamento del flusso (fig. 7.14) e quindi un aumento dell'induzione magnetica. Ciò significa che la loro permeabilità è maggiore di quella del vuoto.

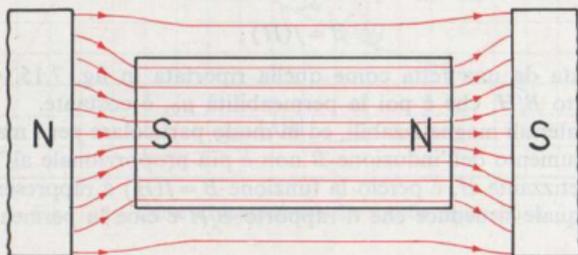


Fig. 7.14 - Le sostanze paramagnetiche addensano il flusso.

Le ragioni del comportamento delle sostanze paramagnetiche sono piuttosto complesse e non è il caso qui nemmeno di accennarle.

Anche l'effetto paramagnetico è, per quasi tutte le sostanze paramagnetiche, quali l'azoto, l'alluminio, il platino, ecc., di lieve entità, per cui non trova applicazioni pratiche.

Solo il ferro e i suoi composti con il carbonio e, in minor misura, il nichel e il cobalto, sono fortemente paramagnetici e cioè, se portati in un campo magnetico, si magnetizzano intensamente. Dette sostanze vengono chiamate *ferromagnetiche* e trovano largo impiego nella costruzione di magneti o calamite permanenti, di elettrocalamite e dei circuiti magnetici delle macchine elettriche.

La loro permeabilità assoluta risulta allora molto più grande di quella del vuoto.

Normalmente, per i materiali ferromagnetici, al posto della permeabilità assoluta  $\mu$  ci si riferisce alla *permeabilità relativa* al vuoto, cioè al rapporto  $\mu/\mu_0$  che si indica con  $\mu_r$ . Risulta evidente che  $\mu_r$  è un numero puro:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}.$$

Dal valore della permeabilità relativa  $\mu_r$  si ricava immediatamente il valore  $\mu$  della permeabilità assoluta, da usarsi nei calcoli, mediante l'espressione:

$$\mu = \mu_0 \mu_r. \quad (7.7)$$

La permeabilità dei materiali ferromagnetici varia però notevolmente, per una stessa sostanza, con il variare dell'induzione  $B$ .

Infatti sperimentando il comportamento delle varie sostanze sottoposte all'azione di campi magnetici, notiamo:

a) Nel vuoto, nell'aria e in tutti i materiali che si possono ritenere *non magnetici* a causa della debolissima magnetizzazione che subiscono, l'induzione  $B$  cresce proporzionalmente al crescere del campo magnetizzante  $H$ , secondo la relazione lineare  $B = \mu_0 \cdot H$ , e perciò la funzione:

$$B = f(H),$$

è rappresentata da una retta come quella riportata in fig. 7.15. Ciò significa che il rapporto  $B/H$ , che è poi la permeabilità  $\mu_0$ , è costante.

b) Per i materiali magnetizzabili, ed in modo particolare per i materiali ferromagnetici, l'aumento dell'induzione  $B$  non è più proporzionale all'aumento del campo magnetizzante  $H$ , e perciò la funzione  $B = f(H)$  è rappresentata da una curva, dalla quale si deduce che il rapporto  $B/H$  e cioè la permeabilità, non è costante.

Consideriamo i soli materiali ferromagnetici, per esempio, il ferro omogeneo o acciaio comune non temperato.

Sottoposto all'azione del campo magnetico  $H$  via via crescente, l'induzione magnetica  $B$ , che esso acquista, cresce secondo la curva rappresentata in fig. 7.15, alla quale si dà il nome di *curva di magnetizzazione*.

L'andamento di tale curva rispecchia fedelmente l'orientamento delle correnti molecolari da parte del campo magnetizzante  $H$ .

Dapprima, per deboli valori del campo  $H$ , la curva sale lentamente, in quanto all'orientamento delle orbite elettroniche si oppongono i moti naturali di agitazione termica e una specie di viscosità molecolare dovuta alla struttura del reticolo atomico. Poi sale quasi in linea retta, in quanto il progressivo orientamento delle orbite molecolari aumenta l'induzione  $B$  quasi proporzionalmente al crescere del campo  $H$ .

Quando poi il campo magnetizzante ha raggiunto un'intensità sufficiente ad orientare quasi tutte le correnti molecolari, l'induzione aumenta debolmente (ginocchio della curva), dopo di che, quando tutte le molecole sono orientate, anche se il campo aumenta illimitatamente, l'induzione cresce semplicemente con la stessa pendenza che avrebbe nel vuoto, e la curva assume andamento lineare parallelo alla retta dei materiali non magnetici. Si dice allora che il ferro è *saturato*.

Ogni materiale ferromagnetico ha una propria curva di magnetizzazione, ed anche uno stesso materiale può dar luogo a curve diverse a seconda della sua composizione chimica.

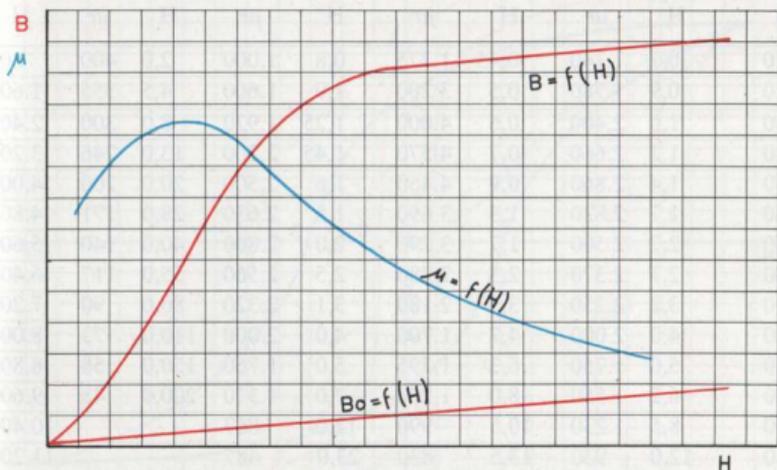


Fig. 7.15 - Curve di magnetizzazione e della permeabilità.

Dalla curva di magnetizzazione risulta che la permeabilità  $\mu$  del ferro (e di tutti i materiali ferromagnetici) non si mantiene costante, ma varia invece notevolmente al variare dell'induzione magnetica  $B$  che il materiale acquista. Dapprima cresce (fig. 7.15), assume i massimi valori in corrispondenza del tratto

rettilineo e va poi diminuendo man mano che il materiale si avvicina alla saturazione.

Si osserva che oltrepassato dunque il *ginocchio* della curva di magnetizzazione occorrerebbe un forte aumento del campo magnetizzante  $H$  per ottenere piccoli aumenti dell'induzione  $B$ ; perciò nella pratica non conviene mai spingere la magnetizzazione oltre il suddetto ginocchio, ma conviene piuttosto adottare i valori di  $B$  corrispondenti alla massima permeabilità.

La seguente tabella raccoglie i valori della permeabilità relativa  $\mu_r$  e dell'intensità del campo magnetico  $H$ , corrispondenti a diversi valori dell'induzione  $B$ , relativi ad alcuni materiali ferromagnetici di uso comune.

TABELLA 8 Tabella di magnetizzazione dei materiali magnetici.

Induzione magnetica $\text{Wb/m}^2$	Campo magnetizzante $H$ in Asp/cm e permeabilità relativa $\mu_r$								
	Ferro e acciaio dolce		Lamiere normali		Lamiere al silicio		Ghisa		Aria
$B$	$H$	$\mu_r$	$H$	$\mu_r$	$H$	$\mu_r$	$H$	$\mu_r$	$H$
0,10	0,7	1.140	0,45	1.775	0,8	1.000	2,0	400	800
0,20	0,9	1.780	0,5	3.200	1,0	1.600	4,5	355	1.600
0,30	1,0	2.400	0,6	4.000	1,25	1.920	8,0	300	2.400
0,40	1,2	2.660	0,7	4.570	1,45	2.200	13,0	246	3.200
0,50	1,4	2.860	0,9	4.450	1,6	2.500	20,0	200	4.000
0,60	1,7	2.820	1,3	3.690	1,8	2.630	28,0	171	4.800
0,70	2,2	2.500	1,7	3.290	2,0	2.800	40,0	140	5.600
0,80	2,7	2.370	2,3	2.780	2,5	2.560	55,0	117	6.400
0,90	3,2	2.250	3,3	2.180	3,1	2.320	80,0	90	7.200
1,00	4,0	2.000	4,7	1.700	4,0	2.000	110,0	73	8.000
1,10	5,0	1.750	6,3	1.395	5,0	1.760	150,0	58	8.800
1,20	6,2	1.550	8,0	1.200	7,0	1.370	200,0	48	9.600
1,30	8,5	1.230	10,5	990	12,0	867			10.400
1,40	12,0	930	13,5	830	23,0	487			11.200
1,50	20,0	600	18,0	567	40,0	300			12.000
1,60	35,0	365	31,0	413	75,0	171			12.800
1,70	60,0	226	52,0	262	140,0	97			13.600
1,80	100,0	144	90,0	160	240,0	60			14.400
1,90	160,0	95	148,0	103					15.200
2,00	250,0	64	300,0	53					16.000

## 7.5. ISTERESI MAGNETICA

Assai importante è il comportamento dei materiali ferromagnetici posti in campi variabili ciclicamente, come quelli prodotti da una corrente *alternata*, e cioè variabile alternativamente di senso. È il caso comune dei circuiti magnetici di quasi tutte le macchine elettriche.

Quando un materiale ferroso, che non ha subito precedenti magnetizzazioni, viene sottoposto ad un campo crescente con continuità da zero ad un certo valore  $H$ , la sua induzione cresce da zero ad un certo valore  $B$ , secondo la curva di magnetizzazione vista precedentemente, e che, più propriamente, dovrebbe essere chiamata *curva di prima magnetizzazione*.

Se ora si diminuisce gradatamente il campo, si osserva che l'induzione non ripassa più per gli stessi valori (fig. 7.16), ma conserva un valore maggiore di quello che aveva assunto, per ciascun valore di  $H$ , nella fase di prima magnetizzazione; cosicché, quando il campo è completamente annullato, l'induzione possiede ancora un certo valore, corrispondente all'ordinata  $OA$ , chiamato *induzione residua*.

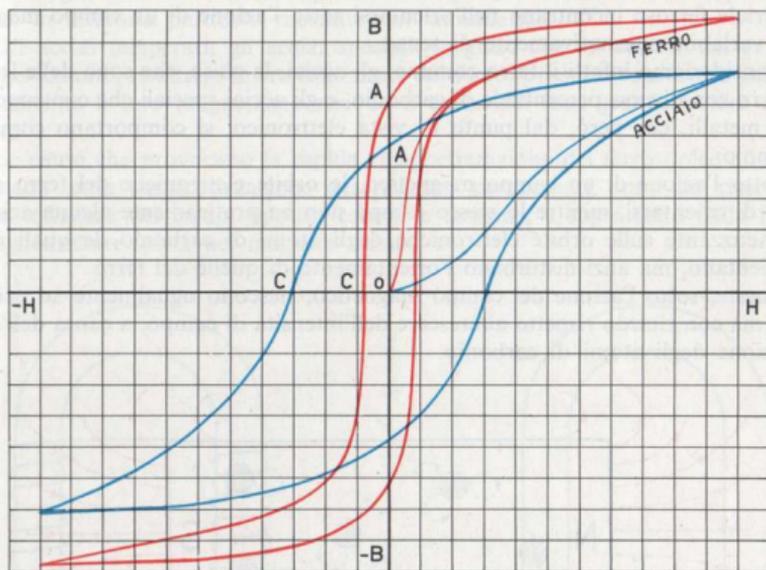


Fig. 7.16 - Cicli di isteresi magnetica.

Ciò dimostra che il materiale rimane ancora magnetizzato di un *magnetismo residuo*.

Per smagnetizzare completamente il corpo, ossia per annullare l'induzione residua, occorre invertire il campo magnetizzante ed aumentarlo gradatamente da zero fino ad un certo valore, corrispondente all'ascissa  $OC$ , chiamato *campo coercitivo*.

Continuando ad aumentare il campo inverso fino ad un valore  $-H$ , eguale in valore assoluto all'intensità di campo  $H$  che ha prodotto, nella fase di prima magnetizzazione, il valore  $B$  di induzione, il corpo risulta magnetizzato in senso opposto con una induzione  $-B$ , uguale in valore assoluto a  $B$ .

Se ora il campo magnetizzante viene ricondotto dal valore  $-H$  a zero e poi da zero al valore primitivo  $H$ , anche l'induzione dal valore  $-B$  ritorna al valore  $B$ , secondo un andamento perfettamente simmetrico a quello della fase antecedente.

Alla curva chiusa formata dai valori dell'induzione  $B$  corrispondenti ad una variazione ciclica del campo magnetico  $H$ , si dà il nome di *ciclo magnetico* o *ciclo di isteresi*, essendosi chiamato isteresi il *ritardo* della magnetizzazione a seguire le variazioni del campo magnetizzante.

La ragione di tale ritardo possiamo attribuirle all'*attrito* che le molecole del materiale ferroso incontrano nell'orientarsi sotto l'azione di un campo magnetico variabile alternativamente di senso.

Consideriamo infatti il ferro comune, gli acciai, le ghise, che sono delle leghe di ferro con diversa percentuale di carbonio, e gli acciai speciali che contengono altri metalli, che però, dal punto di vista elettronico, si comportano come il carbonio.

Sotto l'azione di un campo magnetico, le orbite elettroniche del ferro cercano di orientarsi, mentre lo stesso campo non ha praticamente alcuna azione magnetizzante sulle orbite elettroniche degli atomi di carbonio, le quali non si orientano, ma anzi disturbano l'orientamento di quelle del ferro.

Queste, sotto l'azione del campo magnetico, riescono ugualmente ad orientarsi ma con ritardo rispetto al crescere dell'intensità di campo, a causa dell'opposizione degli atomi di carbonio.

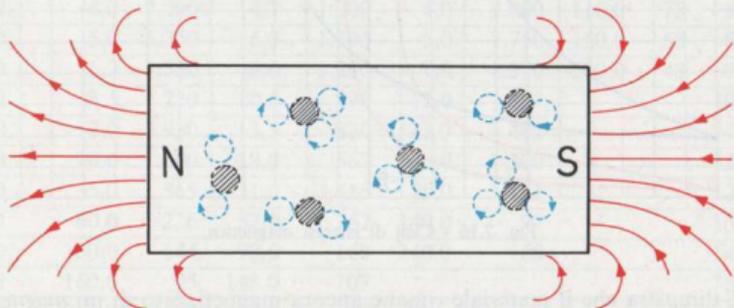


Fig. 7.17 - Gli atomi di carbonio mantengono orientate le correnti molecolari.

Togliendo il campo magnetizzante, le orbite degli atomi di ferro cercano di riprendere il loro naturale disorientamento, ossia di orientarsi ancora in tutti i sensi simmetricamente, senonché gli atomi di carbonio si oppongono e le bloccano nella posizione in cui si trovano.

Pertanto, anche se il campo si annulla, parecchie correnti orbitali continuano a rimanere orientate nello stesso senso (fig. 7.17), per cui i campi che esse producono si sommano, determinando nel materiale un magnetismo residuo.

Quindi un materiale ferromagnetico, anche se portato fuori dal campo magnetico agente, rimane *calamitato*.

La magnetizzazione residua può essere temporanea oppure permanente, indipendentemente dal suo valore.

Infatti è temporanea quando può essere distrutta da deboli campi coercitivi. Il ferro o l'acciaio dolce, (fig. 7.16) che, all'annullarsi del campo, conserva gran parte della magnetizzazione ricevuta, non riesce a mantenersi calamitato, in quanto basta un debole campo coercitivo, per annullare il suo magnetismo residuo.

La magnetizzazione residua è permanente quando solamente un campo coercitivo di intensità piuttosto rilevante può annullarla.

Gli acciai temperati, gli acciai speciali, le ghise che, al cessare del campo magnetizzante, risultano meno calamitate del ferro, possono conservare permanentemente il loro magnetismo residuo a causa del loro grande potere coercitivo.

Le cause che provocano la rapida smagnetizzazione del ferro dolce e la più o meno lenta smagnetizzazione dei magneti permanenti, sono da ricercarsi nelle influenze dei campi opposti esterni e terrestri, e soprattutto nella forza smagnetizzante insita nel magnete stesso.

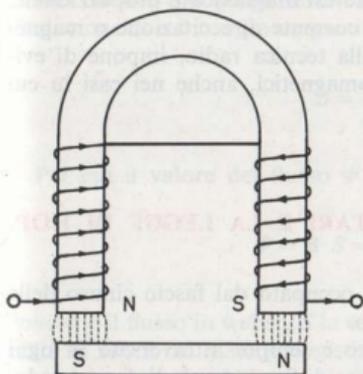


Fig. 7.18 - Elettrocalamita.

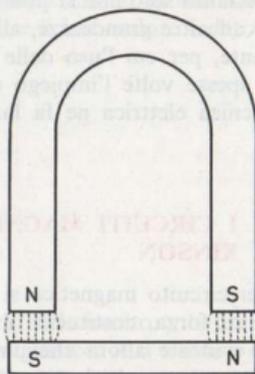


Fig. 7.19 - Calamita permanente

Infatti se questo è aperto alle estremità, le masse magnetiche libere sulle espansioni polari danno luogo ad un flusso che, nell'interno del magnete, ha senso contrario a quello che ha dato origine alla magnetizzazione. La forza smagnetizzante è grande nei magneti corti e di grande sezione, è debole nei magneti lunghi e sottili, è nulla nei magneti chiusi che non presentano cioè superfici polari.

Per conservare allora il magnetismo di un magnete conviene chiudere tra loro le facce polari mediante una sbarretta di ferro dolce, detta *ancora o armatura*.

Pertanto i materiali a debole campo coercitivo che si smagnetizzano quasi istantaneamente al cessare della causa magnetizzante e che sono caratterizzati da un ciclo di isteresi alto e stretto e quindi di deboli perdite magnetiche, vengono usati nella costruzione di elettrocalamite (fig. 7.18) e dei circuiti delle macchine elettriche sottoposti alle variazioni cicliche del campo magnetico.

I materiali invece a grande campo coercitivo, caratterizzati da un ciclo di isteresi largo e basso, vengono usati per la costruzione delle calamite permanenti (fig. 7.19).

Ogni sostanza ferromagnetica è caratterizzata oltre che dalla permeabilità magnetica, dalla sua isteresi magnetica, rappresentata da un proprio ciclo di isteresi.

Logicamente per compiere tale ciclo di magnetizzazione, occorre spendere dell'energia elettrica nel circuito di eccitazione, cioè nel circuito che ha fornito la f.m.m. necessaria a creare il campo magnetizzante.

Se poi un materiale ferromagnetico viene sottoposto ad una serie continua di cicli di magnetizzazione, si registra una perdita di energia, detta *perdita per isteresi*, che dipende dalla superficie racchiusa dalle curve chiuse del ciclo e che si trasforma in calore nel materiale magnetico.

Diciamo solo che la potenza perduta per isteresi magnetica è proporzionale, oltre ad altre grandezze, alla frequenza della corrente di eccitazione o magnetizzante, per cui l'uso delle alte frequenze nella tecnica radio, impone di evitare spesse volte l'impiego dei materiali ferromagnetici, anche nei casi in cui la tecnica elettrica ne fa largo uso.

## 7.6. I CIRCUITI MAGNETICI ELEMENTARI E LA LEGGE DI HOPKINSON

Per circuito magnetico si intende lo spazio occupato dal fascio chiuso delle linee di forza, costituenti il campo magnetico.

È evidente allora che un circuito magnetico è sempre attraversato in ogni sezione trasversale da uno stesso numero di linee di forza e quindi da un medesimo flusso  $\Phi$ .

Si possono avere:

### a) Circuiti magnetici uniformi od omogenei

Sono costituiti da un mezzo omogeneo a sezione costante. Esempio tipico è il circuito formato da un solenoide cilindrico toroidale chiuso, avvolto su un sostegno di materiale non magnetico (fig. 7.20) oppure su un nucleo ferromagnetico omogeneo.

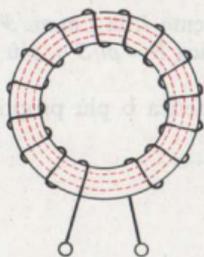


Fig. 7.20 - Nucleo non magnetico: il solenoide si estende per l'intera lunghezza del circuito.

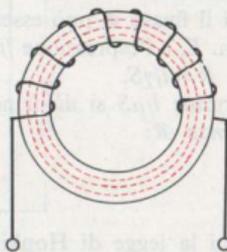


Fig. 7.21 - Nucleo ferromagnetico: il solenoide può avvolgere una parte del circuito.

In quest'ultimo caso non è necessario che il solenoide si estenda su tutto il nucleo (fig. 7.21), perché, essendo la permeabilità del materiale ferromagnetico di gran lunga superiore a quella dell'aria (o di qualsiasi altro materiale non magnetico), si può ritenere che il flusso prodotto dalla f.m.m., si chiuda tutto nel nucleo e cioè si mantenga costante per tutta la lunghezza del nucleo stesso.

Nei circuiti omogenei, fermo restando il valore della f.m.m. di eccitazione, l'induzione  $B$  e il campo magnetico  $H$  sono costanti e il loro valore è dato da:

$$B = \frac{\Phi}{S} \quad H = \frac{B}{\mu}$$

Per cui il valore del flusso  $\Phi$  risulta:

$$\Phi = B \cdot S = \mu H \cdot S = \mu S \frac{N \cdot I}{l}, \quad (7.8)$$

dove  $\Phi$  è il flusso in weber,  $S$  la sezione costante in  $m^2$  del circuito,  $\mu$  la permeabilità in  $Hr/m$  del materiale costituente il circuito magnetico,  $N$  il numero delle spire del solenoide,  $I$  l'intensità della corrente costante di eccitazione in ampere e  $l$  la lunghezza media in metri del circuito.

La (7.8) si può anche scrivere nella forma:

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\frac{l}{\mu S}}, \quad (7.9)$$

ed esprime la legge fondamentale dei circuiti magnetici, detta *legge di Hopkinson* o di *Ohm magnetica* per la sua analogia formale con la legge di Ohm per i circuiti elettrici.

Infatti il flusso  $\Phi$  può essere paragonato alla corrente  $I$ , la f.m.m.  $\mathcal{F} = N \cdot I$  alla f.e.m.  $E$ , e l'espressione  $l/\mu S$  alla resistenza elettrica  $R = \rho l/S$  o, più evidentemente,  $R = l/\gamma S$ .

Al termine  $l/\mu S$  si dà il nome di resistenza magnetica o più propriamente di *riluttanza*  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S}. \quad (7.10)$$

Per cui la legge di Hopkinson:

$$\Phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}, \quad (7.11)$$

dice che: *Il flusso magnetico  $\Phi$  in un circuito magnetico si ottiene dividendo la f.m.m.  $\mathcal{F}$  agente per la riluttanza  $\mathcal{R}$  del circuito stesso.*

La riluttanza magnetica  $\mathcal{R}$  si misura in  $Hr^{-1}$  vale a dire con l'inverso dell'henry; infatti:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} = \frac{m}{\frac{Hr}{m} \cdot m^2} = \frac{1}{Hr} = Hr^{-1}.$$

Il calcolo dei circuiti magnetici riguarda principalmente la determinazione del numero di amperspire  $N \cdot I$  (o f.m.m.  $\mathcal{F}$ ) necessario per stabilire un dato flusso  $\Phi$  in un circuito magnetico, e, in casi speciali, la determinazione del flusso  $\Phi$  corrispondente ad una data f.m.m.  $\mathcal{F}$ .

Allo scopo si possono usare le due espressioni:

$$\mathcal{F} = \Phi \cdot \mathcal{R} \quad \mathcal{F} = Hl,$$

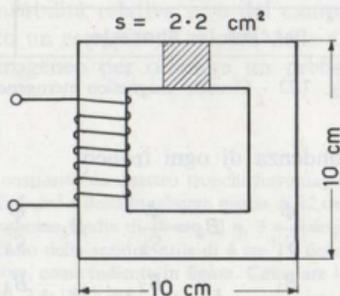
e cioè due metodi: quello della riluttanza e quello del campo. Il secondo è generalmente meno laborioso.

In entrambi i casi però, per conoscere il valore della riluttanza  $\mathcal{R}$  e del campo magnetico  $H$ , occorre dapprima calcolare il valore dell'induzione magnetica  $B$ ,

per poter rilevare dalla tabella di magnetizzazione dei materiali (v. tabella 8) i corrispondenti valori della permeabilità relativa  $\mu_r$  e del campo  $H$ .

### Esempio numerico

Un circuito magnetico omogeneo di acciaio dolce ha la forma e le dimensioni rappresentate in figura. Calcolare la f.m.m.  $\mathcal{F}$  necessaria per ottenere un flusso  $\Phi$  di  $2 \cdot 10^{-4}$  Wb.



### Soluzione

Calcolo della lunghezza media  $l$  del circuito. Considerando che la sezione è quadrata di 2 cm di lato, si ha  $l = 4 \cdot 8 = 32$  cm.

Calcolo dell'induzione magnetica  $B$ :

$$B = \frac{\Phi}{S} = \frac{2 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 0,5 \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}.$$

Dalla tabella n. 8 si ricava il valore della permeabilità relativa  $\mu_r$  e del campo  $H$  per l'acciaio dolce,

$$\text{per } B = 0,5 \text{ Wb/m}^2 \text{ si ha } \mu_r = 2.860 \text{ e } H = 1,4 \text{ Asp/cm}.$$

Calcolo della f.m.m. con il metodo della riluttanza:

$$\mathcal{F} = \Phi \cdot \mathcal{R} = \Phi \cdot \frac{l}{\mu \cdot S} = 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{32 \cdot 10^{-2}}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 2.860 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 44,8 \text{ Asp}.$$

Calcolo della f.m.m. con il metodo del campo magnetico:

$$\mathcal{F} = H \cdot l = 1,14 \cdot 32 = 44,8 \text{ Asp}.$$

### b) Circuiti non uniformi od eterogenei

Sono costituiti da tronchi di materiale diverso aventi sezioni uguali od anche diverse (fig. 7.22), oppure dello stesso materiale, ma di sezioni diverse.

L'induzione  $B$  varia per ogni sezione e il campo  $H$  varia, anche per una stessa sezione, con la permeabilità  $\mu$  del materiale.

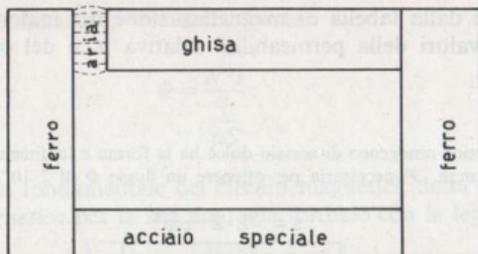


Fig. 7.22 - Circuito magnetico eterogeneo.

Si ha cioè in corrispondenza di ogni tronco:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} \quad B_2 = \frac{\Phi}{S_2} \quad B_3 = \frac{\Phi}{S_3},$$

$$H_1 = \frac{B_1}{\mu_1} \quad H_2 = \frac{B_2}{\mu_2} \quad H_3 = \frac{B_3}{\mu_3}.$$

Ogni tronco è un tratto omogeneo del circuito, per cui la f.m.m. totale  $\mathcal{F}$  necessaria a produrre un flusso  $\Phi$  prefissato, è dato dalla somma delle f.m.m. parziali che bisognerebbe applicare a ciascun tronco per ottenere lo stesso flusso  $\Phi$  nello stesso senso. Cioè:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \mathcal{F}_3 \dots,$$

od anche:

$$\mathcal{F}_t = \Phi \mathcal{R}_1 + \Phi \mathcal{R}_2 + \Phi \mathcal{R}_3 \dots = \Phi (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 \dots). \quad (7.12)$$

Per cui la f.m.m. totale si calcola moltiplicando il flusso  $\Phi$  per la somma delle riluttanze dell'intero circuito.

Si noti ancora una volta l'analogia con i circuiti elettrici, per i quali  $E = I \cdot (R_1 + R_2 + R_3 \dots)$ .

Logicamente ciascuna riluttanza va calcolata con gli elementi caratteristici del tronco a cui si riferisce:

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} \quad \mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_2 S_2} \quad \mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu_3 S_3}.$$

Usando il metodo dei campi magnetici  $H$ , si ha:

$$\mathcal{F} = H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 \dots \quad (7.13)$$

Per cui la f.m.m. totale si calcola anche sommando i prodotti  $HI$  di ciascun tronco.

I prodotti  $\Phi \mathcal{R}$  e  $H \cdot l$ , per analogia con i circuiti elettrici, si possono chiamare *cadute di tensione magnetica*.

Anche per i circuiti eterogenei, per calcolare la riluttanza  $\mathcal{R}$  e per conoscere il valore del campo  $H$  relativi a ciascun tronco, occorre dapprima calcolare l'induzione  $B$  di ciascun tronco, onde poter rilevare dalla tabella 8 i corrispondenti valori della permeabilità relativa  $\mu_r$  e del campo  $H$ .

Diamo qui di seguito un esempio di calcolo della f.m.m. da applicare ad un circuito magnetico eterogeneo per ottenere un prefissato valore  $\Phi$  del flusso magnetico.

#### Esempio numerico

Un circuito magnetico è costituito da quattro tronchi ferromagnetici e da un traferro. Il tronco n. 1 è di ghisa della sezione di  $4 \text{ cm}^2$  e della lunghezza media di  $12 \text{ cm}$ , il n. 2 è di ferro comune della sezione di  $6 \text{ cm}^2$ , e della lunghezza media di  $10 \text{ cm}$ , il n. 3 è di ferro della sezione di  $2 \text{ cm}^2$ , il n. 4 è un insieme di lamiere al silicio della sezione utile di  $4 \text{ cm}^2$ , e della lunghezza di  $9,5 \text{ cm}$  e il n. 5 è un traferro di  $5 \text{ mm}$  di spessore, come indicato in figura. Calcolare la f.m.m. da applicare al circuito per avere in esso il flusso di  $2,4 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ .

#### Soluzione

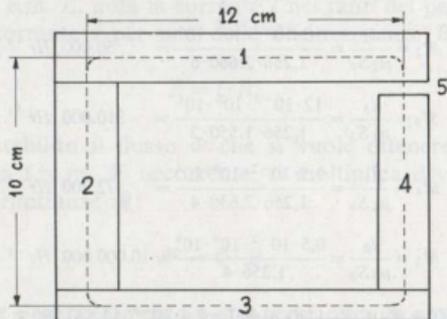
Calcolo dell'induzione magnetica  $B$  di ciascun tronco:

$$B_1 = \frac{\Phi}{S_1} = \frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 0,6 \text{ Wb/m}^2,$$

$$B_2 = \frac{\Phi}{S_2} = \frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{6 \cdot 10^{-4}} = 0,4 \text{ Wb/m}^2,$$

$$B_3 = \frac{\Phi}{S_3} = \frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{2 \cdot 10^{-4}} = 1,2 \text{ Wb/m}^2,$$

$$B_4 = \frac{\Phi}{S_4} = \frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 0,6 \text{ Wb/m}^2.$$



La sezione del traferro può essere ritenuta uguale a quella del quarto tronco, per cui:

$$B_0 = \frac{\Phi}{S_0} = \frac{2,4 \cdot 10^{-4}}{4 \cdot 10^{-4}} = 0,6 \text{ Wb/m}^2.$$

Dalla tabella n. 8 si rilevano, corrispondentemente ai valori delle diverse induzioni  $B$  e per ciascun materiale, i valori del campo magnetico  $H$ , oppure i valori delle permeabilità relative  $\mu_r$ , a seconda del metodo risolutivo che si vuole usare.

1° tronco: ghisa:

$$\text{per } B_1 = 0,6 \text{ Wb/m}^2 \text{ si ha } H_1 = 28 \text{ Asp/cm e } \mu_{r1} = 171.$$

2° tronco: ferro:

$$\text{per } B_2 = 0,4 \text{ Wb/m}^2 \text{ si ha } H_2 = 1,2 \text{ Asp/cm e } \mu_{r2} = 2.660$$

3° tronco: ferro:

$$\text{per } B_3 = 1,2 \text{ Wb/m}^2 \text{ si ha } H_3 = 6,2 \text{ Asp/cm e } \mu_{r3} = 1.550.$$

4° tronco: lam. sil.:

$$\text{per } B_4 = 0,6 \text{ Wb/m}^2 \text{ si ha } H_4 = 1,8 \text{ Asp/cm e } \mu_{r4} = 2.630.$$

5° tronco: aria:

$$\text{per } B_0 = 0,6 \text{ Wb/m}^2 \text{ si ha } H_0 = 4.800 \text{ Asp/cm}.$$

Calcolo della f.m.m.  $\mathcal{F}_I$  con il metodo dei campi magnetici:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_I &= H_1 \cdot l_1 + H_2 \cdot l_2 + H_3 \cdot l_3 + H_4 \cdot l_4 + H_0 \cdot l_0 = \\ &= 28 \cdot 12 + 1,2 \cdot 10 + 6,2 \cdot 12 + 1,8 \cdot 9,5 + 4.800 \cdot 0,5 \cong 2.840 \text{ Asp}. \end{aligned}$$

Per calcolare la f.m.m. totale con il metodo delle riluttanze, occorre calcolare la riluttanza di ciascun tronco.

$$\mathcal{R}_1 = \frac{l_1}{\mu_1 S_1} = \frac{12 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 \cdot 10^4}{1,256 \cdot 171 \cdot 4} = 1.400.000 \text{ Hr}^{-1},$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{l_2}{\mu_2 S_2} = \frac{10 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 \cdot 10^4}{1,256 \cdot 2.660 \cdot 6} = 50.000 \text{ Hr}^{-1},$$

$$\mathcal{R}_3 = \frac{l_3}{\mu_3 S_3} = \frac{12 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 \cdot 10^4}{1,256 \cdot 1.550 \cdot 2} = 310.000 \text{ Hr}^{-1},$$

$$\mathcal{R}_4 = \frac{l_4}{\mu_4 S_4} = \frac{9,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 \cdot 10^4}{1,256 \cdot 2.630 \cdot 4} = 72.200 \text{ Hr}^{-1},$$

$$\mathcal{R}_5 = \frac{l_0}{\mu_0 S_0} = \frac{0,5 \cdot 10^{-2} \cdot 10^6 \cdot 10^4}{1,256 \cdot 4} = 10.000.000 \text{ Hr}^{-1},$$

$$\mathcal{F}_I = \Phi (\mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4 + \mathcal{R}_5) = 2,4 \cdot 10^{-4} \cdot 11.832.200 \cong 2.840 \text{ Asp}.$$

I circuiti omogenei e i circuiti eterogenei ora descritti, sono circuiti in serie, perché percorsi da un medesimo flusso  $\Phi$  e del resto le stesse formule risolutive dei circuiti eterogenei lo dimostrano.

Nelle macchine elettriche si hanno di frequente dei circuiti magnetici in parallelo e quasi sempre simmetrici. Per il nostro studio interessa accennare ad un tipico circuito parallelo simmetrico usato nei trasformatori.

Consideriamo il circuito magnetico di fig. 7.23 costruito con un materiale ferromagnetico omogeneo. Esso è un circuito parallelo, perché il flusso generato dalla f.m.m. applicata al tronco centrale, si divide nei due tronchi laterali. È simmetrico perché il tronco centrale ha sezione doppia di quella dei tronchi laterali e questi sono uguali tra loro per avere uguale la lunghezza media e quindi la riluttanza.

Esso è paragonabile al circuito elettrico di fig. 7.24, dove le resistenze  $R$  stanno al posto delle riluttanze  $\mathcal{R}$  dei tronchi laterali e la f.e.m.  $E$  sta al posto della f.m.m.  $\mathcal{F}$ .

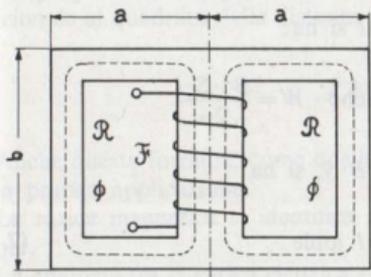


Fig. 7.23 - Circuito magnetico parallelo simmetrico.

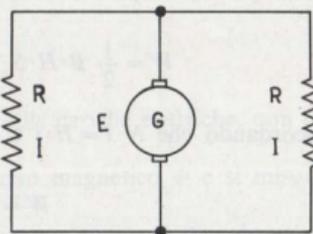


Fig. 7.24 - Circuito elettrico parallelo simmetrico.

Per calcolare la f.e.m.  $E$ , nota la corrente  $I$  nei rami del parallelo, basta moltiplicare la stessa corrente  $I$  per una delle due resistenze  $R$ .

$$E = I \cdot R.$$

Analogamente, stabilito il flusso  $\Phi$  che si vuole ottenere nei tronchi laterali, per calcolare la f.m.m.  $\mathcal{F}$  occorrente, si moltiplica il valore del flusso  $\Phi$  per una delle due riluttanze  $\mathcal{R}$ :

$$\mathcal{F} = \Phi \cdot \mathcal{R},$$

usando logicamente il procedimento visto per i circuiti omogenei.

## 7.7. ENERGIA DEI CAMPI MAGNETICI

Abbiamo detto che nei circuiti magnetici, per ottenere un flusso  $\Phi$  e quindi un campo  $H$ , occorre applicare una f.m.m.  $\mathcal{F}$  e cioè una energia elettrica. Quindi, per produrre un campo magnetico, oppure per magnetizzare un corpo, occorre spendere una energia.

Consideriamo dapprima la curva di prima magnetizzazione di un materiale ferromagnetico. Per ottenere una induzione  $B$  si deve variare il campo magnetico da zero ad un certo valore  $H$ , si deve cioè produrre un campo di valore medio  $1/2 H$ .

Il valore dell'energia di magnetizzazione è logicamente relativo anche al volume del corpo sottoposto all'azione magnetizzante.

Per ogni unità di volume, si ha che l'energia  $W$  occorrente alla magnetizzazione è data da:

$$W = \frac{1}{2} B \cdot H \text{ joule ,}$$

e perciò per un corpo di volume  $V = S \cdot l$  si ha:

$$W = \frac{1}{2} B \cdot H \cdot S \cdot l \text{ od anche } W = \frac{B^2 \cdot S \cdot l}{2\mu} .$$

Ricordando che  $N \cdot I = H \cdot l$  e che  $\Phi = B \cdot S$ , si ha:

$$W = \frac{1}{2} \Phi \cdot N \cdot I \text{ joule .} \quad (7.14)$$

Quindi l'energia di un campo magnetico è data dal semiprodotto delle ampere-spire magnetizzanti  $N \cdot I$  per il flusso magnetico  $\Phi$  da esse prodotto.

Oppure, essendo  $\Phi = N \cdot I / \mathcal{R}$  e  $N \cdot I = \mathcal{F}$ , si ha anche:

$$W = \frac{1}{2} = \frac{\mathcal{F}^2}{\mathcal{R}} . \quad (7.15)$$

Per cui l'energia di un campo magnetico è data anche dal rapporto tra il quadrato della f.m.m.  $\mathcal{F}$  e il doppio della riluttanza  $\mathcal{R}$  del circuito.

## 7.8. FORZE COULOMBIANE E AZIONI DINAMICHE TRA POLARITÀ MAGNETICHE

Le polarità magnetiche, come le cariche elettriche, si attirano se sono di nome opposto e si respingono se sono dello stesso nome.

Le forze che si sviluppano tra le cariche elettriche sono dovute alla naturale tendenza che hanno le cariche di nome opposto a ricongiungersi per neutralizzare e ristabilire l'equilibrio energetico degli atomi.

Le forze che si manifestano tra le polarità magnetiche sono dovute alla naturale tendenza che hanno le linee di forza magnetiche ad accorciare o addirittura ad annullare la distanza tra le polarità stesse, onde diminuire il più possibile la riluttanza del circuito magnetico.

Per questo le linee di forza magnetiche sono state paragonate a fili elastici tesi che tendono a diminuire la loro tensione meccanica.

Le polarità magnetiche, per analogia formale con le cariche elettriche, possono immaginarsi costituite da *cariche magnetiche* o *masse magnetiche*, una positiva  $+m$  e l'altra negativa  $-m$ , concentrate rispettivamente nel polo nord e nel polo sud.

La forza  $F$  che si esercita tra due cariche magnetiche obbedisce anch'essa ad una legge analoga alla legge di Coulomb per le cariche elettriche, ed è direttamente proporzionale al prodotto delle due masse  $m_1$  e  $m_2$  ed inversamente proporzionale al quadrato della distanza  $D$  tra i centri di azione delle masse stesse:

$$F \equiv \frac{m_1 \cdot m_2}{D^2}.$$

Anche questa formula, come quella relativa alle cariche elettriche, non trova però pratica applicazione.

La carica magnetica si identifica con il flusso magnetico  $\Phi$  e si misura in weber.

La analogia tra la carica elettrica  $Q$  e la carica magnetica  $\Phi$  sta solo nel fatto che mentre la prima è un *impulso di corrente*  $Q = I \cdot t$ , la seconda è un *impulso di tensione*  $\Phi = m = V \cdot t$ , come verrà chiarito in seguito.

Però, mentre la carica elettrica è una particella elementare di elettricità che può spostarsi lungo un circuito elettrico quando questo è sottoposto ad una tensione, la carica magnetica non è una particella di magnetismo che possa spostarsi lungo un circuito magnetico, ma è solo una perturbazione dello spazio o del materiale che costituisce il circuito magnetico, e che si verifica quando questo è sottoposto all'azione di una f.m.m. o di una corrente magnetizzante.

Diretta conseguenza delle forze coulombiane che si manifestano tra cariche magnetiche, sono:

a) **Le azioni magnetodinamiche**, ossia le azioni o meglio le reazioni che un magnete esercita su un altro magnete.

Consideriamo due magneti affacciati con opposte polarità (fig. 7.25).

Le loro linee di forza si concatenano in modo da determinare un unico flusso  $\Phi$  comune ai due magneti. Se lo spessore di aria è sufficientemente piccolo rispetto alla superficie  $S$  dei poli affacciati, le linee di forza si mantengono paral-

le e non si disperdono, per cui l'induzione  $B_0$  dell'aria può ritenersi uguale a quella dei magneti.

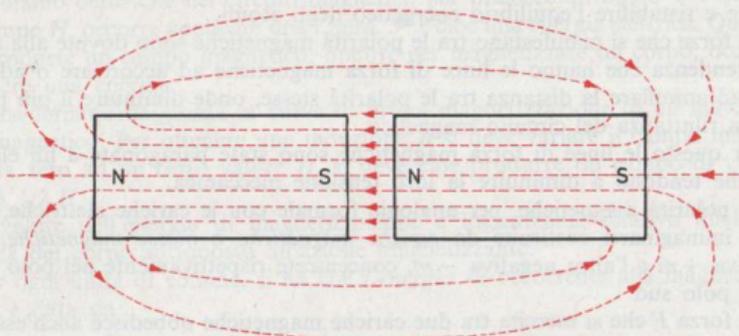


Fig. 7.25 - Azione magnetodinamica tra due magneti permanenti.

L'energia del campo magnetico nel traferro di volume  $V_0 = S \cdot l$  è data, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, da:

$$W = \frac{B^2 S l}{2\mu_0},$$

dove  $\mu_0$  è la permeabilità dell'aria.

Tra le due polarità opposte si manifesta una forza di attrazione  $F$  e, se almeno uno dei due magneti è libero di muoversi, esso si avvicinerà all'altro fino a toccarlo, annullando così il traferro e l'energia magnetica in esso contenuta. Ciò significa che il lavoro meccanico  $F \cdot l$  compiuto dal magnete, deve uguagliare l'energia nel traferro.

$$F l = \frac{B^2 S l}{2\mu_0},$$

da cui si ricava il valore della forza  $F$ :

$$F = \frac{B^2 S}{2\mu_0} \text{ vis o newton.} \quad (7.16)$$

Volendo esprimere la forza in kg (1 kg = 9,8 vis) e sostituendo al posto di  $\mu_0$  il suo valore di  $1,256 \cdot 10^{-6}$  Hr/m, si ha:

$$F = \frac{B^2 S}{24,5 \cdot 10^{-6}} \text{ kg.} \quad (7.17)$$

La forza di attrazione è dunque proporzionale al quadrato dell'induzione  $B$ . La formula (7.17) viene usata per il calcolo della forza portante degli elettromagneti e per calcolare l'induzione  $B$ , quando è nota la forza di attrazione  $F$ .

b) **Le azioni magnetoelettriche**, ossia le azioni che un campo magnetico fisso esercita su una corrente elettrica mobile.

Consideriamo un campo magnetico uniforme, come quello esistente tra le espansioni polari affacciate di una calamita permanente (fig. 7.26-a).

Un conduttore rettilineo percorso da una corrente  $I$ , immerso in tale campo, genera un campo magnetico circolare (fig. 7.26-b), che concatenandosi con quello del magnete, determina un flusso risultante deformato come rappresentato in fig. 7.26-c.

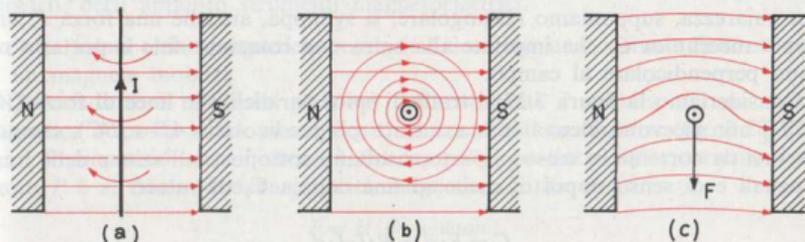


Fig. 7.26 - Azioni magnetoelettriche su un conduttore rettilineo.

Le linee di forza, abbiamo detto or ora, tendono a seguire i tratti di circuito di minor riluttanza e perciò tendono a raddrizzarsi, ad attraversare cioè il traferro tra le due polarità in linea retta.

Il conduttore subisce così l'azione di una forza meccanica  $F$  trasversale al flusso che lo porta ai limiti del campo.

L'intensità della forza  $F$  è proporzionale alla densità del flusso e cioè all'induzione  $B$ , alla lunghezza  $l$  utile del conduttore ossia al tratto di conduttore che si trova immerso perpendicolarmente nel campo magnetico, e alla corrente  $I$  che percorre il conduttore:

$$F = B \cdot l \cdot I \text{ newton.} \quad (7.18)$$

Se il conduttore è obliquo rispetto al flusso di un angolo  $\alpha$ , pur rimanendo nel piano parallelo alle linee di forza, si ha:

$$F = B \cdot l \cdot I \text{ sen } \alpha,$$

dalla quale si deduce che se il conduttore è parallelo alle linee di forza, esso non riceve alcuna spinta.

Se poi il conduttore è obliquo anche rispetto al piano delle linee di forza di un angolo  $\beta$ , si ha:

$$F = B \cdot l \cdot I \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta . \quad (7.19)$$

Il senso di azione della forza  $F$  si trova direttamente con la regola di Fleming della mano sinistra, riferita però al senso convenzionale della corrente, ossia al senso opposto a quello da noi usato:

*Disponendo pollice, indice e medio della mano sinistra su tre piani perpendicolari tra loro e indicando con il pollice la direzione del campo magnetico, con l'indice il senso della corrente, il medio dà il senso della forza  $F$ .*

Se al posto di un conduttore rettilineo consideriamo una spira, che, per maggior chiarezza, supponiamo rettangolare, si sviluppa, anziché una forza  $F$ , una coppia meccanica  $C$ , che imprime alla spira una rotazione fino a portarla nel piano perpendicolare al campo.

Consideriamo la figura 7.27: i tratti di spira paralleli alle linee di forza ( $AB$  e  $CD$ ) non ricevono alcuna spinta, i tratti perpendicolari ( $AD$  e  $BC$ ), essendo percorsi da corrente in senso opposto, risultano sottoposti all'azione delle forze  $F$  uguali e di senso opposto, ossia ad una coppia  $C$ , di valore:

$$C = F \cdot d = B \cdot l \cdot I \cdot d ,$$

dove  $d$  è la distanza tra le due forze.

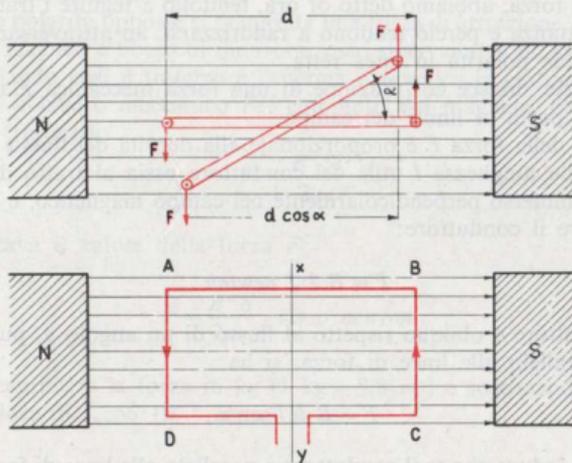


Fig. 7.27 - Azioni magnetoelettriche su una spira.

Se la spirale è fulcrata sul suo asse  $xy$ , sottoposta alla coppia  $C$ , essa ruota nel senso delle forze  $F$ .

Senonché il braccio  $d$  della coppia va via via diminuendo con l'aumentare dell'angolo  $\alpha$  di rotazione, secondo i valori che assume il coseno dello stesso angolo  $\alpha$ . Per cui il valore della coppia va diminuendo fino ad annullarsi per  $\alpha$  uguale a  $90^\circ$ .

Essendo il prodotto  $I \cdot d$  la sezione  $S$  della spirale, il valore della coppia in funzione dell'angolo  $\alpha$  di rotazione, è dato da:

$$C = B \cdot S \cdot I \cdot \cos \alpha \quad \text{od anche} \quad C = \Phi \cdot I \cdot \cos \alpha.$$

Le coppie meccaniche dovute alle azioni magnetoelettriche vengono sfruttate nei motori elettrici e negli strumenti elettrici di misura (amperometri e voltometri), detti appunto strumenti magnetoelettrici.

c) **Le azioni elettromagnetiche**, ossia le azioni che una corrente fissa esercita su un magnete mobile.

Un conduttore rettilineo percorso dalla corrente  $I$  esercita su una massa magnetica  $\Phi$  posta in un punto  $P$  a distanza  $R$  dal conduttore (fig. 7.28) una forza  $F$  proporzionale all'intensità del campo  $H$  prodotto dalla corrente  $I$  nel punto  $P$  e al flusso  $\Phi$  della polarità magnetica. Si ha cioè:

$$F = H \cdot \Phi \text{ newton.}$$

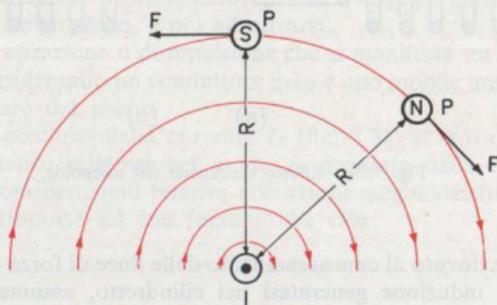


Fig. 7.28 - Azioni elettromagnetiche.

Sostituendo al posto di  $H$  la sua espressione data dalla legge di Biot e Savard e al posto di  $\Phi$  il prodotto  $B \cdot S$ , si ha rispettivamente:

$$F = \frac{I}{2\pi R} \cdot \Phi \quad \text{oppure} \quad F = \frac{I}{2\pi R} S \cdot B, \quad (7.20)$$

dove  $B$  è l'induzione posseduta dalla massa magnetica e  $S$  la superficie polare.

La direzione della forza  $F$  è perpendicolare al piano del conduttore passante per il punto  $P$  e precisamente, se la massa magnetica è nord, ha il senso delle linee di flusso generate dalla corrente (fig. 7.28).

Poiché la forza  $F$  è proporzionale all'intensità della corrente  $I$ , il principio delle azioni elettromagnetiche viene sfruttato nella costruzione degli strumenti elettrici di misura (amperometri e voltometri), detti appunto strumenti elettromagnetici.

L'azione elettromagnetica è messa in evidenza dal *potere succhiante* dei solenoidi.

Se in prossimità di una estremità polare di un solenoide cilindrico (fig. 7.29), percorso da corrente, viene disposto un cilindretto di materiale ferromagnetico, questo si magnetizza per induzione, generando un campo magnetico avente lo stesso senso di quello prodotto dal solenoide.

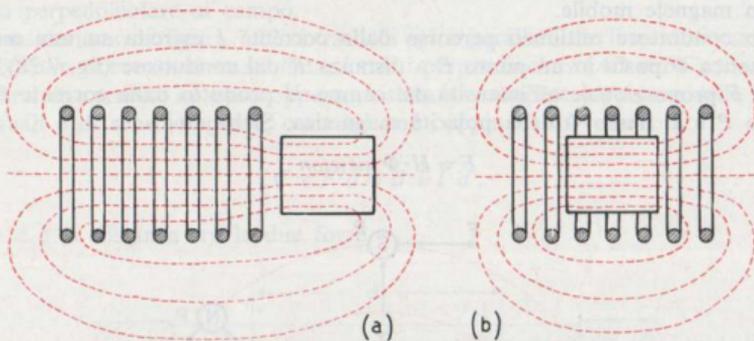


Fig. 7.29 - Effetto succhiante del solenoide.

Il flusso totale dovuto al concatenamento delle linee di forza del campo agente e delle linee di induzione generatesi nel cilindretto, assume l'andamento di fig. 7.29-a. Ma le linee di flusso, per la naturale tendenza che hanno ad accorciarsi e cioè a percorrere il circuito di minore riluttanza, esercitano sul cilindretto una forza di attrazione, che tende a trascinarlo nell'interno del solenoide.

Tale forza si annulla solo quando il cilindretto ha raggiunto la zona centrale del solenoide (fig. 7.29-b).

In questo consiste il *potere succhiante* dei solenoidi.

**d) Le azioni elettrodinamiche**, che consistono nell'azione o meglio nella reazione tra i flussi generati da due correnti.

Consideriamo due conduttori rettilinei percorsi da corrente (fig. 7.30).

Se essi sono paralleli e percorsi da corrente in senso opposto, si respingono perché i flussi generati sono, nello spazio tra i due conduttori, della stessa polarità, ossia diretti nello stesso senso.

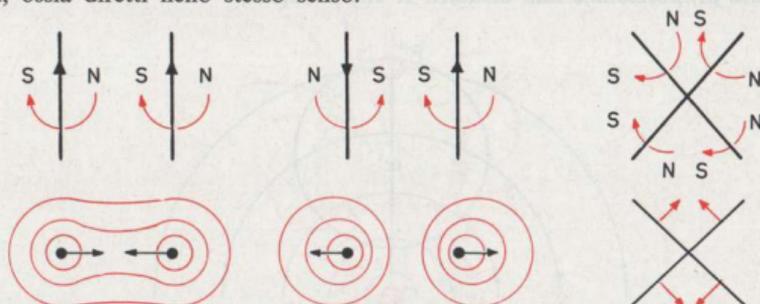


Fig. 7.30 - Azioni elettrodinamiche tra correnti rettilinee.

Se invece sono percorsi da corrente nello stesso senso, essi si attirano, perché i due flussi, nella zona intermedia, sono di polarità opposta e si annullano, formando un flusso che abbraccia esternamente i due conduttori. Le linee di flusso, per la tendenza che hanno ad accorciarsi il più possibile, provocano la forza di attrazione tra i due conduttori.

Se poi questi sono incrociati tendono prima a disporsi paralleli tra loro con le correnti nello stesso senso, e poi ad attrarsi.

La forza  $F$  di attrazione o di repulsione che si manifesta tra i due conduttori può ricavarsi considerando un conduttore fisso e uno mobile immerso nel campo magnetico generato dal primo.

Il conduttore percorso dalla corrente  $I_2$  (fig. 7.31) si trova allora immerso nel campo magnetico esistente nel punto  $P$ , generato dalla corrente  $I_1$ . Valgono quindi le considerazioni relative alle azioni magnetoelettriche. Il conduttore 2 risulta sottoposto ad una forza  $F$  che vale:

$$F = B_1 \cdot l_2 \cdot I_2 .$$

Ma,

$$B_1 = \mu_0 \cdot H_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi R} ,$$

per cui:

$$F = \mu_0 \cdot \frac{I_1}{2\pi R} \cdot l_2 \cdot I_2 .$$

Indicando con  $K$  il termine  $\frac{\mu_0 l_2}{2\pi}$  si ha:

$$F = K \cdot \frac{I_1 \cdot I_2}{R} . \quad (7.21)$$

Quindi la forza di attrazione o di repulsione che una corrente fissa esercita su una corrente mobile è proporzionale al prodotto delle due correnti e inversamente proporzionale alla distanza  $R$  che le separa.

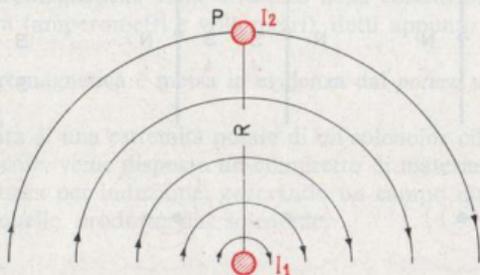


Fig. 7.31 - Azioni elettrodinamiche tra due conduttori rettilinei.

Se poi le due correnti sono uguali tra loro, si ha:

$$F = K \cdot \frac{I^2}{R} \quad (7.22)$$

Il principio delle azioni elettrodinamiche viene applicato negli strumenti elettrici di misura (amperometri, wattometri), detti appunto strumenti elettrodinamici.

## 7.9. CAMPO MAGNETICO TERRESTRE E SCHERMI MAGNETICI

Le azioni reciproche tra corpi magnetizzati mettono in evidenza che un magnete libero di muoversi ed immerso in un campo magnetico, si orienta sempre secondo la direzione delle linee di forza agenti e precisamente con il proprio nord diretto verso il polo sud e con il proprio sud diretto verso il polo nord del campo magnetico di influenza.

Si osserva così che un leggero magnete permanente (ago magnetico), fulcrato verticalmente e libero di ruotare nel piano orizzontale, si dispone sempre, in un certo punto della terra, nella stessa direzione che coincide approssimativamente con la direzione del meridiano geografico. Dobbiamo dedurre che la terra è un grande magnete permanente, circondato da un insieme di linee di forza costituente il campo magnetico terrestre (fig. 7.32).

Il piano verticale che passa per l'asse magnetico dicesi meridiano magnetico e forma con il meridiano geografico un certo angolo, diverso da luogo a luogo e variabile anche per uno stesso luogo con il tempo, detto *angolo di declinazione magnetica*.

Ciò vuol dire che i poli magnetici della terra non coincidono con i poli geografici.

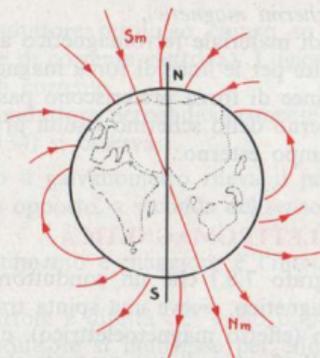


Fig. 7.32 - Il magnetismo terrestre.

Si osserva ancora che se l'ago magnetico è invece fulcrato orizzontalmente e libero di muoversi nel piano verticale, assume una posizione inclinata rispetto al piano dell'orizzonte. L'angolo corrispondente è chiamato *angolo di inclinazione magnetica* e varia anch'esso da luogo a luogo ed è pressapoco coincidente con la latitudine terrestre. L'angolo di inclinazione è cioè di  $90^\circ$  in corrispondenza dei poli magnetici e diventa uguale a zero in corrispondenza dell'equatore.

I corpi ferrometallici sono allora permanentemente sottoposti all'azione magnetizzante della terra e ad una forza magnetica costituita da una componente orizzontale e da una componente verticale.

Da qui la necessità di dover spesso volte neutralizzare l'azione magnetica terrestre e di sottrarre certe apparecchiature elettriche e radio all'influenza del magnetismo terrestre.

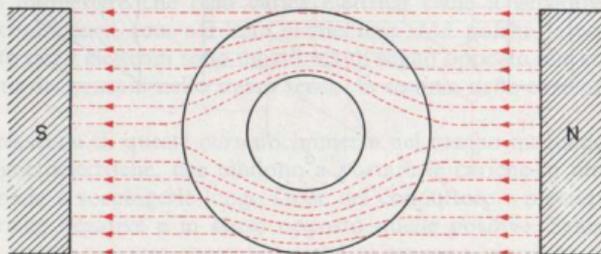


Fig. 7.33 - Schermo magnetico.

Come l'influenza dei campi elettrici può essere neutralizzata mediante gli schermi elettrici, così, per sottrarre un corpo all'azione di un campo magnetico esterno, si ricorre agli *schermi magnetici*.

Questi sono involucri di materiale ferromagnetico ad altissima permeabilità (fig. 7.33), così da costituire per le linee di forza magnetiche un circuito di piccolissima riluttanza. Le linee di forza preferiscono passare attraverso l'involucro, per cui lo spazio interno dello schermo risulta praticamente sottratto alle azioni magnetiche del campo esterno.

## 7.10. L'INDUZIONE ELETTROMAGNETICA

Abbiamo detto (paragrafo 7.8.) che un conduttore percorso da corrente, immerso in un campo magnetico, riceve una spinta trasversale al flusso che lo porta ai limiti del campo (effetto magnetoelettrico), e che una massa magnetica immersa nel campo d'influenza di una corrente elettrica, risulta sottoposta ad una forza meccanica di spostamento (effetto elettromagnetico).

In generale i campi magnetici e le correnti reagiscono tra di loro provocando il movimento o del campo o della corrente.

Reciprocamente, se un conduttore facente parte di un circuito chiuso, viene spostato in un campo magnetico, oppure se un campo magnetico, spostandosi, interseca il conduttore, in questo si sviluppa una corrente elettrica. È questo il *fenomeno dell'induzione elettromagnetica*, su cui si basa il funzionamento dei generatori industriali di energia elettrica (alternatori e dinamo), dei trasformatori, dei motori elettrici e di molteplici apparecchiature elettriche.

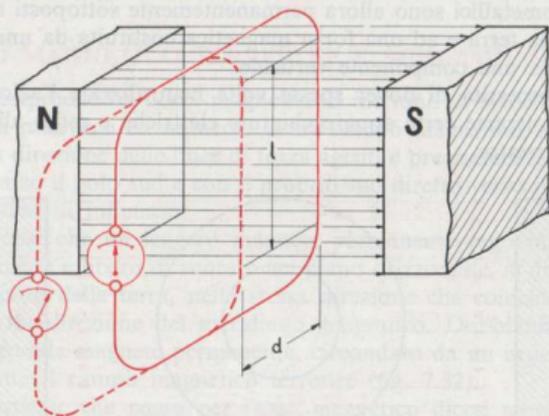


Fig. 7.34 - Induzione elettromagnetica in un conduttore rettilineo che si sposta in un campo magnetico uniforme.

È comunque un fenomeno sempre presente nei circuiti percorsi da corrente variabile.

Consideriamo un conduttore rettilineo chiuso su un galvanometro (strumento elettrico rivelatore di corrente elettrica). Logicamente lo strumento non segna alcun passaggio di corrente.

Se ora spostiamo il conduttore perpendicolarmente alle linee di forza di un campo uniforme, (fig. 7.34) si osserva:

- a) durante il movimento il galvanometro rileva il passaggio di una corrente in un senso o in senso opposto, a seconda del senso di spostamento del conduttore;
- b) più rapido è lo spostamento e maggiore è l'intensità di corrente rilevata dallo strumento;
- c) la corrente nel conduttore è diretta nel senso opposto a quello che occorrerebbe perché il conduttore si muovesse per effetto dell'azione magnetoelettrica nel senso dello spostamento.

Lo stesso fenomeno e gli stessi effetti si verificherebbero se, anziché spostare il conduttore rispetto al flusso, si spostasse in senso opposto il flusso rispetto al conduttore.

Evidentemente perché in un circuito si produca una corrente, è necessario che in esso esista una f.e.m.  $E$ , alla quale si dà il nome di *f.e.m. indotta*.

Al circuito, nel quale si produce la f.e.m. indotta, e al campo in cui si verifica il fenomeno dell'induzione elettromagnetica, si dà il nome rispettivamente di *circuito indotto* e di *campo induttore*.

L'interpretazione fisica dell'induzione elettromagnetica, ossia del formarsi della f.e.m. indotta e della corrente indotta, può essere data mediante la seguente considerazione.

È noto che un conduttore è costituito da atomi neutri, da elettroni liberi e da ioni positivi. Quando il conduttore viene spostato nel campo magnetico, vengono spostate le cariche elettriche negative e positive in esso contenute in condizioni di equilibrio (fig. 7.35).

Possiamo ammettere che ogni carica elettrica viene a generare, nel movimento del conduttore, una corrente elementare. Ma poiché le correnti generate dal moto degli elettroni sono uguali ma di segno opposto alle correnti generate dal moto dei protoni nello stesso senso, la somma delle correnti elementari è nulla.

Però su ciascuna di queste correnti immerse nel campo magnetico, agiscono le forze magnetoelettriche, che tendono a portare le cariche in moto al limite del campo ossia a sospingerle lungo l'asse del conduttore e precisamente in un senso le cariche negative e in senso opposto quelle positive. Senonché queste ultime non possono essere spostate perché si trovano vincolate alla materia, mentre le cariche negative, costituite da elettroni liberi, possono scorrere lungo l'asse del conduttore, addensandosi ad un suo estremo, determinando così una

d.d.p. o meglio una f.e.m. indotta. Se il conduttore è chiuso attraverso un circuito, si produce un movimento continuo di elettroni e cioè una corrente indotta.

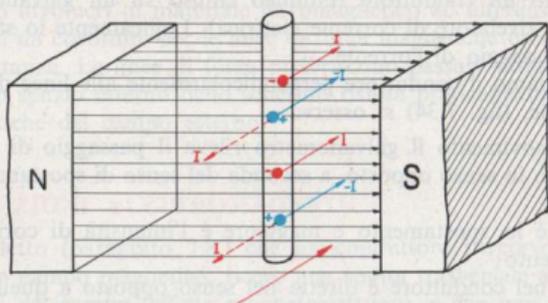


Fig. 7.35 - Interpretazione fisica dell'induzione elettromagnetica.

Il valore della f.e.m.  $E$  che si induce in un conduttore che viene spostato in un flusso magnetico  $\Phi$ , è facilmente individuabile se si pensa che, per il principio della conservazione dell'energia, il lavoro elettrico prodotto nel conduttore chiuso deve essere uguale al lavoro meccanico speso nel movimento del conduttore stesso.

Consideriamo ancora l'esempio della figura 7.34.

L'energia elettrica che si induce nel conduttore chiuso è:

$$W = E \cdot I \cdot t,$$

dove  $E$  è la f.e.m. indotta,  $I$  la corrente indotta e  $t$  il tempo in cui avviene lo spostamento del conduttore.

Il lavoro meccanico speso per muovere il conduttore nel campo magnetico è uguale al prodotto della forza  $F$  che si deve vincere per lo spostamento  $d$  compiuto.

Tale forza (supposto trascurabile il peso del filo) corrisponde alla forza magnetoelettrica agente sullo stesso conduttore, percorso da corrente e immerso nel campo magnetico, e diretta in senso opposto al movimento, come detto al punto c) del paragrafo 7.8.

Se il conduttore è disposto e spostato perpendicolarmente al flusso, tale forza magnetoelettrica è data da:

$$F = B \cdot l \cdot I.$$

Quindi il lavoro meccanico è:

$$L = F \cdot d = B \cdot l \cdot I \cdot d.$$

Pertanto deve essere:

$$E \cdot l \cdot t = B \cdot l \cdot l \cdot d,$$

da cui:

$$E = \frac{B \cdot l \cdot d}{t}.$$

Il rapporto tra lo spostamento  $d$  e il tempo  $t$  è una velocità  $v$ , per cui:

$$E = B \cdot l \cdot v. \quad (7.23)$$

Quindi la f.e.m. indotta in un conduttore che è disposto e che viene spostato perpendicolarmente ad un campo magnetico è data dal prodotto dell'induzione  $B$  o densità del flusso, per la lunghezza  $l$  del tratto di conduttore immerso nel campo e per la velocità  $v$  con cui avviene lo spostamento.

Per un conduttore che viene spostato con un angolo  $\alpha$  rispetto alle linee di forza (fig. 7.36), la velocità reale dello spostamento è data da  $v \cdot \sin \alpha$  per cui:

$$E = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha. \quad (7.24)$$

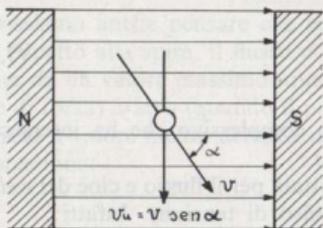


Fig. 7.36 - Spostamento angolare del conduttore.

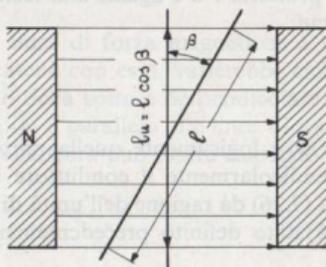


Fig. 7.37 - Inclinazione del conduttore.

Se poi il conduttore fosse inclinato di un angolo  $\beta$  rispetto alla perpendicolare alle linee di forza, (fig. 7.37) la sua lunghezza utile sarebbe  $l \cdot \cos \beta$  per cui:

$$E = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta. \quad (7.25)$$

Da ciò si deduce che se il conduttore venisse spostato parallelamente alle linee di forza del campo induttore ( $\alpha = 0$ ,  $\sin \alpha = 0$ ), oppure fosse disposto parallelamente alle stesse linee di forza ( $\beta = 90^\circ$ ,  $\cos \beta = 0$ ), non si avrebbe alcuna f.e.m. indotta.

Infatti in entrambi i casi il conduttore non intersecherebbe, durante il suo spostamento, alcuna linea di forza magnetica.

Il verso della forza elettromotrice, e quindi della corrente indotta, viene facilmente individuato applicando la regola di Fleming della mano destra, regola che vale, come abbiamo osservato altre volte, per il senso convenzionale della corrente:

*Disponendo pollice, indice e medio della mano destra su tre piani perpendicolari tra loro e indicando con il pollice il senso del campo magnetico e con il medio il moto del conduttore, l'indice indica il senso della corrente indotta.*

Supponiamo ora di tenere fisso il conduttore e di imprimere al campo magnetico uniforme uno spostamento  $d$  (fig. 7.34), in modo che il flusso intersechi o tagli perpendicolarmente il conduttore in un tempo  $t$ .

Il valore della f.e.m. indotta viene dato ancora dalla (7.23), oppure può essere calcolato con un'altra espressione ottenuta sostituendo nella (7.23) al posto dell'induzione  $B$  il suo valore  $\Phi/S$  e al posto della velocità  $v$  il valore  $d/t$ , e cioè:

$$E = B \cdot l \cdot v = \frac{\Phi}{S} \cdot \frac{l \cdot d}{t}.$$

Il prodotto  $l \cdot d$  è uguale alla sezione  $S$  del flusso  $\Phi$  che interseca il conduttore, per cui:

$$E = \frac{\Phi}{t}, \quad (7.26)$$

dove  $\Phi$  è logicamente quella parte del flusso complessivo che ha intersecato perpendicolarmente il conduttore nel tempo  $t$ .

La (7.26) dà ragione dell'unità di misura adottata per il flusso e cioè del *weber*, che è stato definito precedentemente un impulso di tensione. Infatti:

$$\Phi = E \cdot t = \text{volt} \cdot \text{secondo} = \text{weber},$$

da cui è evidente che un flusso  $\Phi$  che interseca un conduttore induce in questo un impulso di tensione  $E \cdot t$ .

Nel caso di una spira rettangolare che ruota in un campo magnetico uniforme (fig. 7.38), nei lati  $AD$  e  $BC$  non si induce alcuna f.e.m., perché essi sono disposti parallelamente alle linee di forza ( $\beta = 90^\circ$ ,  $\cos \beta = 0$ ) mentre nei lati  $AB$  e  $CD$  che sono disposti perpendicolarmente al flusso ( $\beta = 0$ ,  $\cos \beta = 1$ ) si induce in ciascuno la f.e.m.:

$$E = B \cdot l \cdot v \sin \alpha.$$

Avendo però la direzione dello spostamento dei tratti utili di spira senso opposto, le due f.e.m. indotte risultano in serie e perciò ai capi della spira, la

f.e.m. indotta ha valore doppio, e questo è evidente se si considera che la lunghezza complessiva dei tratti utili è  $2 \cdot l$ .

La f.e.m. indotta totale si inverte ad ogni giro della spira e varia ciclicamente da un massimo (quando il piano della spira è parallelo alle linee di forza) a zero (quando il piano della spira è perpendicolare al flusso).

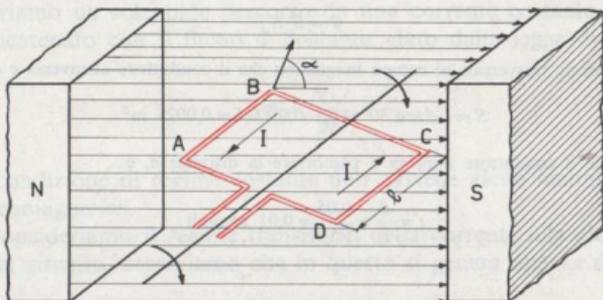


Fig. 7.38 - Spira rotante in un campo magnetico uniforme.

Possiamo anche pensare che se fossero le linee di forza magnetiche a ruotare rispetto alla spira, il flusso  $\Phi$  che si concatena con essa, varierebbe ciclicamente da un valore massimo (quando il piano della spira è perpendicolare alle linee di forza) a zero (quando il piano della spira è parallelo alle linee di forza), e perciò il valore medio della f.e.m. indotta nella spira può essere calcolato con l'espressione:

$$E = \frac{\Delta \Phi_c}{\Delta t}, \quad (7.27)$$

dove  $\Delta \Phi_c$  è la variazione del flusso concatenato con la spira e  $\Delta t$  il tempuscolo durante il quale si compie la variazione di flusso.

È questa la legge generale dell'induzione elettromagnetica, detta legge di Faraday:

*La f.e.m. indotta in un circuito è uguale alla variazione  $\Delta \Phi$  di flusso che si concatena con il circuito stesso nell'unità di tempo.*

#### Esempio numerico

Un conduttore immerso per una lunghezza utile di 10 cm in un campo magnetico costante avente l'induzione  $B$  di  $1 \text{ Wb/m}^2$ , viene spostato di 5 cm con un angolo di  $30^\circ$  rispetto alle linee di forza e con una velocità di 5 m/sec.

Calcolare la f.e.m. indotta nel conduttore. Se poi il conduttore fosse chiuso in un circuito avente la resistenza  $R$  di 0,05 ohm, quale forza risulterebbe applicata al conduttore e in che senso?

### Soluzione

Calcolo della f.e.m.  $E$ :

$$E = B \cdot l \cdot v \cdot \sin 30^\circ = 1 \cdot 0,1 \cdot 5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ volt}.$$

Oppure, il flusso  $\Phi$  che il conduttore interseca è dato da:

$$\Phi = B \cdot S,$$

dove  $S$  è la sezione trasversale al campo magnetico che il conduttore attraversa e cioè:

$$S = l \cdot d \sin 30^\circ = 0,1 \cdot 0,05 \cdot 0,5 = 0,0025 \text{ m}^2.$$

Il tempo che il conduttore impiega a percorrere la distanza  $d$ , è:

$$t = \frac{d}{v} = \frac{0,05}{5} = 0,01 \text{ secondi}.$$

Pertanto:

$$E = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{B \cdot S}{t} = \frac{1 \cdot 0,0025}{0,01} = 0,25 \text{ volt}.$$

La corrente che percorre il conduttore chiuso in un circuito di resistenza di 0,05 ohm, è:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{0,25}{0,05} = 5 \text{ ampere}.$$

La forza che risulta applicata al conduttore è:

$$F = B \cdot l \cdot I = 1 \cdot 0,1 \cdot 5 = 0,5 \text{ vis}.$$

Considerando che il senso della corrente si trova con la regola di Fleming della mano destra e che il senso della forza si trova con la regola della mano sinistra, è evidente che la forza  $F$  che risulta applicata al conduttore, essendo diretta trasversalmente al flusso, ha una componente  $F \sin \alpha$  in senso opposto al moto e una componente  $F \cos \alpha$  in senso normale al moto del conduttore.

Per cui risulta confermato che tutte le volte che si sposta un conduttore chiuso in un campo magnetico, occorre vincere la forza magnetoelettrica che si sviluppa sul conduttore stesso.

## 7.11. IL FENOMENO DI AUTOINDUZIONE

Qualsiasi circuito percorso da corrente è sempre concatenato con il flusso magnetico che esso genera e che si costituisce, varia e si estingue con la corrente.

Pertanto ad ogni variazione di corrente corrisponde sempre una variazione di flusso concatenato con il circuito e perciò in questo si genera una f.e.m. indotta, la quale, proprio per il fatto di essersi costituita nello stesso circuito in cui avviene la variazione di flusso, prende il nome di *f.e.m. di autoinduzione*,

mentre all'effetto di induzione elettromagnetica che il circuito esercita su se stesso, si dà il nome di *fenomeno di autoinduzione*.

Una f.e.m. indotta può essere ottenuta dunque non solo con lo spostamento relativo di un conduttore rispetto al flusso o di un flusso rispetto al conduttore, ma si può ottenere anche e più semplicemente in un circuito facendo variare la corrente elettrica che in esso fluisce.

Consideriamo un solenoide percorso da una corrente costante  $I$  (fig. 7.39). Esso è concatenato con il flusso  $\Phi$  costante, dato dalla legge di Hopkinson:

$$\Phi = \frac{N \cdot I}{\mathcal{R}}$$

In tale condizione di regime costante non avviene alcun fenomeno di induzione elettromagnetica.

Ma se consideriamo il regime transitorio della corrente alla chiusura e alla apertura del circuito, osserviamo che in questo si genera una f.e.m. di autoinduzione.

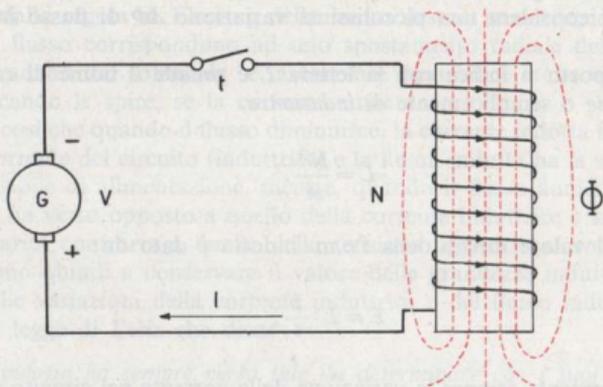


Fig. 7.39 - Il fenomeno dell'autoinduzione.

Infatti la corrente, durante il periodo di chiusura, varia da zero al valore di regime  $I$  e, durante il periodo di apertura, varia dal valore  $I$  a zero. Corrispondentemente il flusso varia da zero al valore  $\Phi$  e dal valore  $\Phi$  a zero.

Nel solenoide si induce allora una f.e.m. indotta  $E$ , che, come detto precedentemente, è data da:

$$E = \frac{\Delta \Phi_c}{\Delta t}$$

La variazione di flusso che si concatena con ciascuna spira è, in tal caso, uguale al flusso  $\Phi$  generato dalla corrente, per cui la variazione di flusso  $\Delta\Phi_c$  che si concatena con il solenoide di  $N$  spire è:

$$\Delta\Phi_c = N \cdot \Phi = N \cdot \frac{NI}{\mathcal{R}}$$

Il valore medio della f.e.m. che si induce nel solenoide nel tempo finito  $t$  di apertura o di chiusura del circuito è dato da:

$$E = \frac{N\Phi}{t} = \frac{N^2 \cdot I}{\mathcal{R} \cdot t}$$

Il rapporto  $N^2/\mathcal{R}$  è una costante del circuito, perché dipende dalla configurazione e dalle dimensioni geometriche del circuito e dalla permeabilità del mezzo attraverso il quale si chiude il flusso, permeabilità che è costante per i materiali non magnetici e che si può ritenere costante anche per i materiali magnetici se si considera una piccolissima variazione  $\Delta\Phi$  di flusso in un tempuscolo  $\Delta t$ .

Tale rapporto si indica con la lettera  $L$  e prende il nome di *coefficiente di autoinduzione* o semplicemente di *induttanza*.

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \quad (7.28)$$

Per cui il valore medio della f.e.m. indotta è dato da:

$$E = L \cdot \frac{I}{t}, \quad (7.29)$$

dove  $I$  rappresenta sempre la variazione della corrente nel circuito nel tempo  $t$ .

Logicamente se la corrente  $I$ , anziché annullarsi, varia solamente da un valore  $I_1$  ad un valore  $I_2$  durante un tempo compreso tra  $t_1$  e  $t_2$ , il valore medio della f.e.m. indotta è dato da:

$$E = L \cdot \frac{I_2 - I_1}{t_2 - t_1}$$

Generalizzando, la f.e.m. indotta in un circuito percorso da una corrente variabile è:

$$E = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}, \quad (7.30)$$

che, esprime la legge generale dell'autoinduzione, detta ancora legge di Faraday.

La f.e.m. indotta in un circuito percorso da una corrente variabile è dunque direttamente proporzionale all'induttanza  $L$  del circuito e alle variazioni  $\Delta I$  della corrente ed è inversamente proporzionale al tempo  $\Delta t$  in cui avvengono tali variazioni.

L'unità di misura dell'induttanza  $L$  è l'henry ( $Hr$ ) che è uguale ad un ohm per un secondo. Infatti dalla (7.30) si ha:

$$L = \frac{E \cdot t}{I} = \frac{V \cdot \text{sec}}{A} = \Omega \cdot \text{sec} = Hr .$$

Dalla (7.30) si può risalire al valore del flusso concatenato.

Infatti, essendo  $E \cdot t = L \cdot I$  ed  $E \cdot t = \Phi_c$ , si ha:

$$\Phi_c = L \cdot I . \quad (7.31)$$

Il verso della f.e.m. indotta o meglio il verso della corrente indotta, può essere determinato dalla regola di Fleming della mano destra, se si considera che le variazioni di flusso corrispondono ad uno spostamento radiale delle linee di forza, che diradano dal solenoide se la corrente diminuisce e che vi si addensano, intersecando le spire, se la corrente aumenta.

Si osserva così che quando il flusso diminuisce, la corrente indotta ha lo stesso verso della corrente del circuito (induttrice) e la f.e.m. indotta ha la stessa polarità della tensione di alimentazione, mentre, quando il flusso aumenta, la corrente indotta ha verso opposto a quello della corrente induttrice e la f.e.m. indotta ha polarità contraria a quella della tensione applicata al solenoide.

Esse tendono quindi a conservare il valore delle grandezze induttrici e cioè ad opporsi alle variazioni della corrente induttrice e del flusso induttore.

Da qui la legge di Lenz che dice:

*La f.e.m. indotta ha sempre verso tale da determinare con i suoi effetti una reazione che contrasta le cause che l'hanno prodotta.*

Per esprimere analiticamente l'opposizione della f.e.m. secondo la legge di Lenz, si pone il segno  $-$  dinnanzi alle formule di Faraday:

$$E = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \quad \text{oppure} \quad E = - L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} ,$$

che esprimono più compiutamente le leggi generali dell'induzione elettromagnetica.

Da quanto esposto, appare chiaro che l'induttanza  $L$  di un circuito percorso da corrente variabile è veramente un impulso di resistenza ( $Hr = \Omega \cdot \text{sec}$ ) che la corrente risente durante le sue variazioni.

### Esercizio numerico

Su un circuito toroidale di legno avente la lunghezza media di 75 cm e la sezione di 10 cm<sup>2</sup>, sono avvolte 5.000 spire della resistenza complessiva di 30 ohm e alimentate alla tensione di 45 volt.

Se si interrompe l'alimentazione nel tempo di 1/200 di secondo, quale sarà la f.e.m. di autoinduzione che si determina nell'avvolgimento?

Se il circuito toroidale fosse di acciaio dolce, quale valore assumerebbe la f.e.m. indotta?

### Soluzione

Calcolo della riluttanza del circuito toroidale di legno:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 S} = \frac{75 \cdot 10^{-2}}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = 597.133.000 \text{ Hr}^{-1}.$$

Calcolo dell'induttanza  $L$ :

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{5.000^2}{597.133.000} = 0,0417 \text{ henry}.$$

Calcolo della corrente  $I$  nell'avvolgimento:

$$I = \frac{V}{R} = \frac{45}{30} = 1,5 \text{ ampere}.$$

Calcolo della f.e.m. di autoinduzione:

$$E = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0,0417 \cdot \frac{1,5}{\frac{1}{200}} = 12,5 \text{ volt}.$$

Per calcolare la f.e.m. di autoinduzione con il nucleo magnetico, occorre anzitutto calcolare la f.m.m.:

$$\mathcal{F} = N \cdot I = 5.000 \cdot 1,5 = 7.500 \text{ amperspire}.$$

Calcolo del campo magnetico  $H$  nel nucleo ferroso:

$$H = \frac{N \cdot I}{l} = \frac{7.500}{75} = 100 \text{ Asp/cm}.$$

Dalla tabella n. 8 si ha, per  $H = 100$  Asp/cm corrispondentemente all'acciaio dolce, un'induzione  $B$  di 1,8 Wb/m<sup>2</sup> e una permeabilità relativa  $\mu_r$  di 144.

Il flusso  $\Phi$  che si stabilisce nel nucleo è:

$$\Phi = B \cdot S = 1,8 \cdot 10 \cdot 10^{-4} = 0,0018 \text{ Wb}.$$

La f.e.m. di autoinduzione risulta allora:

$$E = \frac{\Delta \Phi_c}{\Delta t} = \frac{N \cdot \Phi}{t} = \frac{5.000 \cdot 0,0018}{\frac{1}{200}} = 1.800 \text{ volt}.$$

Allo stesso risultato si perviene usando il metodo della riluttanza.

Per il nucleo di acciaio dolce si ha:

$$\mathcal{R}_f = \frac{l}{\mu_a S} = \frac{75 \cdot 10^{-2}}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 144 \cdot 10^{-4}} = 4.148.200 \text{ Hr}^{-1}.$$

Calcolo dell'induttanza del circuito magnetico:

$$L = \frac{N^2}{\mathcal{R}} = \frac{5.000^2}{4.148.200} = 6 \text{ henry}.$$

Calcolo della f.e.m. di autoinduzione:

$$E = L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} = 6 \cdot \frac{1,5}{\frac{1}{200}} = 1.800 \text{ volt}.$$

## 7.12. RISPOSTA DI UN CIRCUITO RL AD UNA TENSIONE A GRADINO

La f.e.m. indotta in un solenoide, pur ostacolando, per la legge di Lenz, le variazioni delle grandezze induttrici, non riuscirà certo ad annullarle, ma riuscirà solo a ritardarle e quindi a prolungarne il tempo, conferendo ad esse un particolare andamento.

Dal momento che l'induttanza  $L$  di una bobina (solenoid) è sempre accompagnata dalla resistenza  $R$  del conduttore che la costituisce, è interessante analizzare, ai fini dello studio di alcuni tipici circuiti elettronici, il comportamento del circuito  $RL$  di fronte ad una tensione a gradino, ossia ad una tensione costante che viene applicata (o tolta) al circuito in un tempo nullo.

Consideriamo la bobina di fig. 7.40, dove  $R$  e  $L$ , anche se in realtà sono uniformemente distribuite lungo il solenoide, vengono rappresentate separate e concentrate nei rispettivi simboli, per meglio analizzare la risposta del circuito alla tensione costante  $V_g$  nelle fasi di chiusura e di apertura del circuito.

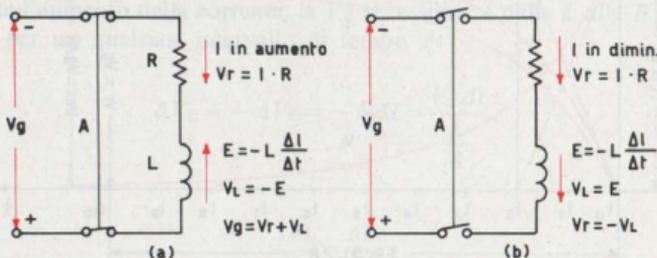


Fig. 7.40 - Per dimostrare il transitorio di chiusura (a) e di apertura (b) di un circuito  $RL$  sottoposto alla tensione costante  $V_g$ .

### 1) Leggi di chiusura del circuito RL

Chiudendo l'interruttore A in un tempo nullo, la tensione  $V_g$  risulta applicata istantaneamente al circuito (tensione a gradino), mentre la corrente  $I$  non può stabilirsi in un tempo nullo, ma, per il fenomeno di autoinduzione, raggiungerà il valore di regime dopo un certo tempo  $T$ , che verrà meglio definito, detto *periodo transitorio di chiusura* del circuito.

La corrente, durante la sua variazione da zero al valore massimo  $I_{mx}$  di regime, provoca nella resistenza  $R$  una caduta di tensione  $V_r = R \cdot I$  e genera nell'induttanza  $L$  una f.e.m. di autoinduzione  $E = -L \Delta I / \Delta t$ .

La tensione  $V_g$  applicata deve perciò equilibrare, in qualsiasi istante del periodo transitorio, sia la caduta di tensione  $V_r = R \cdot I$  che la f.e.m. indotta  $E$  che, per la legge di Lenz, nella fase di chiusura del circuito si comporta da f.c.e.m.  $V_L = -E$ , per cui vale la relazione:

$$V_g = V_r + V_L = R \cdot I + L \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

da cui:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{V_g - R \cdot I}{L}, \quad (7.32)$$

che rappresenta una generica pendenza della corrente  $I$  rispetto all'asse dei tempi.

Servendoci dei grafici di fig. 7.41, analizziamo, istante per istante, l'andamento che l'aumento della corrente  $I$  assume nell'intervallo di tempo corrispondente al periodo transitorio  $T$  e di conseguenza l'andamento che assumono le due tensioni  $V_r$  e  $V_L$ .

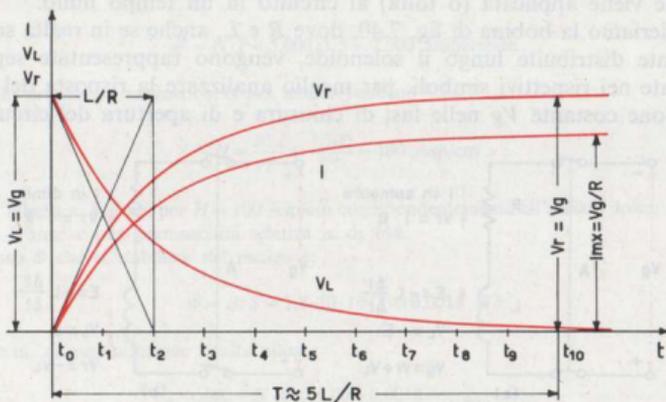


Fig. 7.41 - Andamento della corrente  $I$ , della tensione  $V_r$  e della tensione  $V_L$ , durante il periodo transitorio di chiusura del circuito RL.

Nell'istante  $t_0$  si ha  $I = \text{zero}$ , per cui la (7.32) può scriversi:

$$\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)_{t_0} = \frac{Vg}{L},$$

da cui si deduce che la corrente tende a costituirsi con una ben determinata pendenza e che la tensione  $Vg$  risulta applicata per intero ai capi della sola  $L$ .

Nell'istante  $t_1$ , la corrente ha intensità  $I_1$ , e la pendenza è data da:

$$\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)_{t_1} = \frac{Vg - R \cdot I_1}{L},$$

che, per la presenza della tensione  $R \cdot I_1$ , è indubbiamente minore della precedente. La tensione  $Vg$  è perciò ora distribuita in parte su  $R$  e in parte su  $L$ .

Nell'istante  $t_2$ , si ha  $I_2 > I_1$  e  $R \cdot I_2 > R \cdot I_1$ , per cui la pendenza è ulteriormente diminuita. La  $Vr$  è aumentata e di conseguenza la  $V_L$  è diminuita.

Procedendo in tal senso si dimostra che l'aumento della corrente nel circuito non è lineare, ma è incurvata verso il basso o convessa, che l'aumento della  $Vr$  segue lo stesso andamento della  $I$  e che la  $V_L$  diminuisce con andamento simmetrico a quello della  $Vr$ .

Nell'istante  $T$  corrispondente alla fine del periodo transitorio, si ha  $I = Imx$  e poiché a partire da tale istante la corrente rimane costante, cessa il fenomeno di autoinduzione e il circuito si comporta da puramente ohmico, per cui si ha:

$$Imx = \frac{Vg}{R},$$

il che dimostra che, finito il periodo transitorio di chiusura del circuito, la tensione  $Vg$  si è trasferita per intero sulla  $R$  e che la pendenza della  $I$  è nulla, dovendo essere nella (7.32)  $Vg - R \cdot Imx = \text{zero}$ .

Per meglio definire l'andamento curvilineo della corrente e perciò quello della  $Vr$  e della  $V_L$ , si può introdurre un secondo concetto.

Durante l'aumento della corrente, la  $Vg$  si trasferisce dalla  $L$  alla  $R$ ; ciò vuol dire che, per un qualsiasi intervallo di tempo  $\Delta t$ :

$$\Delta V_L = - \Delta V_r = - R \Delta I = \frac{V_L \Delta t}{L},$$

da cui:

$$\frac{\Delta V_L}{V_L} = \frac{\Delta t}{L/R}, \quad (7.33)$$

il che dimostra che ad intervalli di tempo  $\Delta t$  costanti, la diminuzione percentuale di  $V_L$  è costante, e perciò l'andamento della  $V_L$  è esponenziale. Di conseguenza la tensione  $V_r$  e la corrente  $I$  tendono al valore di regime con andamento pure esponenziale.

L'espressione (7.33) dimostra anche che il periodo transitorio di chiusura del circuito, ossia l'intervallo di tempo durante il quale la  $V_L$  si estingue e la  $I$  raggiunge il suo valore di regime  $Imx$ , dipende dal rapporto  $L/R$  che viene perciò definito *costante di tempo del fenomeno transitorio*, perché omogeneo ad un tempo.

Risolvendo l'equazione differenziale (7.32) si ottiene l'equazione esponenziale:

$$I(t) = \frac{Vg}{R} \left( 1 - e^{-t \frac{R}{L}} \right),$$

oppure:

$$I(t) = Imx \left( 1 - e^{-t \frac{R}{L}} \right), \quad (7.34)$$

mediante la quale si possono definire esattamente i grafici di fig. 7.41, e in modo semplice se i valori della  $I$  vengono calcolati a intervalli di tempo multipli interi della costante di tempo, così da ottenere potenze di  $e$  con esponente intero.

Da quest'ultima equazione si deduce che la  $I$  tende a  $Imx$ , la  $V_r$  tende a  $Vg$  e la  $V_L$  tende a zero, per  $t$  tendente all'infinito, per cui anche il periodo transitorio di chiusura del circuito tende all'infinito. In pratica, invece, tale periodo può ritenersi finito quando la  $I$  e la  $V_r$  differiscono rispettivamente da  $Imx$  e da  $Vg$  per meno dell'1% o quando la  $V_L$  è ridotta a valori trascurabili. Tali condizioni si ottengono quando il periodo transitorio  $T$  si fa corrispondere a circa 5 volte la costante di tempo  $L/R$ .

Dopo tale periodo le variazioni della  $I$  e della  $V_r$  sono così lente che per raggiungere il pieno valore di regime occorrerebbe attendere appunto un tempo infinito.

## 2) Leggi di apertura del circuito RL

Consideriamo ancora il circuito di fig. 7.40-*b*. Se l'interruttore  $A$  viene aperto in un tempo nullo, la tensione  $Vg$  si azzerà istantaneamente. La corrente  $I$  invece, a causa del fenomeno di autoinduzione, non può annullarsi istantaneamente, ma tenderà a zero in un determinato tempo  $T$ , detto *periodo transitorio di apertura* del circuito (fig. 7.42).

Non appena la corrente incomincia a diminuire, mentre nella resistenza  $R$  si ha ancora una caduta di tensione  $V_r = R \cdot I$ , nell'induttanza  $L$  si induce una f.e.m.  $E$  che, per la legge di Lenz, è concorde con il verso della corrente come se fosse generata da un generatore di tensione  $V_L = E$ .

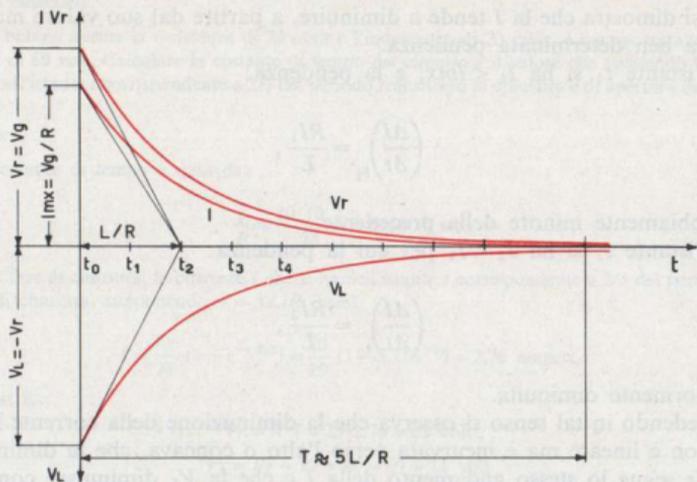


Fig. 7.42 - Andamento della corrente  $I$ , della tensione  $V_r$  e della tensione  $V_L$  durante il periodo transitorio di apertura del circuito  $RL$ .

Pertanto in un qualsiasi istante della fase di apertura del circuito, valgono le relazioni:

$$0 = V_r + V_L \quad \text{ossia} \quad V_r = -V_L,$$

od anche:

$$RI = L \frac{\Delta I}{\Delta t},$$

da cui:

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{RI}{L}. \quad (7.35)$$

Quest'ultima espressione rappresenta una generica pendenza della  $I$  rispetto all'asse dei tempi.

Per analizzare l'andamento che la diminuzione della  $I$ , della  $V_r$  e della  $V_L$  assume nell'intervallo di tempo corrispondente al periodo  $T$ , consideriamo alcuni istanti di tale periodo.

Nell'istante  $t_0$  si ha  $I = Imx$ , e quindi:

$$\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)_{t_0} = \frac{RI_{mx}}{L},$$

da cui si dimostra che la  $I$  tende a diminuire, a partire dal suo valore massimo, con una ben determinata pendenza.

Nell'istante  $t_1$  si ha  $I_1 < Imx$ , e la pendenza:

$$\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)_{t_1} = \frac{RI_1}{L},$$

è indubbiamente minore della precedente.

Nell'istante  $t_2$  si ha  $I_2 < I_1$  per cui la pendenza:

$$\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)_{t_2} = \frac{RI_2}{L},$$

è ulteriormente diminuita.

Procedendo in tal senso si osserva che la diminuzione della corrente nel circuito non è lineare ma è incurvata verso l'alto o concava, che la diminuzione della  $V_r$  segue lo stesso andamento della  $I$  e che la  $V_L$  diminuisce con andamento negativo simmetrico a quello della  $V_r$ .

Nell'istante  $T$ , corrispondente alla fine del periodo, la corrente si azzerava con pendenza nulla, dovendo essere nella (7.35)  $RI = 0$ , per cui anche la  $V_r$  e la  $V_L$  si annullano con lo stesso andamento.

Dall'espressione (7.35) si deduce che il periodo transitorio di apertura del circuito, ossia l'intervallo di tempo in cui la  $I$ , la  $V_r$  e la  $V_L$ , dal loro valore massimo, si estinguono, dipende ancora dalla costante di tempo del fenomeno transitorio, data dal rapporto  $L/R$ .

I grafici di fig. 7.42 relativi al transitorio di apertura del circuito  $RL$ , hanno anch'essi andamento esponenziale come quelli relativi al transitorio di chiusura, perché sono esattamente definiti dall'equazione esponenziale:

$$I(t) = \frac{V_g}{R} e^{-t \frac{R}{L}},$$

oppure:

$$I(t) = Imx \cdot e^{-t \frac{R}{L}}, \quad (7.36)$$

ottenuta risolvendo l'equazione differenziale (7.35).

Da quest'ultima espressione si deduce che le tre grandezze  $I$ ,  $V_r$  e  $V_L$  tendono a zero per  $t$  tendente all'infinito, per cui anche nel caso dell'apertura del circuito come in quello della chiusura, il periodo transitorio  $T$  tende all'infinito. In pratica lo si fa coincidere, per i motivi precedentemente esposti, a circa 5 volte la costante di tempo  $L/R$ .

### Esempio numerico

Una bobina avente la resistenza di 25 ohm e l'induttanza di 20 mHr, è sottoposta alla tensione costante di 80 volt. Calcolare la costante di tempo del circuito e il valore che assumono la  $I$ , la  $V_r$  e la  $V_L$  nell'istante  $t$  corrispondente a 2/5 del periodo transitorio di chiusura e di apertura del circuito.

#### Soluzione

La costante di tempo è data da:

$$\frac{L}{R} = \frac{20 \cdot 10^{-3}}{25} = 8 \cdot 10^{-4} \text{ sec.}$$

Nella fase di chiusura, la corrente  $I$  che si ha nell'istante  $t$  corrispondente a 2/5 del periodo transitorio di chiusura, supponendo  $T = 5 L/R$ , vale:

$$I = \frac{V_g}{R} (1 - e^{-t R/L}) = \frac{80}{25} (1 - 2,718^{-2}) = 2,76 \text{ ampere,}$$

per cui si ha:

$$V_r = R \cdot I = 25 \cdot 2,76 = 69 \text{ volt,}$$

$$V_L = V_g - V_r = 80 - 69 = 11 \text{ volt.}$$

Nella fase di apertura del circuito, la corrente  $I$ , nell'istante  $t$  corrispondente a 2/5 del periodo transitorio, vale:

$$I = \frac{V_g}{R} e^{-t R/L} = \frac{80}{25} 2,718^{-2} = 0,432 \text{ ampere,}$$

per cui si ottiene:

$$V_r = -V_L = R \cdot I = 25 \cdot 0,432 = 10,8 \text{ volt.}$$

## 7.13. L'ENERGIA INTRINSECA DELLA CORRENTE

Il generatore che alimenta un circuito a corrente variabile è dunque impegnato a fornire non solo l'energia elettrica che la corrente trasforma in energia termica nella resistenza  $R$ , ma deve fornire anche l'energia che la corrente trasforma in energia magnetica, che corrisponde logicamente all'energia del campo magnetico generato dalla stessa corrente elettrica.

Ricordando (paragrafo 7.7.) che l'energia del campo magnetico è:

$$W = \frac{1}{2} \Phi N \cdot I,$$

e che:

$$\Phi \cdot N = \Phi_c = L \cdot I,$$

si ha:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2. \quad (7.37)$$

È questa l'energia intrinseca della corrente che si accumula nel campo magnetico quando la corrente si costituisce ed aumenta e che viene successivamente restituita quando la corrente diminuisce e si estingue.

Si osservi l'analogia con l'energia  $W = CV^2/2$  che si accumula nel campo elettrico quando la tensione, per esempio, tra le armature di un condensatore si costituisce ed aumenta durante la carica e che viene poi restituita quando la tensione del condensatore diminuisce e si estingue durante la scarica.

Proprio in virtù dell'energia che si accumula nel campo magnetico (nel campo elettrico per i condensatori) la corrente (la tensione per i condensatori) assume un carattere inerziale.

Infatti, come è stato dimostrato al paragrafo precedente, in un solenoide la corrente non può mai costituirsi od aumentare istantaneamente, ma richiede un certo tempo durante il quale il generatore che la produce è impegnato a fornire, oltre all'energia che viene dissipata in calore, anche l'energia che si accumula nel campo magnetico che si costituisce dentro ed attorno al solenoide.

Parimenti la corrente non può mai diminuire ed interrompersi istantaneamente, in quanto deve restituire, mentre si estingue, tutta l'energia che era accumulata nel campo.

Per questa ragione, quando si interrompe un circuito induttivo percorso da corrente, si forma una scintilla che libera l'energia connessa col campo magnetico.

Proprio per il suo carattere inerziale, le variazioni della corrente avvengono sempre in ritardo sulle cause che le hanno prodotte.

Analogamente un condensatore non può assumere istantaneamente la tensione del generatore a cui è collegato, ma richiede un certo tempo durante il quale il generatore è impegnato a fornire l'energia che si accumula nel campo elettrico che si va costituendo tra le armature.

Allo stesso modo, la tensione di un condensatore che viene scaricato non può mai estinguersi istantaneamente perché deve restituire, sotto forma di energia termica che si sviluppa nel circuito di scarica, tutta l'energia accumulata nel campo elettrico. Per questo le variazioni di tensione tra le armature del condensatore si compiono sempre con un ritardo sulle cause che le hanno prodotte (v. paragrafo 6.6.).

I fenomeni inerziali della corrente nei circuiti induttivi e della tensione nei circuiti capacitivi, verranno messi in evidenza nello studio delle correnti alternate.

## 7.14. IL FENOMENO DI MUTUA INDUZIONE

Supponiamo di avere due circuiti elettrici isolati avvolti sullo stesso nucleo (fig. 7.43). Il solenoide collegato attraverso l'interruttore  $t_1$  al generatore di corrente costante e costituito da  $N_1$  spire, viene detto *circuito primario*. L'altro

di  $N_2$  spire che può essere collegato attraverso l'interruttore  $t_2$  alla resistenza  $R$  di carico, si chiama *circuito secondario*.

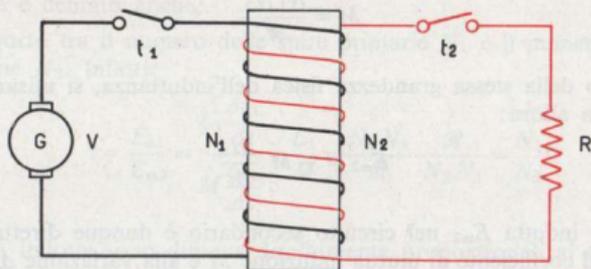


Fig. 7.43 - Il fenomeno di mutua induzione.

Chiudendo l'interruttore  $t_1$ , la corrente nel primario varia da zero al valore  $I_1$  e conseguentemente il flusso che essa genera varia da zero al valore  $\Phi$ . Durante tale variazione, per il fenomeno di autoinduzione, si induce nel primario una f.e.m. indotta  $E_{a1}$ , il cui valore medio è dato da:

$$E_{a1} = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t},$$

dove  $L_1$  è l'induttanza del circuito primario:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}}.$$

Senonché il flusso  $\Phi$  si concatena anche con le  $N_2$  spire del secondario ed induce in esse una f.e.m.  $E_{m2}$ , detta *f.e.m. di mutua induzione*, che viene calcolata con l'espressione generale:

$$E_{m2} = -\frac{\Delta \Phi_c}{\Delta t}.$$

Il flusso concatenato  $\Delta \Phi_c$  è, per l'avvolgimento secondario:

$$\Delta \Phi_c = N_2 \Delta \Phi = N_2 \frac{N_1 \Delta I_1}{\mathcal{R}},$$

per cui:

$$E_{m2} = -\frac{N_1 N_2 \Delta I_1}{\mathcal{R} \Delta t}.$$

Al rapporto  $N_1 N_2 / \mathcal{R}$  che si indica con la lettera  $M$ , si dà il nome di *coefficiente di mutua induzione*.

$$M = \frac{N_1 N_2}{\mathcal{R}},$$

che, essendo della stessa grandezza fisica dell'induttanza, si misura essa pure in  $Hr$ . Si ha allora:

$$E_{m2} = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}. \quad (7.38)$$

La f.e.m. indotta  $E_{m2}$  nel circuito secondario è dunque direttamente proporzionale al coefficiente di mutua induzione  $M$  e alla variazione  $\Delta I_1$  della corrente primaria ed inversamente proporzionale al tempo  $\Delta t$  in cui si compie tale variazione.

Se, durante la variazione del flusso  $\Phi$  o della corrente primaria  $I_1$ , l'avvolgimento secondario è chiuso attraverso la resistenza di carico  $R$ , si ha in esso una corrente indotta  $I_2$ , che naturalmente permane solo durante la variazione del flusso magnetico.

Tale corrente essendo anch'essa variabile, produce un flusso variabile che induce nel secondario una f.e.m.  $E_{a2}$  di autoinduzione:

$$E_{a2} = -L_2 \frac{\Delta I_2}{\Delta t},$$

(dove  $L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}}$  è l'induttanza del secondario), e induce nel primario una f.e.m.  $E_{m1}$  di mutua induzione.

$$E_{m1} = -M \frac{\Delta I_2}{\Delta t}.$$

Ne consegue che quando due circuiti isolati percorsi da correnti variabili, sono accoppiati tra loro in modo che il flusso dell'uno arrivi tutto o in parte a concatenarsi con l'altro, essi non si comportano più come due circuiti elettricamente indipendenti fra loro, ma l'uno risulta invece influenzato dall'altro.

Il fenomeno di mutua induzione consiste dunque in uno scambio di energia tra un circuito e l'altro, però in definitiva, se si considera l'opposizione che una f.e.m. indotta esercita, per la legge di Lenz, sulla f.e.m. induttrice, si riduce in un trasferimento di energia dal circuito induttore al circuito indotto.

Il rapporto tra la f.e.m.  $E_{a1}$  di autoinduzione e la f.e.m.  $E_{m2}$  di mutua induzione è chiamato *rapporto di trasformazione*  $\tau$  (pron. tau).

$$\tau = \frac{E_{a1}}{E_{m2}}. \quad (7.39)$$

Ammettendo che tutto il flusso generato dalla corrente primaria si concateni con i due circuiti (accoppiamento perfetto), si ha che il rapporto di trasformazione è definito anche:

a) dal rapporto tra il numero delle spire primarie  $N_1$  e il numero delle spire secondarie  $N_2$ . Infatti:

$$\tau = \frac{E_{a1}}{E_{m2}} = \frac{L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t}}{M \frac{\Delta I_1}{\Delta t}} = \frac{L_1}{M} = \frac{N_1 N_1}{\mathcal{R}} \cdot \frac{\mathcal{R}}{N_2 N_1} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Le f.e.m. indotte sono dunque direttamente proporzionali al numero delle spire del circuito in cui si inducono.

b) dal rapporto tra l'intensità della corrente secondaria  $I_2$  e l'intensità della corrente primaria  $I_1$ . Infatti, se non si tiene conto delle perdite legate al trasferimento di energia tra un circuito e l'altro, la potenza elettrica primaria  $P_1$  deve essere uguale alla potenza elettrica secondaria  $P_2$ , per cui:

$$P = P_1 = P_2 = E_{a1} I_1 = E_{m2} I_2.$$

Quindi:

$$\tau = \frac{E_{a1}}{E_{m2}} = \frac{P}{I_1} \cdot \frac{I_2}{P} = \frac{I_2}{I_1}.$$

Da cui si deduce che le correnti indotte sono inversamente proporzionali al numero delle spire del circuito in cui si inducono.

c) dalla radice quadrata del rapporto tra la resistenza  $R_1$  dell'avvolgimento primario e la resistenza  $R_2$  dell'avvolgimento secondario. Infatti, ponendo ancora:

$$P = P_1 = P_2 = R_1 \cdot I_1^2 = R_2 \cdot I_2^2,$$

si ha:

$$\tau = \frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{P}{R_2} \cdot \frac{R_1}{P}} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}.$$

Qualora il flusso del circuito induttore non riesca a concatenarsi completamente con il circuito secondario (accoppiamento imperfetto), in questo si induce logicamente una f.e.m. minore di quella ottenuta nell'accoppiamento perfetto.

Chiamando con  $K$  un fattore minore dell'unità, si può scrivere:

$$E_{m2} = -KM \frac{\Delta I_1}{\Delta t}.$$

Ciò significa che la f.e.m. indotta nel circuito secondario è diminuita, non già per le variazioni della corrente primaria  $\Delta I_1$  nel tempo  $\Delta t$ , ma piuttosto perché è diminuito il coefficiente di mutua induzione che da  $M$  è passato al valore inferiore  $M_1 = KM$ .

Ricordando che:

$$M = \frac{N_1 \cdot N_2}{\mathcal{R}} \quad \text{e} \quad L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} \quad \text{e} \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathcal{R}},$$

e sostituendo nell'espressione della  $M$  al posto di  $N_1$  e di  $N_2$  il loro valore in  $L_1$  e in  $L_2$ , si ha:

$$M = \frac{\sqrt{L_1 \mathcal{R}} \sqrt{L_2 \mathcal{R}}}{\mathcal{R}} = \sqrt{L_1 \cdot L_2}, \quad (7.40)$$

che vale se l'accoppiamento tra i due circuiti è perfetto.

Il fattore  $K$ , detto *fattore di accoppiamento*, è definito dal rapporto:

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}}, \quad (7.41)$$

per cui se l'accoppiamento è perfetto il suo valore è uguale a uno, ma se l'accoppiamento è imperfetto il suo valore è inferiore a uno, in quanto  $M_1 = K \cdot M = K \sqrt{L_1 \cdot L_2}$ , da cui:

$$K = \frac{M_1}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} \quad \text{dove} \quad M_1 < M.$$

Il fattore di accoppiamento  $K$  e il coefficiente di mutua induzione  $M$  possono variare quindi rispettivamente dal valore uno a zero e dal valore  $\sqrt{L_1 L_2}$  a zero, passando dall'accoppiamento perfetto all'accoppiamento nullo.

#### Esempio numerico

Su un nucleo chiuso di ferro, lungo 20 cm e della sezione di 20 cm<sup>2</sup>, sono avvolte 120 spire percorse dalla corrente di 10 A.

Sullo stesso avvolgimento sono sovrapposte, opportunamente isolate, 20.000 spire.

Calcolare la f.e.m. di autoinduzione e la f.e.m. di mutua induzione, quando il circuito primario viene aperto nel tempo di 1/100 di sec.

Considerando nulle le perdite, calcolare inoltre l'energia che si sviluppa sotto forma di scintilla tra i contatti dell'interruttore primario. Se ai capi dello stesso interruttore fosse derivato un condensatore della capacità di 1  $\mu F$ , a quale tensione questo si caricherebbe?

#### Soluzione

Calcolo del campo magnetico  $H$  nel nucleo di ferro:

$$H = \frac{N \cdot I}{l} = \frac{120 \cdot 10}{20} = 60 \text{ Aps/cm}.$$

Dalla tabella n. 8 si ha, per  $H = 60$  Asp/cm e per il ferro, una induzione  $B$  di  $1,7 \text{ Wb/m}^2$  e una permeabilità relativa  $\mu_r$  di 226.

Il flusso magnetico  $\Phi$  è:

$$\Phi = B \cdot S = 1,7 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 34 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}.$$

La f.e.m. di autoinduzione  $E_1$  è data da:

$$E_1 = \frac{\Delta\Phi_1}{\Delta t} = \frac{N_1 \cdot \Phi}{t} = 120 \cdot 34 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 40,8 \text{ V}.$$

La f.e.m. di mutua induzione  $E_2$  è data da:

$$E_2 = \frac{\Delta\Phi_2}{\Delta t} = \frac{N_2 \Phi}{t} = 20.000 \cdot 34 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 6.800 \text{ V}.$$

L'energia che si sviluppa sotto forma di scintilla è uguale a quella immagazzinata nel campo magnetico concatenato con l'avvolgimento primario, e cioè:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2.$$

Occorre allora calcolare la riluttanza del circuito magnetico:

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r} = \frac{20 \cdot 10^{-2}}{1,256 \cdot 10^{-6} \cdot 226 \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 364.000 \text{ Hr}^{-1}.$$

L'induttanza  $L$  del circuito primario è data da:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathcal{R}} = \frac{120^2}{364.000} = 0,04 \text{ Hr}.$$

L'energia sviluppata nel momento dell'apertura del circuito primario è quindi:

$$W = \frac{1}{2} L \cdot I^2 = 0,5 \cdot 0,04 \cdot 10^2 = 2 \text{ joule}.$$

Considerando nulle le perdite, il condensatore accumula la stessa energia  $W$  e perciò si carica alla tensione:

$$V = \sqrt{\frac{2W}{C}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 10^{-6}}} = 2.000 \text{ volt}.$$

## 7.15. LE CORRENTI PARASSITE O DI FOUCAULT

Abbiamo finora considerato le forze elettromotrici indotte nei conduttori filiformi. Ma anche in una qualsiasi massa conduttrice (nuclei magnetici, rotor e statori di macchine elettriche, circuiti magnetici in genere, ecc.), mobile in un campo magnetico o soggetta ad una variazione di flusso magnetico, si

inducono delle f.e.m., le cui correnti indotte, non essendo più guidate come nei fili, circolano secondo percorsi chiusi su sè stessi entro piani perpendicolari al flusso induttore, con andamento vorticoso e quindi non ben definito.

Tali correnti, dette *correnti di Foucault*, dal nome del fisico che le ha rilevate, non possono essere sfruttate, salvo che nei freni elettromagnetici, in quanto non producono alcun effetto utile, ma provocano solo il riscaldamento della massa metallica in cui circolano.

Per questo si dicono anche *correnti parassite* e rappresentano in generale una perdita di energia.

Inoltre provocano sui nuclei rotanti in un campo magnetico e sulle masse metalliche che comunque intersecano le linee di forza magnetiche, un *effetto frenante*.

Infatti le correnti parassite, come tutte le correnti indotte, obbediscono alla legge di Lenz e perciò, quando sono provocate dal movimento, hanno sempre direzione tale da opporsi, con il loro effetto magnetoelettrico, al movimento stesso.

Consideriamo un nucleo o una massa metallica cilindrica che ruota in un campo magnetico costante (fig. 7.44).

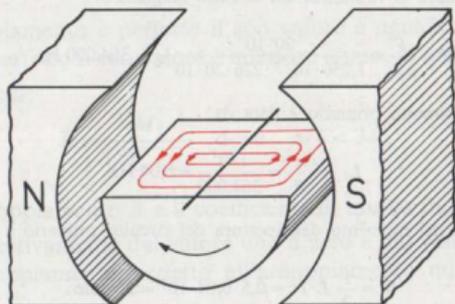


Fig. 7.44 - Le correnti parassite in un nucleo massiccio.

Ogni sezione del nucleo è un insieme di circuiti chiusi, nei quali si producono, durante la rotazione, rapide variazioni di flusso e quindi delle correnti indotte, di intensità piuttosto elevate, data la resistenza minima della massa metallica.

Il senso di circolazione delle correnti parassite può essere determinato anche dalla regola di Fleming della mano destra, se consideriamo come lati attivi solo quelli coincidenti con l'altezza del cilindro e cioè perpendicolari al flusso induttore.

Osserviamo subito che ogni circuito chiuso è paragonabile ad una spira percorsa da corrente immersa in un campo magnetico e perciò soggetta ad una

coppia meccanica che tende ad imprimere alla spira una rotazione nel verso determinato dalla regola di Fleming della mano destra, verso che è proprio contrario al senso di rotazione impresso al nucleo.

Da qui l'effetto frenante delle correnti di Foucault, che rappresenta anche esso, in generale, una perdita di energia.

Per ridurre il più possibile le perdite sia per effetto Joule che per effetto frenante, si cerca di frazionare il più possibile i lati attivi, onde ridurre le f.e.m. indotte e quindi le correnti indotte.

Lo scopo si ottiene lamellando la massa metallica parallelamente al flusso induttore e cioè perpendicolarmente ai lati attivi (fig. 7.45).

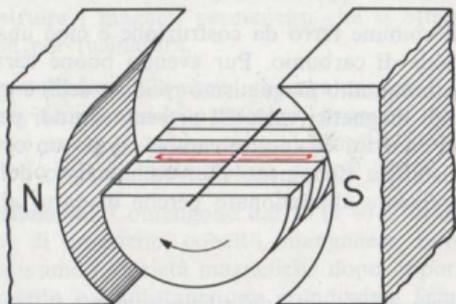


Fig. 7.45 - Le correnti parassite in un nucleo lamellato.

In pratica i nuclei delle macchine elettriche soggetti a variazioni del flusso magnetico, sono costituiti da pacchi di lamiere di piccolo spessore ( $0,3 \div 0,5$  mm). I lamierini sono disposti nel senso del campo induttore e sono isolati tra loro o con sottili fogli di carta o con vernici isolanti o con ossidi isolanti.

Inoltre, dove interessa ridurre maggiormente le correnti indotte, i lamierini sono di ferro al silicio che, pur essendo un po' meno permeabile del ferro dolce, presenta basse perdite per isteresi e soprattutto una elevata resistenza alle correnti parassite.

La potenza perduta per le correnti di Foucault nei lamierini sottoposti ad una magnetizzazione alternativa, è proporzionale, tra altre grandezze, al quadrato della frequenza, per cui, come abbiamo fatto osservare a proposito delle perdite per isteresi, l'uso delle alte frequenze in campo radiotecnico impone di evitare spesse volte l'impiego di nuclei magnetici in determinate apparecchiature, che, per essere soggette a frequenze troppo elevate, comporterebbero delle perdite intollerabili.

Le correnti di Foucault trovano invece pratica applicazione nei freni e negli smorzatori elettromagnetici; un disco, per esempio, che ruota tra le espansioni polari di un'elettrocalamita, viene più o meno frenato o addirittura bloccato a seconda del valore della corrente di eccitazione.

## 7.16. CARATTERISTICHE DI ALCUNI MATERIALI FERROMAGNETICI DI USO COMUNE

I materiali ferromagnetici vengono comunemente classificati in base alle loro perdite per isteresi e per correnti parassite, alla permeabilità, al magnetismo residuo e alla forza coercitiva. Devono possedere inoltre buone caratteristiche meccaniche (tenacità, resistenza alle sollecitazioni) compatibilmente alle caratteristiche magnetiche che si vogliono ottenere.

I materiali ferromagnetici di uso comune nella tecnica elettrica e radio sono i seguenti:

**Ferro dolce.** È il comune ferro da costruzione e cioè una lega di ferro con bassissima percentuale di carbonio. Pur avendo buone caratteristiche magnetiche (buona permeabilità, alto magnetismo residuo, ecc.) e meccaniche, quando è sottoposto a campi magnetici variabili presenta grandi perdite a causa della sua bassa resistività elettrica ed inoltre cambia, dopo un certo periodo di uso, la sua struttura cristallina (fenomeno d'invecchiamento del ferro). Pertanto è oggi quasi completamente abbandonato perché inadatto alle costruzioni elettromeccaniche.

**Lega di ferro silicio.** L'aggiunta del silicio aumenta la resistività elettrica del ferro, riduce il fenomeno di invecchiamento in quanto provoca l'ingrossamento dei cristalli della lega, aumenta però la durezza e quindi la fragilità.

Si usa per la costruzione dei lamierini costituenti i nuclei magnetici delle macchine elettriche.

Le lamiere usate per i motori e per i generatori elettrici hanno uno spessore di 0,5 mm e un tenore di silicio del 2,25-2,75 %; per i piccoli trasformatori a frequenza industriale lo spessore è di 0,35 mm, mentre per i trasformatori radio è di 0,1 mm con una percentuale di silicio del 4 %.

Le lamiere di ferro al silicio vengono fabbricate in fogli che poi sono ricotti in forni elettrici alla temperatura di 800-900 °C allo scopo di diminuire le perdite per isteresi, che nel materiale crudo risultano piuttosto alte. Dai fogli, mediante le operazioni di taglio e perforatura, si ricavano gli elementi di dimensione e di forma volute.

**Acciaio al carbonio.** L'acciaio normale, se sottoposto alla ricottura di normalizzazione alla giusta temperatura, acquista una buona permeabilità magnetica, e la migliora se l'operazione di ricottura viene eseguita in correnti di idrogeno.

L'acciaio fuso è impiegato nella formazione delle carcasse e delle ossature magnetiche delle macchine elettriche.

**Acciai al cromo.** Sono una lega costituita da ferro (97-94 %), da cromo (2-5 %) e da carbonio (1 %). Il cromo conferisce una particolare struttura cristallina all'acciaio migliorandone le proprietà magnetiche, purché la lega subisca un trattamento termico a 850-900 °C, con successivo raffreddamento in acqua o in olio.

Si adoperano per fabbricare magneti permanenti.

**Acciai al cobalto.** Si distinguono in acciai a elevato (30-36 %), a medio (9-11 %) e basso (6-4 %) tenore di cobalto.

Sono molto costosi, ma presentano caratteristiche magnetiche elevate: il loro potere coercitivo aumenta con il crescere della percentuale di cobalto.

Servono per costruire i magneti permanenti che si ottengono direttamente sia per fusione, che per fucinatura.

**Acciai al cobalto molibdeno.** Gli acciai che contengono il 20 % di molibdeno e il 15 % di cobalto, acquistano la particolare proprietà di conservare le loro proprietà magnetiche anche a temperature dell'ordine di 650 °C, quando gli altri acciai le perdono ad una temperatura di soli 250 °C.

**Acciai al nichel-alluminio.** Contengono dal 10 al 40 % di nichel, dal 5 al 20 % di alluminio, tracce di tungsteno, cobalto, manganese, rame.

Presentano elevatissime proprietà magnetiche dopo opportuni trattamenti di tempera e rinvenimento e acquistano una grandissima forza coercitiva. Sono gli acciai migliori per la costruzione di magneti permanenti. Non possono però essere lavorati alle macchine utensili, per cui i magneti permanenti vengono ottenuti direttamente per colata e stampaggio.

**Leghe ad altissima permeabilità magnetica.** Sono leghe di ferro-nichel e sono caratterizzate da una elevatissima permeabilità magnetica, da basse perdite per isteresi e da una alta resistività elettrica.

Vengono preparate fondendo in forni elettrici ad induzione, i metalli componenti scelti al massimo grado di purezza.

I blocchi ottenuti dalla fusione vengono trafilati o laminati e sottoposti poi ad un trattamento termico in appositi forni fuori dal contatto dell'aria, alla temperatura costante di 1.100 °C, per un'ora circa. Lasciati raffreddare negli stessi forni, mantenuti chiusi, vengono nuovamente riscaldati alla temperatura di 600 °C e poi raffreddati in una corrente d'aria.

A seconda della percentuale di nichel e degli altri metalli, le leghe acquistano particolari proprietà.

Le leghe più in uso sono:

- a) il *permalloy*, che contiene il 78,5 % di nichel e il *permalloy C* che contiene anche il 3 % di molibdeno che rende più semplice il trattamento termico;
- b) il *monel-metal* che è costituito dal 67 % di nichel, dal 30 % di rame, dall'1 % di ferro e dal 2 % di manganese, silicio e carbonio. Può essere laminato e

trafilato a caldo ed è facilmente lavorabile a freddo. È caratterizzato da un ciclo di isteresi molto sottile e quindi da minime perdite. Ha però una permeabilità mediocre.

c) *il radio-metal* che contiene il 72 % di nichel, il 20 % di ferro, il 6 % di rame e il 2 % di cromo.

Ha elevata permeabilità ed è caratterizzato, come il monel-metal, da un ciclo di isteresi molto sottile e quindi di piccole perdite.

Queste leghe vengono usate per la costruzione dei trasformatori a bassa frequenza per radiotelefonii, delle ancorine mobili dei rivelatori fonografici, delle espansioni polari dei ricevitori, ecc., ma sempre, comunque, nel campo delle basse frequenze dove esse presentano piccole perdite per isteresi magnetica.

**Ferriti.** Nel campo delle alte frequenze e cioè della radiofrequenza si deve ricorrere a materiali magnetici di altissima resistività elettrica e di elevata permeabilità, allo scopo di ridurre il più possibile le perdite per isteresi e per correnti parassite.

I materiali finora trovati che possiedono queste caratteristiche sono le ferriti e cioè dei composti artificiali ottenuti da una mescolanza di ossidi di ferro, di manganese, di nichel e di zinco in rapporti variabili a seconda del prodotto che si vuol ottenere.

Tali ossidi metallici, dopo essere stati macinati e mescolati, vengono fortemente pressati a caldo con o senza sostanze leganti, nella forma desiderata.

La ferrite è da considerarsi un materiale ceramico di spiccate proprietà magnetiche, ma avente una elevatissima resistività elettrica ( $10^6 \Omega\text{m}$ ).

Le ferriti sono usate nella costruzione dei trasformatori di media frequenza e dei nuclei delle bobine per alta frequenza.

Un particolare tipo di ferrite è il ferroxcube. È costituito da ossidi di ferro macinati in polvere finissima e impastati con ossidi di altri metalli e poi cotti al forno ad alte temperature.

A seconda degli ossidi componenti si ha:

- a) *il ferroxcube di tipo A* a base di ossidi di ferro, manganese e zinco. Può essere impiegato a frequenze dell'ordine di 500 KHz;
- b) *il ferroxcube di tipo B* a base di ossidi di ferro, nichel e zinco. Viene impiegato fino a frequenze dell'ordine di 100 MHz.

Il ferroxcube ha color grigio e aspetto simile alle ceramiche opache. Ha struttura omogenea, è durissimo e fragile.

Non può essere lavorato se non alla mola, per cui deve essere foggato direttamente nelle forme e dimensioni volute.

Per la sua alta resistività elettrica ( $10^4 \Omega\text{m}$  per il tipo A,  $10^7 \Omega\text{m}$  per il tipo B) può ritenersi quasi un isolante, per cui le perdite che provoca per correnti parassite possono ritenersi trascurabili.

Viene impiegato nelle apparecchiature radar e televisive, nei nuclei delle bobine di filtro in alta frequenza, e nella costruzione delle antenne riceventi.

### 7.17. ESERCIZI DA RISOLVERE

1. Un conduttore rettilineo del diametro di 5 mm è percorso dalla corrente di 3,14 A. Calcolare l'intensità del campo magnetico sulla superficie del conduttore e alla distanza di 1 cm dal suo asse.  
(R.  $H_s = 1 \text{ A/cm}$ ;  $H_1 = 0,5 \text{ A/cm}$ ).
2. Un circuito magnetico toroidale di ferro della sezione di  $4 \text{ cm}^2$  e del diametro medio di 10 cm, è dotato di un traferro di 1 mm. Calcolare la f.m.m. necessaria ad ottenere nel circuito un flusso magnetico di  $2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ , con il metodo delle riluttanze e dell'intensità di campo magnetico.  
(R.  $\mathcal{F} = 444 \text{ Asp.}$ ).
3. Un circuito magnetico eterogeneo è costituito da quattro tronchi aventi ciascuno la lunghezza media di 10 cm. Il primo tronco è di ferro e ha la sezione di  $4 \text{ cm}^2$ , il secondo è di ghisa e ha la sezione di  $2 \text{ cm}^2$ , il terzo è costituito di un pacchetto di lamiere al silicio avente la sezione utile di  $2 \text{ cm}^2$  e il quarto è di ferro della sezione di  $4 \text{ cm}^2$  ed è dotato di un traferro di 2 mm. Calcolare la f.m.m. necessaria ad ottenere nel circuito un flusso magnetico di  $2 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ .  
(R.  $\mathcal{F} = 1.968 \text{ Asp.}$ ).
4. Un circuito magnetico parallelo simmetrico è costituito da lamierini al silicio aventi le dimensioni di  $10 \times 7 \text{ cm}$ . La sezione utile del tronco centrale è doppia di quella dei tronchi laterali che misurano  $2 \times 2 \text{ cm}$ . Calcolare il flusso magnetico nei tronchi laterali sapendo che la f.m.m. applicata al tronco centrale è di 880 Asp. e l'energia del campo magnetico prodotto.  
(R.  $\Phi = 6 \cdot 10^{-4} \text{ Wb}$ ;  $W = 528 \cdot 10^{-3} \text{ J}$ ).
5. Due conduttori in aria paralleli tra loro distanziati di 1 cm sono percorsi dalle medesime correnti, ma in senso opposto, dell'intensità di 10 A. Calcolare la forza elettrodinamica per ogni metro di lunghezza.  
(R.  $F = 2 \cdot 10^{-5} \text{ newton}$ ).
6. Un conduttore percorso dalla corrente di 10 A attraversa con un angolo di  $30^\circ$  rispetto alle linee di forza, un campo magnetico costante delle dimensioni di  $10 \times 10 \text{ cm}$  avente l'induzione di  $1 \text{ Wb/m}^2$ . Calcolare la forza magnetoelettrica a cui risulta sottoposto il conduttore.  
(R.  $F = 0,5 \text{ newton}$ ).
7. Un conduttore rettilineo attraversa con un angolo di  $60^\circ$  rispetto alle linee di forza, un campo magnetico delle dimensioni di  $10 \times 10 \text{ cm}$  avente l'induzione di  $2 \text{ Wb/m}^2$ . Sapendo che nel conduttore si induce una f.e.m. di 0,173 V, calcolare la velocità con cui esso viene spostato.  
(R.  $v = 2 \text{ m/sec}$ ).
8. Calcolare l'induttanza di una bobina di 100 spire uniformemente distribuite su un circuito magnetico toroidale di ferro avente la superficie di  $1 \text{ cm}^2$ , la lunghezza media di 15,7 cm e permeabilità relativa di 500.  
(R.  $L = 4 \text{ mHr}$ ).
9. Una bobina avente l'induttanza  $L = 20 \text{ mHr}$  e la resistenza  $R = 20 \text{ ohm}$ , viene sottoposta alla tensione di 100 V in  $1/200$  di sec. Calcolare la f.e.m. di autoinduzione. Supponendo poi che il circuito venga aperto in un tempo nullo, quanto tempo impiega la corrente ad azzerarsi?  
(R.  $E = 20 \text{ V}$ ;  $t = 5 \cdot 10^{-3} \text{ sec}$ ).

10. Costruire il grafico  $I = (f)t$  relativo alla chiusura istantanea di un circuito avente la resistenza di 50 ohm e l'induttanza di 50 mHr sottoposto ad una tensione costante di 100 V, considerando intervalli di tempo uguali alla costante di tempo.
11. Un circuito ferromagnetico ( $\mu_r = 300$ ) avente lunghezza media di 37,68 cm e sezione netta di 2 cm<sup>2</sup>, con traferro di 0,5 mm, porta uniformemente distribuiti due avvolgimenti, l'uno di 140 spire e l'altro di 700 spire. Nell'ipotesi che i flussi dispersi siano nulli, calcolare l'induttanza di ciascun avvolgimento e il coefficiente di mutua induzione. (R.  $L_1 = 2,8$  mHr;  $L_2 = 70$  mHr;  $M = 14$  mHr).
12. Un circuito magnetico, avente la riluttanza di  $5 \cdot 10^5$  Hr<sup>-1</sup>, porta due distinti avvolgimenti. Nel primario, di 200 spire, l'intensità della corrente varia da zero a 5 A in 1/50 di sec. Il secondario ha l'induttanza di 2 Hr. Sapendo che il fattore di accoppiamento è di 0,8, calcolare la f.e.m. indotta nel secondario e il numero di spire secondarie. (R.  $E_2 = 80$  V;  $N_2 = 1.000$  spire).

## Capitolo Ottavo

### La corrente alternata

#### 8.1. GENERALITÀ SULLE GRANDEZZE ALTERNATE

Una corrente si dice *alternata* quando, nel circuito, cambia periodicamente di senso ad intervalli uguali di tempo, variando secondo una successione di valori da zero ad un valore massimo e poi ancora a zero in un senso (valori positivi), e con la stessa successione di valori in senso opposto (valori negativi).

Gli elementi che caratterizzano una corrente alternata sono il *periodo* e la *forma*.

Il *periodo* è l'intervallo di tempo costante che decorre dall'istante in cui la corrente ha un determinato valore all'istante successivo in cui lo riprende dopo essere passata una sola volta per tutti i valori positivi e negativi intermedi (fig. 8.1).

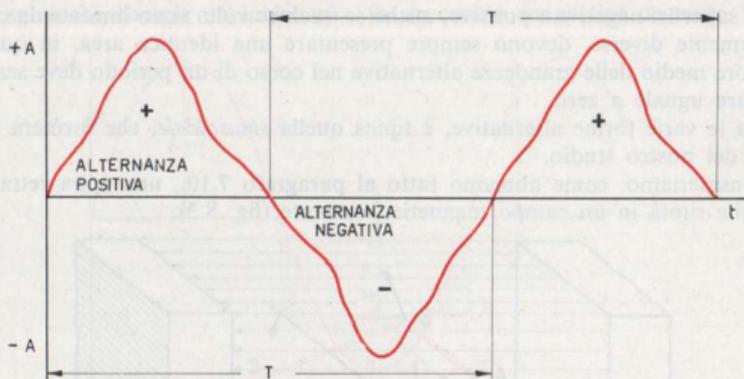


Fig. 8.1 - Grandezza alternativa.

Il periodo, detto anche *ciclo*, si indica con la lettera  $T$  e si misura in *secondi*. Il numero dei periodi che la corrente compie in un secondo si chiama *frequenza*  $f$ :

$$f = \frac{1}{T} .$$

La frequenza si misura pertanto in *periodi al secondo* ( $p/s$ ) o *cicli al secondo* ( $c/s$ ) o *hertz* ( $Hz$ ).

Un semiperiodo si chiama *alternanza*.

La *forma* della corrente alternata è l'andamento della successione dei valori che la corrente assume in un periodo; esprime cioè la legge di variazione della corrente nell'intervallo di un periodo.

Tale legge può essere rappresentata graficamente riportando sulle ordinate di un sistema di assi cartesiani i valori istantanei successivi della corrente e sulle ascisse corrispondentemente i relativi tempi, come rappresentato in figura 8.2.

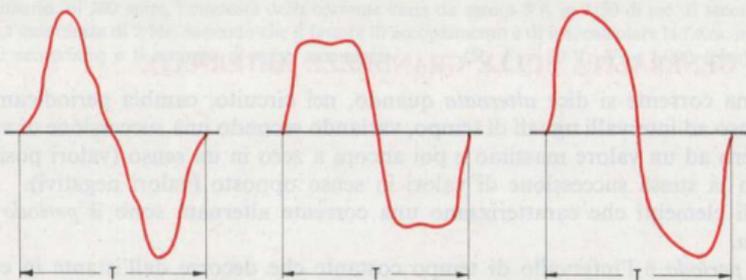


Fig. 8.2 - Esempi di forme alternative.

Le superfici negative e positive, anche se qualche volta sono limitate da curve leggermente diverse, devono sempre presentare una identica area, in quanto il valore medio delle grandezze alternative nel corso di un periodo deve sempre risultare uguale a zero.

Tra le varie forme alternative, è tipica quella *sinusoidale*, che formerà l'oggetto del nostro studio.

Consideriamo, come abbiamo fatto al paragrafo 7.10., una spira rettangolare che ruota in un campo magnetico costante (fig. 8.3).

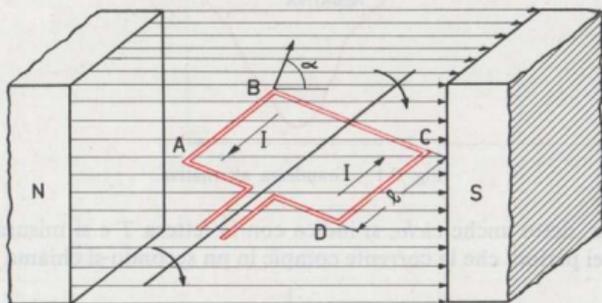


Fig. 8.3 - Spira rotante in un campo magnetico uniforme.

In ogni lato attivo (AB e CD) si genera una f.e.m.  $e$ , che, in ogni istante, ha il valore:

$$e = B.l.v. \text{ sen } \alpha ,$$

e, dato che i due lati attivi intersecano il flusso in senso opposto, con un angolo  $\alpha$  che in ogni istante è uguale per entrambi, le due f.e.m. indotte risultano sempre uguali tra loro e di verso opposto e quindi in serie tra loro, per cui la f.e.m. totale  $et$  che si manifesta agli anelli cui fanno capo gli estremi della spira è:

$$et = 2 B.l.v. \text{ sen } \alpha ,$$

dove  $2 B.l.v.$  corrisponde al valore massimo  $Emx$  della f.e.m. indotta nella spira, per cui:

$$e = Emx \text{ sen } \alpha .$$

Dunque la f.e.m. indotta, e quindi la corrente indotta erogabile su un circuito esterno, varia istante per istante secondo i valori del seno dell'angolo  $\alpha$  formato dalla direzione del movimento dei lati attivi con la direzione delle linee di forza magnetiche.

È noto dalla trigonometria che la rappresentazione grafica delle variazioni del seno corrispondenti ad un intero angolo giro, è una *sinusoide*, che rappresenta quindi anche le variazioni della f.e.m. indotta (fig. 8.4) che si genera in una spira che compie un intero giro in un campo magnetico costante.

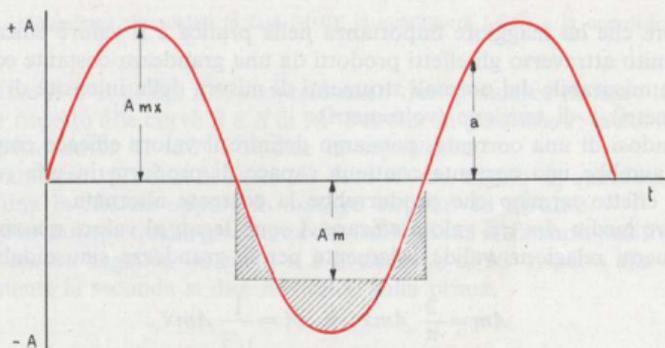


Fig. 8.4 - Grandezza sinusoidale.

Si chiama *pulsazione*  $\omega$  della grandezza alternata, la velocità angolare della spira o meglio il rapporto tra l'angolo giro espresso in radianti  $2\pi$  e il corrispondente periodo  $T$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} .$$

Essendo  $f = \frac{1}{T}$ , la pulsazione è data anche da:

$$\omega = 2\pi f. \quad (8.1)$$

Una grandezza alternata è definita anche dai valori che essa assume durante un periodo  $T$ .

Si chiama:

- a) *valore istantaneo*  $a$ , il valore che la grandezza assume in un dato istante  $t$ ;
- b) *ampiezza*  $Amx$ , il valore massimo della grandezza, corrispondente alla massima altezza della sinusoide;
- c) *valore medio*  $Am$ , la media dei valori istantanei in un semiperiodo o alternanza (in un intero periodo il valore medio è zero);
- d) *valore efficace*  $A$ , il valore costante capace di compiere gli stessi effetti termici ed elettrodinamici della grandezza alternata.

Il valore istantaneo  $a$  è determinato, come detto, da:

$$a = Amx \text{ sen } \alpha.$$

Se però la spira ruota con velocità angolare costante  $\omega$ , l'angolo  $\alpha$  descritto in un tempo  $t$  risulta  $\alpha = \omega t$ , per cui il valore istantaneo della grandezza sinusoidale viene definito dalla funzione:

$$a = Amx \text{ sen } \omega t. \quad (8.2)$$

Il valore che ha maggiore importanza nella pratica è il valore efficace, perché è definito attraverso gli effetti prodotti da una grandezza costante ed è effettivamente misurabile dai normali strumenti di misura della intensità di corrente (amperometri) e di tensione (voltometri).

Trattandosi di una corrente, possiamo definire il valore efficace come il valore che avrebbe una corrente continua capace di produrre in una resistenza lo stesso effetto termico che produrrebbe la corrente alternata.

Il valore medio  $Am$  e il valore efficace  $A$  sono legati al valore massimo  $Amx$  dalle seguenti relazioni, valide solamente per le grandezze sinusoidali:

$$Am = \frac{2}{\pi} Amx \quad \text{e} \quad A = \frac{1}{\sqrt{2}} Amx. \quad (8.3)$$

Il rapporto tra il valore efficace  $A$  e il valore medio  $Am$  viene detto *fattore di forma* della grandezza alternata:

$$\frac{A}{Am} = \frac{1}{\sqrt{2}} Amx \cdot \frac{\pi}{2Amx} = 1,11.$$

Il fattore di forma è dunque 1,11 se le grandezze sono perfettamente sinusoidali, mentre per grandezze alternate aventi altre forme assume valori diversi.

Le grandezze alternate vengono poi definite anche dallo *spostamento angolare* o *fase* di una rispetto ad un'altra.

Infatti due grandezze alternate aventi forma identica ed uguale frequenza, possono passare contemporaneamente per lo zero e per i valori massimi dello stesso segno, oppure no.

Nel primo caso le due grandezze si dicono *in concordanza di fase* o semplicemente *in fase*, nel secondo caso si dicono *spostate di fase* o semplicemente *sfasate*.

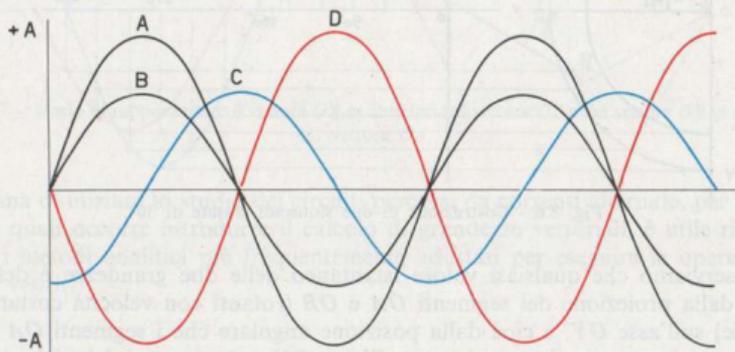


Fig. 8.5 - Grandezze sinusoidali in fase (A-B), in quadratura (A-C) e in opposizione (A-D).

Le curve *A* e *B* di fig. 8.5, rappresentano due grandezze in fase; la curva *C* è sfasata rispetto alle curve *A* e *B* di  $90^\circ$  e si dice in *quadratura*; la curva *D* è sfasata rispetto ad *A* di  $180^\circ$  e si dice in *opposizione*.

Le grandezze spostate di fase, sia pure di un angolo  $\varphi$  qualsiasi, possono essere l'una in *ritardo* oppure in *anticipo* rispetto ad un'altra.

Si dice in *anticipo* quella grandezza che inizia la sua alternanza positiva quando l'altra è ancora negativa (la curva *A* è in anticipo di  $90^\circ$  rispetto alla curva *C*); naturalmente la seconda si dice in *ritardo* sulla prima.

## 8.2. RAPPRESENTAZIONE VETTORIALE DELLE GRANDEZZE SINUSOIDALI

La rappresentazione grafica delle grandezze sinusoidali come quella di fig. 8.5, in pratica è sostituita da un altro metodo grafico che permette la risoluzione dei problemi relativi ai circuiti percorsi da corrente alternata in modo più spedito. Tale è il metodo che fa uso dei *vettori*.

Per comprendere il significato di vettore, tracciamo, basandoci sulla stessa definizione geometrica del seno, due sinusoidi con il metodo del cerchio trigonometrico (fig. 8.6).

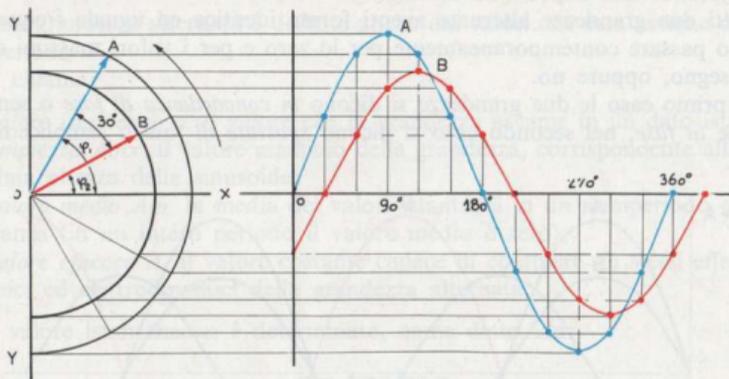


Fig. 8.6 - Costruzione di due sinusoidi sfasate di  $30^\circ$ .

Osserviamo che qualsiasi valore istantaneo delle due grandezze è determinato dalla proiezione dei segmenti  $OA$  e  $OB$  (rotanti con velocità costante ed uguale) sull'asse  $OY$ , e cioè dalla posizione angolare che i segmenti  $OA$  e  $OB$  assumono istante per istante rispetto all'asse  $OX$ , preso come inizio del periodo.

Tali segmenti prendono il nome di *vettori* delle grandezze sinusoidali considerate e ciascuno basta da solo a definire una grandezza alternata.

Infatti le lunghezze o *moduli* dei vettori rappresentano, in una determinata scala, il valore massimo o ampiezza della sinusoida (posizione di  $OA$  e di  $OB$  coincidente con l'asse  $OY$ ); la posizione angolare o *argomento* dei vettori rispetto all'asse  $OX$ , origine del periodo, stabilisce il valore istantaneo delle grandezze e l'angolo formato dai due vettori stabilisce lo spostamento di fase di una grandezza rispetto all'altra.

Per convenzione internazionale, si assume come direzione positiva dei vettori quella contraria al movimento delle lancette dell'orologio, per cui nel caso considerato, il vettore  $OA$  è in anticipo di  $30^\circ$  sul vettore  $OB$ , oppure, il che è lo stesso, il vettore  $OB$  è in ritardo di  $30^\circ$  sul vettore  $OA$ . Infatti, come precedentemente detto, la sinusoida generata dalla rotazione del vettore  $OB$  inizia i suoi valori positivi  $30^\circ$  dopo l'inizio dei valori positivi della sinusoida generata dalla rotazione del vettore  $OA$ .

Pertanto le due sinusoidi, rappresentanti due qualsiasi grandezze alternate, possono essere compiutamente definite dai vettori  $OA$  e  $OB$  di lunghezza proporzionale al valore massimo (o anche efficace) della grandezza corrispondente e dall'angolo  $\varphi$  di sfasamento tra le due grandezze.

Per praticità di calcolo, conviene sempre rappresentare un vettore sull'asse  $OX$  (origine del periodo) e l'altro sfasato dell'angolo  $\varphi$  in anticipo quando sull'asse  $OX$  poniamo il vettore in ritardo, e in ritardo quando poniamo sullo stesso asse  $OX$  il vettore in anticipo (fig. 8.7).

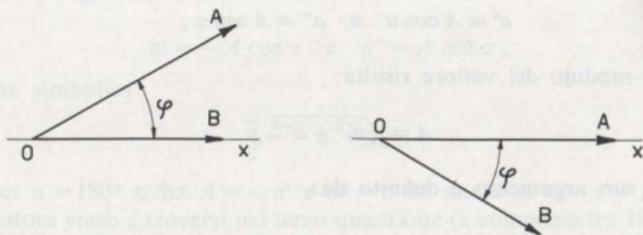


Fig. 8.7 - Modo di rappresentare il vettore  $OA$  in anticipo sul vettore  $OB$  e del vettore  $OB$  in ritardo sul vettore  $OA$ .

Prima di iniziare lo studio dei circuiti percorsi da correnti alternate, per risolvere i quali occorre introdurre il calcolo di grandezze vettoriali, è utile riassumere i metodi analitici più frequentemente adottati per eseguire le operazioni con i vettori.

### 8.3. OPERAZIONI ELEMENTARI CON VETTORI DI GRANDEZZE SINUSOIDALI AVENTI MEDESIMA FREQUENZA

Abbiamo detto or ora che un vettore è caratterizzato:

- dal *modulo*, ossia dalla sua lunghezza che rappresenta, in una determinata scala, il valore della grandezza a cui il vettore si riferisce;
- dall'*argomento*, ossia dall'angolo che il vettore forma con un asse di riferimento che si fa corrispondere, normalmente, al semiasse positivo delle ascisse di un sistema di assi cartesiani; l'argomento definisce perciò la *direzione* e il *verso* del vettore ed è preso secondo il senso di rotazione sinistrorsa a partire, come detto, dal semiasse positivo delle ascisse.

Le operazioni elementari, ossia la somma, la differenza, la moltiplicazione e la divisione, tra vettori possono eseguirsi con il metodo che fa uso delle *regole della trigonometria* e, più speditamente, con il metodo *simbolico*. Entrambi i metodi analitici, verificabili con il metodo *grafico vettoriale*, operano sulle componenti ortogonali di ciascun vettore, consentendo una immediata visualizzazione delle grandezze in gico e risoluzioni analitiche semplici ed esatte.

Vediamo innanzi tutto come vengono definite, in forma trigonometrica e in forma simbolica, le componenti ortogonali di un vettore.

Consideriamo il vettore di modulo  $A$  e di argomento  $\alpha$  posto nel piano di un sistema di assi ortogonali (fig. 8.8-a). Le sue componenti cartesiane sono date da  $a'$  e da  $a''$ .

In forma trigonometrica si ha:

$$a' = A \cos \alpha \quad \text{e} \quad a'' = A \sin \alpha, \quad (8.4)$$

per cui il modulo del vettore risulta:

$$A = \sqrt{a'^2 + a''^2}, \quad (8.5)$$

mentre il suo argomento è definito da:

$$\cos \alpha = \frac{a'}{A} \quad \text{oppure} \quad \sin \alpha = \frac{a''}{A} \quad \text{oppure} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a''}{a'}. \quad (8.6)$$

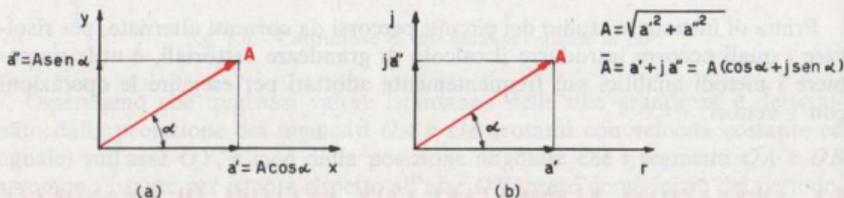


Fig. 8.8 - Le componenti cartesiane del vettore  $\bar{A}$  in forma trigonometrica (a) e in forma simbolica (b).

Per  $\alpha = 0$  si ha  $a'' = 0$  e  $a' = A$  ed infatti il vettore non può che giacere sull'asse delle ascisse; per  $\alpha = 90^\circ$  si ha  $a' = 0$  e  $a'' = A$  e il vettore viene a trovarsi sull'asse delle ordinate.

In forma simbolica, le stesse componenti cartesiane sono definite da  $a'$  e da  $ja''$  (fig. 8.8-b), dove  $a'$  e  $a''$  sono numeri reali e  $j = \sqrt{-1}$ , detta *unità immaginaria*, è l'operatore di rotazione di  $90^\circ$  nel verso degli anticipi: infatti sta ad indicare che  $a''$  è a  $90^\circ$  in anticipo su  $a'$ .

Il vettore viene così rappresentato convenzionalmente mediante l'espressione simbolica, o *numero complesso*, del tipo:

$$\bar{A} = a' + ja'', \quad (8.7)$$

dove  $a'$  è detto *numero reale puro* e  $ja''$  *numero immaginario puro*.

Per  $\alpha = 0$  si ha  $a'' = 0$ : il numero complesso si riduce ad  $a'$  e il vettore viene a trovarsi sull'asse delle ascisse, detto perciò *asse reale o delle grandezze attive*.

Per  $\alpha = 90^\circ$  si ha  $a' = 0$ : il numero complesso si riduce a  $ja''$  e il vettore viene a trovarsi sull'asse delle ordinate, detto perciò *asse immaginario o delle grandezze reattive*.

Se il vettore si trova nel secondo quadrante ( $\alpha$  compreso tra  $90^\circ$  e  $180^\circ$ ), si ha, in forma trigonometrica:

$$a' = -A \cos \alpha \quad \text{e} \quad a'' = A \sin \alpha,$$

e in forma simbolica:

$$\bar{A} = -a' + ja'',$$

mentre per  $\alpha = 180^\circ$  si ha  $A = -a'$  e  $a'' = 0$  od anche  $A = -a' + j0$ .

Se il vettore viene a trovarsi nel terzo quadrante ( $\alpha$  compreso tra  $180^\circ$  e  $270^\circ$ ) si ha, in forma trigonometrica:

$$a' = -A \cos \alpha \quad \text{e} \quad a'' = -A \sin \alpha,$$

e in forma simbolica:

$$\bar{A} = -a' - ja'',$$

mentre per  $\alpha = 270^\circ$  si ha  $A = -a''$  e  $a' = 0$  od anche  $A = 0 - ja''$ .

Quando il vettore si trova nel quarto quadrante ( $\alpha$  compreso tra  $270^\circ$  e  $360^\circ$ ) si ha, in forma trigonometrica:

$$a' = A \cos \alpha \quad \text{e} \quad a'' = -A \sin \alpha,$$

e in forma simbolica:

$$\bar{A} = a' - ja''.$$

Il numero complesso del tipo (8.7) può essere scritto anche nella sua forma trigonometrica:

$$\bar{A} = A \cos \alpha + jA \sin \alpha = A(\cos \alpha + j \sin \alpha). \quad (8.8)$$

Evidentemente il modulo e l'argomento del vettore  $\bar{A}$  sono definiti ancora rispettivamente dalla (8.5) e dalla (8.6).

### 1) Somme e differenze di due vettori

Consideriamo due vettori relativi a due grandezze sinusoidali omogenee di uguale frequenza, aventi per modulo  $A$  e  $B$  e rispettivamente per argomento  $\alpha$  e  $\beta$ , nel piano di un sistema di assi cartesiani (fig. 8.9).

Adottando il metodo grafico vettoriale, la loro somma è ancora una grandezza sinusoidale della stessa frequenza rappresentata in ampiezza e fase dal vettore  $\vec{R}$  determinato dalla diagonale, congiungente il vertice 0 con il vertice opposto, del parallelogramma costruito sui due vettori. Il modulo e l'argomento di  $\vec{R}$  devono essere ovviamente rilevati dal grafico.

In forma trigonometrica, la somma dei due vettori è rappresentata dal vettore  $\vec{R}$  avente per componenti ortogonali la somma aritmetica (o algebrica se uno dei due vettori fosse in altro quadrante) delle corrispondenti componenti dei vettori dati.

Essendo le componenti del vettore  $\vec{A}$ :

$$a' = A \cos \alpha \quad \text{e} \quad a'' = A \sin \alpha,$$

e le componenti corrispondenti del vettore  $\vec{B}$ :

$$b' = B \cos \beta \quad \text{e} \quad b'' = B \sin \beta,$$

il vettore risultante  $\vec{R}$  ha per componenti:

$$a' + b' = A \cos \alpha + B \cos \beta \quad \text{e} \quad a'' + b'' = A \sin \alpha + B \sin \beta,$$

e ha per modulo:

$$R = \sqrt{(a' + b')^2 + (a'' + b'')^2}, \quad (8.9)$$

mentre l'argomento  $\gamma$ , ossia l'angolo che il vettore  $\vec{R}$  forma con il semiasse positivo delle ascisse, è definito da:

$$\cos \gamma = \frac{a' + b'}{R} \quad \text{oppure} \quad \sin \gamma = \frac{a'' + b''}{R} \quad \text{oppure} \quad \operatorname{tg} \gamma = \frac{a'' + b''}{a' + b'}. \quad (8.10)$$

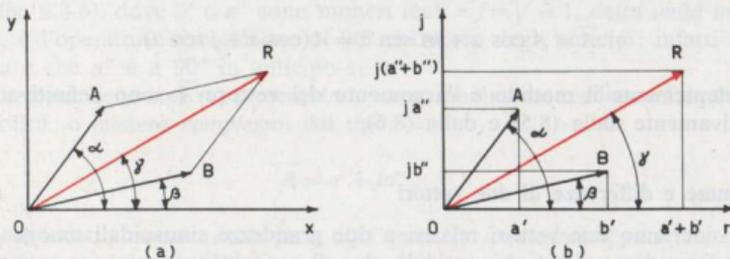


Fig. 8.9 - Somma dei vettori  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  in forma grafica (a), e in forma simbolica (b).

In forma simbolica, la somma dei due vettori  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  equivale alla somma delle rispettive espressioni simboliche complesse, per cui il vettore risultante  $\bar{R}$  è anch'esso definito da un numero complesso la cui parte reale è data dalla somma delle parti reali dei vettori componenti e la parte immaginaria dalla somma delle parti immaginarie.

Le espressioni simboliche dei vettori  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  sono rispettivamente (fig. 8.9-b):

$$\bar{A} = a' + ja'' \quad \text{e} \quad \bar{B} = b' + jb'',$$

per cui il vettore  $\bar{R}$  risultante dalla loro somma è definito da:

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} = a' + ja'' + b' + jb'' = a' + b' + j(a'' + b''), \quad (8.11)$$

il cui modulo e il cui argomento vengono calcolati ancora rispettivamente con la (8.9) e con la (8.10).

L'espressione (8.11) può essere scritta nella sua forma trigonometrica:

$$\bar{R} = \bar{A} + \bar{B} = A \cos \alpha + B \cos \beta + j(A \sin \alpha + B \sin \beta). \quad (8.12)$$

Nella pratica, i due vettori  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  vengono frequentemente definiti con il loro modulo e con il solo angolo  $\varphi$  compreso fra i due, ossia con l'angolo di sfasamento dell'uno rispetto all'altro (fig. 8.10-a), non avendo, in questi casi, alcun significato il loro argomento riferito all'asse reale convenzionale.

Per eseguire allora la somma dei due vettori, si trovano le componenti ortogonali di un vettore riferite alla direzione dell'altro vettore che, perciò, assume il ruolo di asse reale (fig. 8.10-a), come se i due vettori di fig. 8.9 subissero una rotazione verso destra di un angolo  $\beta$ , per cui il vettore  $\bar{B}$  venisse a trovarsi sull'asse reale e il vettore  $\bar{A}$  risultasse sfasato in anticipo su  $\bar{B}$  di un angolo  $\varphi = \alpha - \beta$  che è appunto l'angolo compreso o di sfasamento tra i due vettori dati (fig. 8.10-b).

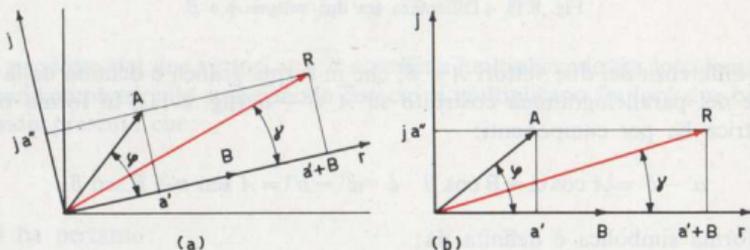


Fig. 8.10 - Somma dei vettori  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$  sfasati tra loro di un angolo  $\varphi$ .

Si ha pertanto in forma trigonometrica:

$$a' = A \cos \varphi \quad a'' = A \sin \varphi \quad b' = B \quad b'' = \text{zero},$$

e in forma simbolica:

$$\bar{A} = a' + ja'' \quad \text{e} \quad \bar{B} = b' + jb'' \quad \text{e} \quad \text{quindi} \quad \bar{R} = (a' + B) + ja'', \quad (8.13)$$

da cui si ricavano il modulo e l'argomento (riferito al vettore  $\bar{B}$ ) del vettore risultante  $\bar{R}$ :

$$R = \sqrt{(a' + B)^2 + a''^2} \quad \text{e} \quad \cos \varphi = \frac{a' + B}{R}.$$

Da quanto esposto si deduce che se i due vettori sono in fase tra loro, il vettore somma ha per modulo la somma aritmetica dei moduli dei vettori dati ed ha la medesima direzione e verso. Se invece sono in opposizione, il vettore somma ha per modulo la somma algebrica dei moduli dei vettori dati, ha la medesima direzione e il verso del vettore di modulo maggiore.

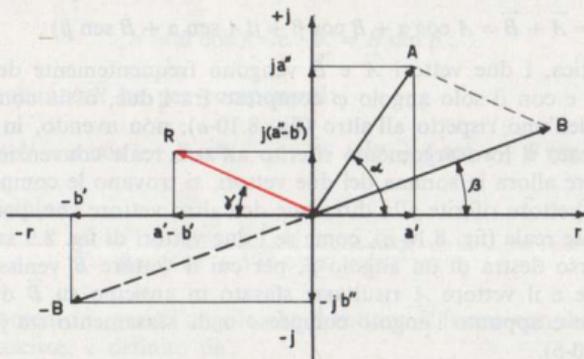


Fig. 8.11 - Differenza tra due vettori  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ .

La differenza dei due vettori  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ , che in forma grafica è definita dalla diagonale del parallelogramma costruito su  $\bar{A}$  e  $-\bar{B}$  (fig. 8.11), in forma trigonometrica ha per componenti:

$$a' - b' = A \cos \alpha - B \cos \beta \quad \text{e} \quad a'' - b'' = A \sin \alpha - B \sin \beta,$$

e in forma simbolica è definita da:

$$\bar{R} = \bar{A} - \bar{B} = a' + ja'' - (b' + jb'') = a' - b' + j(a'' - b''). \quad (8.14)$$

Pertanto il modulo del vettore  $\bar{R}$  risultante dalla differenza di  $\bar{A} - \bar{B}$ , è dato da:

$$R = \sqrt{(a' - b')^2 + (a'' - b'')^2},$$

mentre l'argomento è definito da:

$$\cos \gamma = \frac{a' - b'}{R}.$$

Le considerazioni fatte per la somma di due vettori  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  dei quali è dato l'angolo  $\varphi$  di sfasamento reciproco, valgono anche per la loro differenza.

Concludendo, le componenti ortogonali del vettore somma e del vettore differenza di due vettori sono determinate dalla somma algebrica delle corrispondenti componenti dei vettori dati.

Poiché la somma e la differenza sono possibili solo per grandezze omogenee, i vettori componenti e risultanti vanno rappresentati nella medesima scala e se essi si riferiscono a grandezze sinusoidali, queste devono avere la medesima frequenza.

## 2) Moltiplica e divisione tra due vettori

Consideriamo ancora due vettori di modulo  $A$  e  $B$  aventi rispettivamente l'argomento  $\alpha$  e  $\beta$ . Le coordinate ortogonali di  $A$  sono:

$$a' = A \cos \alpha \quad \text{e} \quad a'' = A \sin \alpha,$$

e quelle di  $B$ :

$$b' = B \cos \beta \quad \text{e} \quad b'' = B \sin \beta.$$

In forma complessa si ha perciò:

$$\overline{A} = a' + ja'' \quad \text{e} \quad \overline{B} = b' + jb''.$$

Il prodotto dei due vettori  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  si ottiene moltiplicando fra loro i rispettivi numeri complessi, allo stesso modo con cui si moltiplicano fra loro due binomi, tenendo presente che:

$$j \cdot j = -1 \quad j \cdot (-j) = 1 \quad -j \cdot (-j) = -1.$$

Si ha pertanto:

$$\overline{A \cdot B} = (a' + ja'')(b' + jb'') = a'b' - a''b'' + j(a'b'' + a''b'), \quad (8.15)$$

e in forma trigonometrica:

$$\overline{A \cdot B} = AB(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + jAB(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta).$$

Ricordando dalla trigonometria che:

$$\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \cos (\alpha + \beta),$$

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \beta + \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \operatorname{sen} (\alpha + \beta),$$

si ha:

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = AB [\cos (\alpha + \beta) + j \operatorname{sen} (\alpha + \beta)]. \quad (8.16)$$

Dunque il prodotto di due vettori  $A$  e  $B$  è un numero complesso che ha per modulo il prodotto dei due moduli  $AB$  e per argomento la somma dei due argomenti  $\alpha + \beta$  (fig. 8.11-a).

Poiché il prodotto e il rapporto possono effettuarsi con grandezze eterogenee, i vettori componenti e il vettore risultante sono rappresentabili in scale diverse.

Il prodotto dei vettori  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  risulta ovviamente semplificato quando uno dei due vettori (per esempio  $\overline{B}$ ) viene a trovarsi sull'asse reale e l'altro sfasato su  $\overline{B}$  di un angolo  $\varphi$ , che è poi l'angolo compreso tra i due vettori.

Si ha perciò, supposto che  $\overline{A}$  sia in anticipo su  $\overline{B}$ :

$$\overline{A} \cdot \overline{B} = (A \cos \varphi + jA \operatorname{sen} \varphi) \cdot B = AB(\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi). \quad (8.17)$$

Dunque il prodotto di due vettori  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  sfasati tra loro di un angolo  $\varphi$ , è un vettore che ha per modulo il prodotto dei due moduli  $AB$  e per argomento l'angolo compreso tra i vettori dati.

Il rapporto tra due vettori di modulo  $\overline{A}$  e  $\overline{B}$  aventi rispettivamente l'argomento  $\alpha$  e  $\beta$ , si calcola facendo il rapporto tra i loro rispettivi numeri complessi:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A}}{\overline{B}} &= \frac{a' + ja''}{b' + jb''} = \frac{(a' + ja'')(b' - jb'')}{(b' + jb'')(b' - jb'')} = \\ &= \frac{a'b' + a''b'' + j(a''b' - a'b'')}{B^2}, \end{aligned}$$

e in forma trigonometrica:

$$\frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{AB(\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + jAB(\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta)}{B^2},$$

da cui:

$$\frac{\overline{A}}{\overline{B}} = \frac{A}{B} [\cos (\alpha - \beta) + j \operatorname{sen} (\alpha - \beta)]. \quad (8.18)$$

Dunque il rapporto tra due vettori è un vettore che ha per modulo il rapporto dei due moduli e per argomento la differenza dei due argomenti, oppure l'angolo compreso tra i due vettori dati.

#### 8.4. SCOMPOSIZIONE DI GRANDEZZE ALTERNATIVE NON SINUSOIDALI

Nelle applicazioni pratiche si incontrano di frequente grandezze periodiche a carattere non sinusoidale, come in particolare sono i segnali radio, le tensioni prodotte dagli alternatori, ecc.

Un importante teorema, detto di *Fourier*, dimostra che in tal caso la grandezza, qualunque sia la forma, può essere rappresentata con una somma indefinita di sinusoidi di ampiezza e fase opportuna, di cui una, detta *fondamentale*, avente la stessa pulsazione  $\omega$  e un'ampiezza circa uguale a quella della grandezza considerata, e le altre, dette *armonici*, aventi ciascuna una pulsazione multipla intera di quella fondamentale ( $2\omega$ ,  $3\omega$ ,  $4\omega$ , ecc.) ad un'ampiezza via via decrescente con l'aumentare della pulsazione.

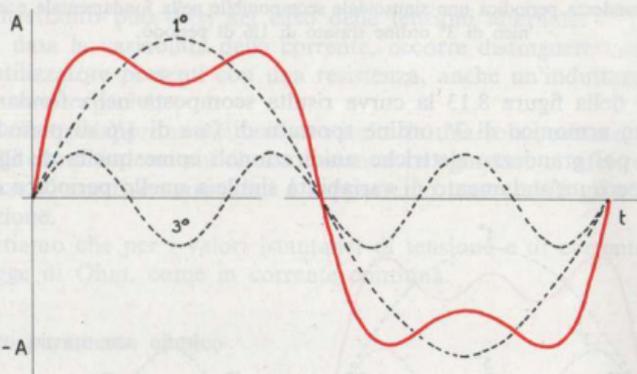


Fig. 8.12 - Grandezza periodica non sinusoidale scomponibile nella sinusoide fondamentale e in un armonico di 3° ordine in fase.

Nel caso di grandezze elettriche alternate, aventi il semiperiodo positivo di forma uguale al semiperiodo negativo, gli armonici di ordine pari sono nulli e pertanto esse sono scomponibili in una sinusoide fondamentale e in un certo numero di armonici di ordine dispari.

In pratica poi gli armonici superiori al quinto ordine sono in generale trascurabili a causa della loro trascurabile ampiezza.

La figura 8.12 rappresenta il caso di una grandezza alternata non sinusoidale. Essa è scomponibile nella sinusoide fondamentale e in un armonico di terzo ordine in fase con l'onda fondamentale.

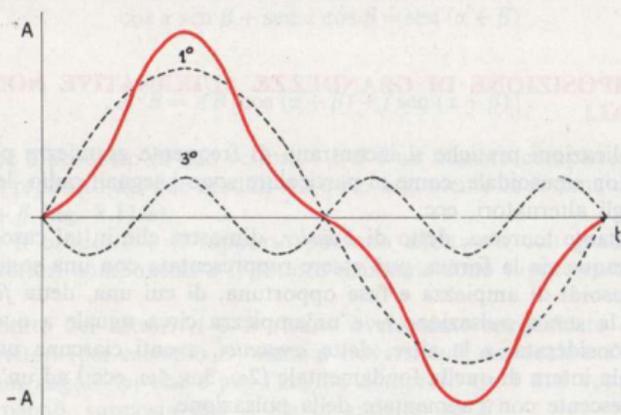


Fig. 8.13 - Grandezza periodica non sinusoidale scomponibile nella fondamentale e in un armonico di 3° ordine sfasato di 1/6 di periodo.

Nel caso della figura 8.13 la curva risulta scomposta nella fondamentale e ancora in un armonico di 3° ordine spostato di fase di 1/6 di periodo.

Esistono poi grandezze elettriche unidirezionali come quella di figura 8.14, che hanno però un'andamento di variabilità simile a quello periodico alternato.

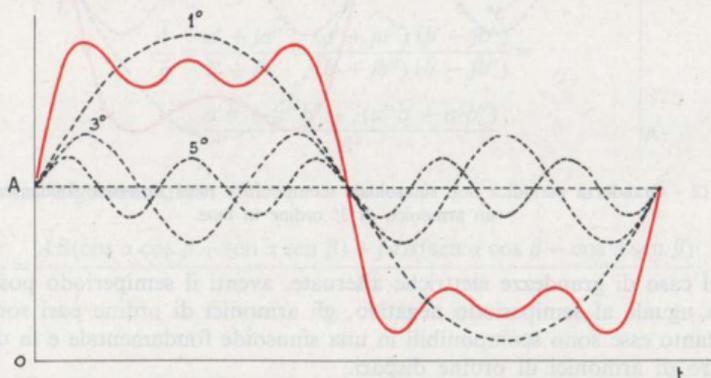


Fig. 8.14 - Grandezza unidirezionale periodica scomponibile nella fondamentale, in un armonico di 3° ordine, in uno di 5° ordine e in una continua.

Tali grandezze, per la legge di Fourier, sono ancora scomponibili in una sinusoide fondamentale, in un certo numero di armonici di frequenza multipla intera della fondamentale e in una componente continua di ampiezza uguale al valore medio della grandezza considerata.

La curva di figura 8.14 è scomponibile in una fondamentale, in un armonico di 3° ordine e in uno di 5° ordine, entrambi in fase, e in una continua di valore  $OA$ .

Da quanto esposto si comprende come una grandezza unidirezionale del tipo di quella ora descritta, possa divenire alternata, se, con opportuni accorgimenti venisse soppressa la componente continua, e viceversa, una grandezza alternata può divenire unidirezionale se ad essa viene sovrapposta una componente continua di valore opportuno.

## 8.5. CALCOLO DEI CIRCUITI A CORRENTE ALTERNATA SINUSOIALE

In un apparecchio utilizzatore, sottoposto ad una tensione costante, l'intensità di corrente dipende unicamente dalla tensione applicata e dalla resistenza dell'apparecchio.

Non altrettanto può dirsi nel caso delle tensioni alternate.

Infatti, data la variabilità della corrente, occorre distinguere i casi in cui il circuito utilizzatore presenti con una resistenza, anche un'induttanza ed eventualmente una capacità.

Consideriamo dapprima i circuiti costituiti da una sola costante,  $R$  o  $L$  o  $C$ , e poi quelli comprendenti più di una costante. In ogni caso ci riferiremo sempre a grandezze alternative sinusoidali e supporremo trascurabili gli effetti di mutua induzione.

Premettiamo che per i valori istantanei di tensione e di corrente vale sempre la legge di Ohm, come in corrente continua.

### a) Circuito puramente ohmico

Un circuito si dice puramente ohmico quando è costituito da sole resistenze  $R$ , e quando in esso sono trascurabili le capacità  $C$  e le induttanze  $L$  (fig. 8.15).

In ogni istante l'intensità della corrente nel circuito è data dalla legge di Ohm:

$$i = \frac{v}{R},$$

od anche:

$$Imx \text{ sen } \omega t = \frac{Vmx \text{ sen } \omega t}{R},$$

da cui:

$$Imx = \frac{Vm_x}{R},$$

dove  $i$  e  $v$  sono valori istantanei qualsiasi, e  $Imx$  e  $Vm_x$  sono i massimi valori istantanei, per cui se la tensione è sinusoidale anche la corrente è sinusoidale, e se la tensione diventa zero o massima, anche la corrente  $I$  è, nello stesso istante, zero o massima.

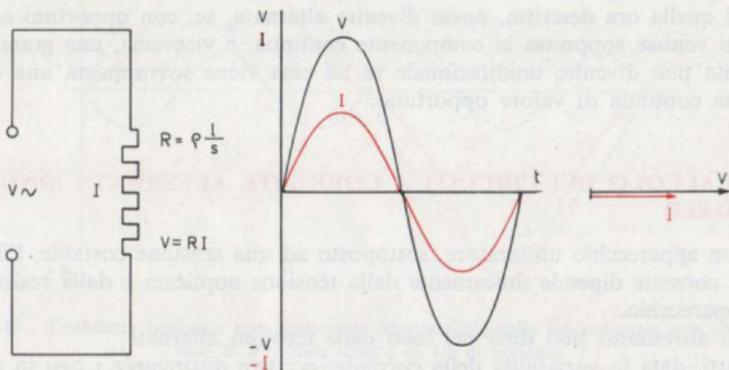


Fig. 8.15 - In un circuito puramente ohmico la corrente  $I$  è in fase con la tensione applicata  $V$ .

Infatti, essendo la resistenza  $R$  un carico passivo che non produce, a causa delle variazioni della tensione, alcuna f.e.m. che contrasti le variazioni stesse, non vi è alcuna ragione per la quale la corrente non possa seguire istante per istante le variazioni della tensione.

In un circuito puramente ohmico la corrente è dunque in fase con la tensione e la legge di Ohm si può applicare anche ai valori efficaci come se la corrente fosse continua, perché il rapporto tra l'ampiezza ( $Imx$  e  $Vm_x$ ) delle grandezze sinusoidali e il valore efficace ( $I$  e  $V$ ) è costante (uguali a  $\sqrt{2}$ ), per cui:

$$V = R \cdot I,$$

dove  $V$  e  $I$  sono i valori efficaci rispettivamente della tensione e della corrente. Il termine  $R \cdot I$  dicesi *caduta di tensione ohmica*.

Le curve sinusoidali della  $V$  e della  $I$  sono perciò in fase e i vettori corrispondenti sovrapposti (fig. 8.15).

### b) Circuito puramente induttivo

Un circuito si dice puramente induttivo quando in esso sono trascurabili i valori delle resistenze  $R$  e delle capacità  $C$ , ed è costituito dalla sola induttanza

$L$  (fig. 8.17). È un circuito ideale in quanto non è mai possibile avere una  $L$  senza che compaia almeno la resistenza  $R$  dei conduttori che costituiscono il solenoide.

Una corrente variabile che circola attraverso un'induttanza produce una f.e.m. di autoinduzione  $E$  che, per la legge di Lenz, si oppone alle variazioni della tensione applicata  $V$ .

$$E = - \frac{\Delta \Phi_c}{\Delta t} = - L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Vediamo innanzi tutto se esiste uno spostamento di fase tra la f.e.m. d'autoinduzione  $E$  e la corrente  $I$  induttrice.

Se la corrente  $I$  è sinusoidale anche il flusso  $\Phi$  che essa genera è sinusoidale e in fase con la corrente stessa (fig. 8.16), purché il solenoide sia privo di nucleo ferromagnetico (in caso contrario, per effetto dell'isteresi magnetica del nucleo, il flusso tende a deformarsi e a ritardare sulla corrente).

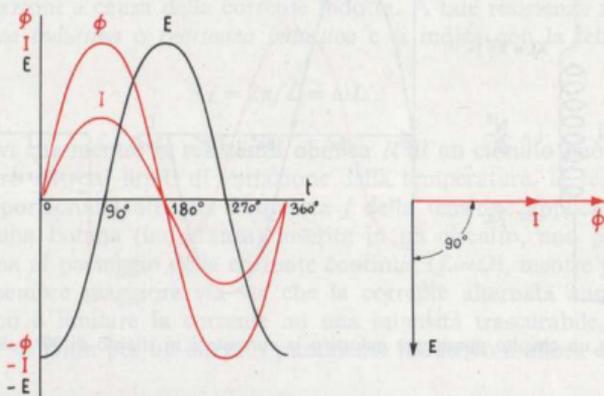


Fig. 8.16 - In un circuito puramente induttivo la f.e.m. indotta è in ritardo di  $90^\circ$  sulla corrente magnetizzante.

Il valore della f.e.m. varia anch'esso istante per istante con andamento sinusoidale, ed è massimo oppure nullo quando rispettivamente è massima o nulla la variazione del flusso concatenato o della corrente induttrice.

Ma la variazione è nulla quando il flusso o la corrente passano per il loro massimo valore (istante in cui i valori crescenti si arrestano per incominciare a diminuire); di conseguenza la f.e.m. indotta è nulla. Quando invece la corrente o il flusso passano per lo zero, la loro variazione è massima, per cui anche la f.e.m. indotta assume il massimo valore.

Ciò dimostra che la f.e.m. è in quadratura con la corrente.

Dalla legge di Lenz possiamo poi riconoscere il segno della f.e.m. indotta. Infatti questa, dovendo avere direzione tale da opporsi alle variazioni della corrente che la produce, ha lo stesso senso della corrente quando questa diminuisce, e senso opposto quando la corrente aumenta (fig. 8.16).

Si deduce allora che la f.e.m. di autoinduzione è sfasata di  $90^\circ$  in ritardo sulla corrente induttrice o magnetizzante.

Poiché il circuito si suppone privo di resistenza, per mantenere la corrente, la tensione applicata  $V$  deve avere valore uguale ed opposto al valore della f.e.m. indotta  $E$ :

$$V = -E,$$

per cui in un circuito puramente induttivo la corrente  $I$  risulta sfasata di  $90^\circ$  in ritardo sulla tensione applicata  $V$  (fig. 8.17).

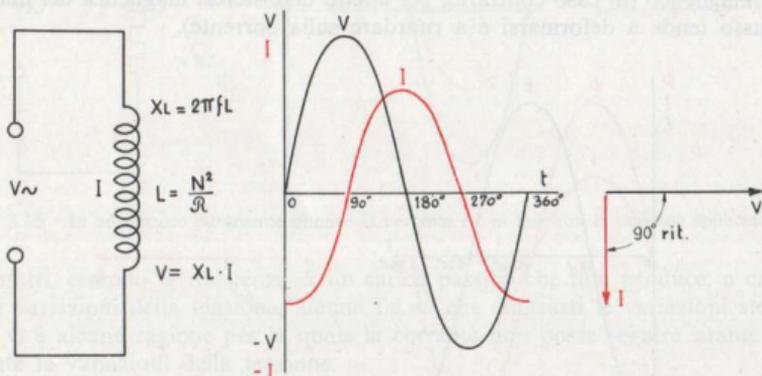


Fig. 8.17 - In un circuito puramente induttivo la corrente è in ritardo di  $90^\circ$  sulla tensione.

Il valore medio della f.e.m. di autoinduzione  $E$  generata dalla variazione di una corrente sinusoidale è facilmente individuabile se si considera che la corrente varia da un valore massimo positivo  $+Imx$  ad un valore massimo negativo  $-Imx$  durante un semiperiodo e cioè in un tempo uguale a  $T/2$ . Si ha allora:

$$Em = -L \frac{Imx - (-Imx)}{\frac{T}{2}} = -\frac{4LImx}{T} = -4fLImx.$$

Il valore massimo  $Emx$  della f.e.m., essendo  $Em = \frac{2}{\pi} Emx$ , è dato da:

$$Emx = -\frac{\pi}{2} Em = -2\pi fLImx.$$

Dividendo ambo i membri per  $\sqrt{2}$ , si ottiene il valore efficace:

$$E = -2\pi fLI.$$

Essendo, come già detto,  $V = -E$ , si ha:

$$V = 2\pi fLI. \quad (8.19)$$

Il termine  $2\pi fL$  che moltiplicato per una corrente, dà una tensione non può essere che una grandezza omogenea ad una resistenza e perciò misurabile in ohm. Infatti:

$$2\pi fL = \text{hertz} \cdot \text{henry} = \frac{1}{\text{sec}} \cdot \Omega \cdot \text{sec} = \text{ohm}.$$

Tale resistenza esprime non già la difficoltà o attrito che la corrente incontra passando nei conduttori, ma l'opposizione che la corrente risente durante le sue variazioni a causa della corrente indotta. A tale resistenza si dà il nome di *resistenza induttiva* o *reattanza induttiva* e si indica con la lettera  $X_L$ :

$$X_L = 2\pi fL = \omega L. \quad (8.20)$$

Si osservi che mentre la resistenza ohmica  $R$  di un circuito può ritenersi costante, entro ristretti limiti di variazione della temperatura, la reattanza varia invece proporzionalmente alla frequenza  $f$  della tensione applicata. Di qui il fatto che una bobina (induttanza) inserita in un circuito, non presenta reattanza alcuna al passaggio della corrente continua ( $f = 0$ ), mentre presenta una reattanza sempre maggiore via via che la corrente alternata aumenta di frequenza, fino a limitare la corrente ad una intensità trascurabile.

La legge di Ohm per un circuito puramente induttivo è allora espressa dalla formula:

$$V = X_L \cdot I, \quad (8.21)$$

dove il termine  $X_L \cdot I$  dicesi *caduta di tensione induttiva*.

Le espressioni analitiche suesposte si possono esprimere in forma simbolica. Se la tensione  $V$  è posta sull'asse reale positivo (fig. 8.17), la corrente, essendo sfasata in ritardo di  $90^\circ$  su  $V$ , è una grandezza immaginaria o reattiva  $-jI$ , per cui:

$$\frac{V}{-jI} = \frac{V \cdot jI}{-jI \cdot jI} = \frac{jVI}{I^2} = \frac{jV}{I} = jX_L, \quad (8.22)$$

e quindi anche la reattanza induttiva è una grandezza immaginaria o reattiva.

Anche ponendo la  $I$  sull'asse reale, per cui la tensione, risultando in anticipo di  $90^\circ$  su  $I$ , è una grandezza immaginaria o reattiva  $jV$ , si ottiene ancora:

$$\frac{jV}{I} = jX_L.$$

Simbolicamente, il legame tra tensione, corrente e reattanza induttiva viene dunque espresso da:

$$\bar{V} = jX_L \bar{I}.$$

### c) Circuito puramente capacitivo

Un circuito si dice puramente capacitivo quando è costituito da sole capacità  $C$  e quando in esso sono trascurabili le resistenze ohmiche  $R$  e le induttanze  $L$  (fig. 8.18).

Ricordiamo dall'elettrostatica che quando un condensatore è sottoposto ad una tensione continua, nei conduttori di collegamento si ha una corrente di conduzione (corrente di carica) e nel dielettrico una egual corrente di spostamento, che si arrestano entrambe in brevissimo tempo per il formarsi tra le armature del condensatore di una f.e.m.  $E$  uguale e contraria alla tensione applicata  $V$ :

$$V = -E.$$

Dopo di che non vi è più alcun passaggio di corrente: il condensatore interrompe il circuito o meglio assume una resistenza di valore infinito, dovuta all'opposizione esercitata dalla  $E$  sulla  $V$ .

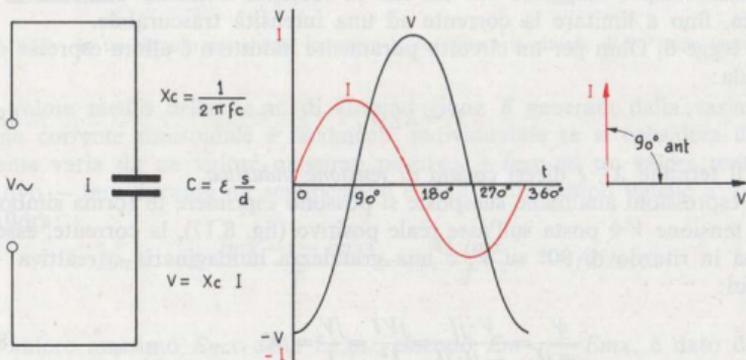


Fig. 8.18 - In un circuito puramente capacitivo la corrente  $I$  è sfasata di  $90^\circ$  in anticipo sulla tensione applicata  $V$ .

Isolato il condensatore e collegate tra loro le armature mediante un conduttore, in questo si ha una corrente di conduzione in senso opposto a prima (corrente di scarica) e nel dielettrico una egual corrente di spostamento, che durano fino a che le armature si portano allo stesso potenziale.

Se ora applichiamo al condensatore una tensione alternata, si ha un succedersi di cariche e di scariche in un senso e in senso opposto, con la stessa frequenza della tensione applicata.

Nel circuito si ha un passaggio di corrente alternata e precisamente di una corrente di conduzione nei conduttori e di una corrente di spostamento nel dielettrico, per cui, data la natura ciclica della corrente, il condensatore non produce più l'interruzione del circuito, perché la sua resistenza, come vedremo fra poco, assume un valore finito.

Osserviamo subito che la corrente  $I$  non può avere concordanza di fase con la tensione  $V$  applicata, né con la f.e.m.  $E$  che si stabilisce tra le armature del condensatore.

Infatti quando la tensione applicata da zero raggiunge il suo massimo valore positivo  $V$  (fig. 8.18), la corrente dal valore massimo positivo  $I$  scende a zero, perché il condensatore caricandosi, assume una f.e.m. che, aumentando in senso negativo da zero allo stesso valore massimo della  $V$ , contrasta la tensione applicata.

Quando poi la tensione dal valore massimo  $V$  scende a zero, il condensatore si scarica e perciò la corrente si inverte e da zero passa al valore massimo negativo  $-I$ , in quanto la f.e.m. del condensatore dal valore massimo negativo  $-E$  scende a zero.

Ripetendo lo stesso ragionamento per il successivo semiperiodo, si conclude che in un circuito puramente capacitivo, la corrente  $I$  è sfasata di  $90^\circ$  in ritardo sulla f.e.m.  $E$  che si manifesta tra le armature del condensatore, ed è sfasata di  $90^\circ$  in anticipo sulla tensione  $V$  applicata al circuito.

Determiniamo ora il valore efficace della corrente di carica e di scarica del condensatore, ossia della corrente nel circuito.

Ricordiamo che la quantità di elettricità  $Q = I \cdot t$  di carica o di scarica di un condensatore di capacità  $C$ , sottoposto alla tensione costante  $V$ , è:

$$Q = C \cdot V.$$

Ma se la tensione è alternata, la quantità di elettricità che passa nel condensatore in un semiperiodo  $T/2$ , varia da un massimo positivo  $Q_{mx} = C \cdot V_{mx}$  ad un valore massimo negativo  $Q_{mx} = -C \cdot V_{mx}$ .

Pertanto il valore medio  $I_m$  della corrente è data dal rapporto:

$$I_m = \frac{C \cdot V_{mx} - (-C \cdot V_{mx})}{\frac{T}{2}} = \frac{4CV_{mx}}{T} = 4fCV_{mx}.$$

Sostituendo al posto di  $Im$  il suo valore massimo  $Imx$ , si ha:

$$Imx = \frac{\pi}{2} \cdot Im = \frac{\pi}{2} 4fCVmx = 2\pi fCVmx.$$

Dividendo ambo i membri per  $\sqrt{2}$  si ottiene il valore efficace:

$$I = 2\pi fCV,$$

da cui:

$$V = \frac{1}{2\pi fC} \cdot I.$$

Il termine  $\frac{1}{2\pi fC}$ , che moltiplicato per una corrente dà una tensione, non può essere che una grandezza omogenea ad una resistenza e perciò misurabile in *ohm*. Infatti:

$$\frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{\text{hertz} \cdot \text{farad}} = \frac{1}{\frac{1}{\text{sec}} \cdot \text{S} \cdot \text{sec}} = \frac{1}{\text{S}} = \Omega.$$

Tale resistenza prende il nome di *resistenza capacitiva* o *reattanza capacitiva* e si indica con la lettera  $X_c$ .

$$X_c = \frac{1}{2\pi fC}. \quad (8.23)$$

Osserviamo che la reattanza capacitiva è inversamente proporzionale alla frequenza, per cui un condensatore inserito in un circuito blocca la corrente continua ( $f=0$ ) e lascia passare sempre meglio le correnti di frequenza via via crescente.

La legge di Ohm per un circuito puramente capacitivo è allora espressa dalla formula:

$$V = X_c \cdot I, \quad (8.24)$$

dove il termine  $X_c \cdot I$  dicesi *caduta di tensione capacitiva*.

In forma simbolica, ponendo sull'asse reale positivo il vettore della tensione  $V$  (fig. 8.18), la corrente, essendo sfasata di  $90^\circ$  in anticipo su  $V$ , è una grandezza immaginaria o reattiva  $jI$ , per cui:

$$\frac{V}{jI} = \frac{V(-jI)}{jI(-jI)} = \frac{-jVI}{I^2} = \frac{-jV}{I} = -jX_c, \quad (8.25)$$

e quindi anche la reattanza capacitiva è una grandezza immaginaria o reattiva.

Anche se si pone la  $I$  sull'asse reale, la tensione, risultando in ritardo di  $90^\circ$  su  $I$ , è una grandezza immaginaria o reattiva  $-jV$ , per cui si ottiene ancora:

$$\frac{-jV}{I} = -jX_C.$$

Simbolicamente, il legame tra tensione, corrente e reattanza capacitiva viene dunque espresso da:

$$\bar{V} = -jX_C \bar{I}.$$

#### d) Circuito ohmico-induttivo

Consideriamo un circuito costituito da una resistenza  $R$  e da una induttanza  $L$  tra loro in serie, sottoposto ad una tensione alternata  $V$  di frequenza  $f$  (fig. 8.19).

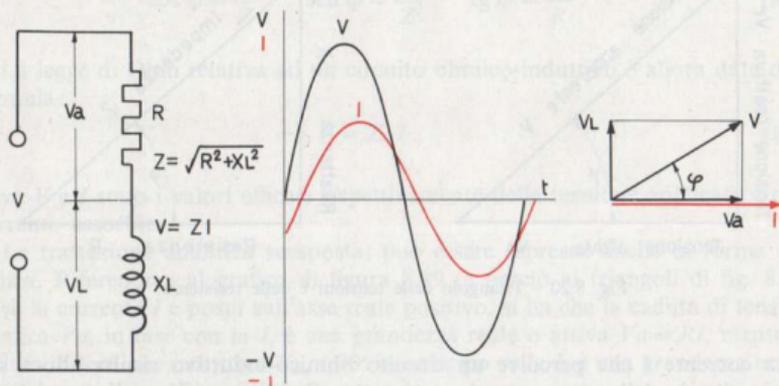


Fig. 8.19 - In un circuito ohmico-induttivo la corrente  $I$  è in ritardo di un angolo  $\varphi$  sulla tensione.

La corrente  $I$  che si stabilisce nel circuito, passando attraverso la resistenza  $R$ , provoca una caduta di tensione  $V_a$ , in fase con la  $I$ , detta *caduta ohmica o attiva*:

$$V_a = R \cdot I,$$

mentre passando attraverso l'induttanza  $L$  o meglio attraverso la reattanza induttiva  $X_L$ , provoca una caduta di tensione  $V_L$ , detta *caduta induttiva o reattiva*:

$$V_L = X_L \cdot I,$$

sfasata di  $90^\circ$  in anticipo sulla  $I$ .

La tensione  $V$  applicata al circuito deve equilibrare le due cadute e perciò deve essere uguale alla somma vettoriale delle cadute stesse, ossia al vettore  $V$  che è appunto il vettore risultante della somma dei vettori  $V_a$  e  $V_L$ .

Dal diagramma di figura 8.19 si ottiene, per il teorema di Pitagora,

$$V = \sqrt{V_a^2 + V_L^2}, \quad (8.26)$$

da cui si deduce che il valore efficace  $V$  della tensione applicata al circuito, detta *tensione apparente*, è rappresentato dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo, detto *triangolo delle tensioni* (fig. 8.20), di cui il cateto adiacente all'angolo  $\varphi$  di sfasamento rappresenta la caduta ohmica o attiva  $V_a$  in fase con la corrente e il cateto opposto all'angolo  $\varphi$  rappresenta la caduta induttiva o reattiva  $V_L$  a  $90^\circ$  in anticipo sulla  $I$ .

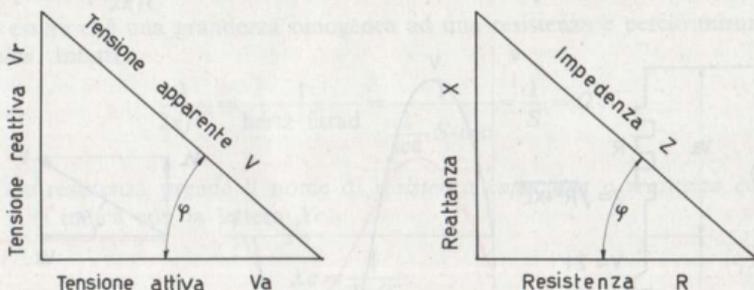


Fig. 8.20 - Triangolo delle tensioni e delle resistenze.

La corrente  $I$  che percorre un circuito ohmico-induttivo risulta allora sfasata in ritardo dello stesso angolo  $\varphi$  rispetto alla tensione  $V$  applicata, definito da:

$$\cos \varphi = \frac{V_a}{V} \quad \text{sen } \varphi = \frac{V_L}{V} \quad \text{tg } \varphi = \frac{V_L}{V_a}. \quad (8.27)$$

Sostituendo nella (8.26) al posto di  $V_a$  e di  $V_L$  i rispettivi valori  $R \cdot I$  e  $X_L \cdot I$ , si ha:

$$V = \sqrt{R^2 \cdot I^2 + X_L^2 \cdot I^2} = \sqrt{I^2 \cdot (R^2 + X_L^2)},$$

da cui:

$$V = I \cdot \sqrt{R^2 + X_L^2} \quad \text{oppure} \quad I = \frac{V}{\sqrt{R^2 + X_L^2}}.$$

Il termine  $\sqrt{R^2 + X_L^2}$  indica il valore della resistenza complessiva che il circuito oppone al passaggio della corrente alternata e prende il nome di *resistenza apparente* o *impedenza*  $Z$  e si misura evidentemente in *ohm*.

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2},$$

da cui si deduce che anche l'impedenza  $Z$  è rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo, detto *triangolo delle resistenze* (fig. 8.20), di cui il cateto adiacente all'angolo  $\varphi$  di sfasamento tra tensione e corrente, rappresenta la resistenza ohmica  $R$  in fase con la  $V_a$  e il cateto opposto all'angolo  $\varphi$  rappresenta la reattanza induttiva  $X_L$ , in fase con la  $V_L$ .

Di conseguenza l'angolo  $\varphi$  di sfasamento tra la corrente  $I$  e la tensione apparente  $V$ , è determinato anche da:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad \text{sen } \varphi = \frac{X_L}{Z} \quad \text{tg } \varphi = \frac{X_L}{R}. \quad (8.28)$$

La legge di Ohm relativa ad un circuito ohmico-induttivo è allora data dalla formula:

$$V = Z \cdot I, \quad (8.29)$$

dove  $V$  e  $I$  sono i valori efficaci rispettivamente della tensione applicata e della corrente assorbita.

La trattazione analitica suesposta, può essere espressa anche in forma simbolica. Riferendoci al grafico di figura 8.19 (e perciò ai triangoli di fig. 8.20), dove la corrente  $I$  è posta sull'asse reale positivo, si ha che la caduta di tensione ohmica  $V_a$ , in fase con la  $I$ , è una grandezza reale o attiva  $V_a = RI$ , mentre la caduta di tensione induttiva  $V_L$ , a  $90^\circ$  in anticipo sulla  $I$ , è una grandezza immaginaria o reattiva  $jV_L = jX_L I$ .

Perciò, la tensione  $V$  applicata al circuito, o tensione apparente, è definita dal numero complesso:

$$\bar{V} = V_a + jV_L = RI + jX_L I = I(R + jX_L), \quad (8.30)$$

dove:

$$R + jX_L = \bar{Z}, \quad (8.31)$$

è invece il numero complesso dell'impedenza  $Z$  del circuito ohmico-induttivo.

Le (8.30) e (8.31) possono essere scritte nella loro forma trigonometrica:

$$\bar{V} = V(\cos \varphi + j \text{sen } \varphi) = IZ(\cos \varphi + j \text{sen } \varphi), \quad (8.32)$$

e

$$\bar{Z} = Z(\cos \varphi + j \sin \varphi), \quad (8.33)$$

da cui vengono dedotte tutte le altre grandezze riferite al vettore della  $\bar{I}$ .

### Esempio numerico

Una bobina (solenoidale) avente la resistenza ohmica di 4 ohm e l'induttanza di  $956 \cdot 10^{-5}$  Hr, è percorsa dalla corrente di 4 A alla frequenza di 50 Hz. Calcolare le cadute di tensione ohmica e induttiva, la tensione apparente applicata alla bobina, l'impedenza e l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente.

### Soluzione

Calcolo della reattanza induttiva:

$$X_L = 2\pi fL = 6,28 \cdot 50 \cdot 956 \cdot 10^{-5} = 3 \text{ ohm}.$$

Calcolo delle cadute di tensione e della tensione apparente:

$$V_a = R \cdot I = 4 \cdot 4 = 16 \text{ volt},$$

$$V_L = X_L \cdot I = 3 \cdot 4 = 12 \text{ volt},$$

$$V = \sqrt{V_a^2 + V_L^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ volt}.$$

Calcolo dell'impedenza:

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{20}{4} = 5 \text{ ohm},$$

oppure

$$Z = \sqrt{R^2 + X_L^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ ohm}.$$

Calcolo dell'angolo di sfasamento tra la  $V$  e la  $I$ :

$$\cos \varphi = \frac{V_a}{V} = \frac{16}{20} = 0,8 \quad \text{oppure} \quad \cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{4}{5} = 0,8.$$

Dalle tavole trigonometriche, per  $\cos \varphi = 0,8$ , si ha  $\varphi = 36^\circ 50'$ .

In forma complessa, l'impedenza  $Z$  è data da:

$$\bar{Z} = R + jX_L = 4 + j3 \quad \text{da cui} \quad Z = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ ohm},$$

e la tensione apparente  $V$  è data da:

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot I = I(R + jX_L) = 4(4 + j3) = 16 + j12,$$

dove il termine reale corrisponde alla caduta ohmica  $V_a$  e il termine immaginario corrisponde alla caduta induttiva  $V_L$ .

L'angolo di sfasamento viene calcolato come sopra.

### e) Circuito ohmico-capacitivo

Consideriamo un circuito costituito da una resistenza  $R$  e da una capacità  $C$  in serie tra loro, sottoposto ad una tensione alternata  $V$  di frequenza  $f$  (fig. 8.21).

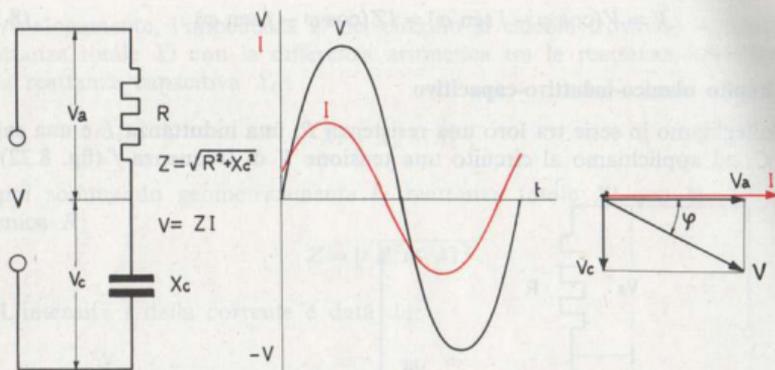


Fig. 8.21 - In un circuito ohmico-capacitivo la corrente è in anticipo di un angolo  $\varphi$  sulla tensione.

Il condensatore di capacità  $C$  provoca una reattanza capacitiva  $Xc = \frac{1}{2\pi fC}$ , per cui la corrente  $I$  che si stabilisce nel circuito provoca due cadute: una nella resistenza ( $Va = R \cdot I$ ) in fase con la  $I$  e l'altra nella reattanza capacitiva ( $Vc = Xc \cdot I$ ) detta caduta capacitiva o reattiva, in ritardo di  $90^\circ$  sulla  $I$  (fig. 8.21).

Le considerazioni e i criteri risolutivi applicati al circuito ohmico-induttivo, valgono anche per il circuito ohmico-capacitivo, con la sola differenza che nel circuito ohmico capacitivo la corrente  $I$  che lo percorre è sfasata in anticipo di un certo angolo  $\varphi$  sulla tensione  $V$  applicata.

In forma simbolica, avendo posto la corrente  $I$  sull'asse reale positivo (fig. 8.21), la caduta di tensione ohmica  $Va$ , in fase con  $I$ , è una grandezza reale o attiva  $Va = RI$ , mentre la caduta di tensione capacitiva  $Vc$ , essendo in ritardo su  $I$  di  $90^\circ$ , è una grandezza immaginaria o reattiva  $-jVc = -jXcI$ .

La tensione apparente  $V$  applicata al circuito è definita perciò dal numero complesso:

$$\bar{V} = Va - jVc = RI - jXcI = I(R - jXc), \quad (8.34)$$

dove:

$$R - jXc = \bar{Z}, \quad (8.35)$$

è il numero complesso che definisce l'impedenza del circuito ohmico-capacitivo.

In forma trigonometrica si ha anche:

$$\bar{Z} = Z(\cos \varphi - j \operatorname{sen} \varphi), \quad (8.36)$$

e

$$\bar{V} = V(\cos \varphi - j \operatorname{sen} \varphi) = IZ(\cos \varphi - j \operatorname{sen} \varphi). \quad (8.37)$$

### f) Circuito ohmico-induttivo-capacitivo

Collegiamo in serie tra loro una resistenza  $R$ , una induttanza  $L$  e una capacità  $C$ , ed applichiamo al circuito una tensione  $V$  di frequenza  $f$  (fig. 8.22).

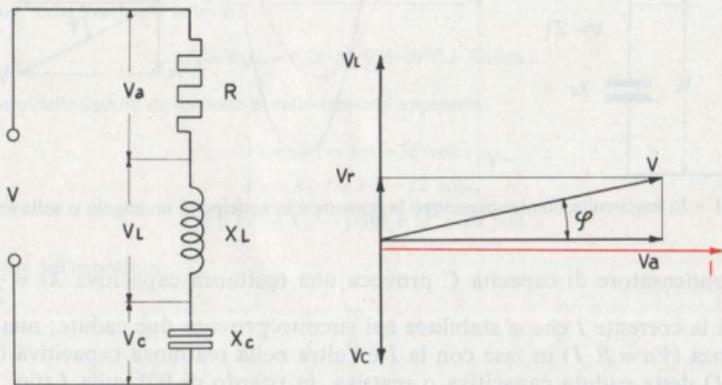


Fig. 8.22 - Circuito ohmico-induttivo-capacitivo e relativo grafico vettoriale.

La corrente  $I$  che si stabilisce nel circuito, passando per la resistenza ohmica  $R$ , provoca, in fase con sè stessa, una caduta ohmica di tensione  $V_a = R \cdot I$ , passando per la reattanza induttiva  $X_L$  provoca una caduta di tensione reattiva induttiva  $V_L = X_L \cdot I$  sfasata di  $90^\circ$  in anticipo e, passando per la reattanza capacitiva  $X_C$ , provoca una caduta reattiva capacitiva  $V_c = X_C \cdot I$  sfasata di  $90^\circ$  in ritardo (fig. 8.22).

La tensione  $V$  applicata al circuito deve equilibrare le tre cadute e perciò deve essere uguale alla somma vettoriale o geometrica delle cadute stesse.

Essendo le due cadute reattive  $V_L$  e  $V_C$  in opposizione, si trova anzitutto la caduta reattiva totale  $V_r$ , facendo la differenza aritmetica tra la caduta di tensione maggiore, nel nostro caso  $V_L$ , e la caduta di tensione minore, nel nostro caso  $V_C$ :

$$V_r = V_L - V_C.$$

Si fa quindi la somma geometrica della caduta reattiva totale  $V_r$  con la caduta ohmica  $V_a$ , applicando il teorema di Pitagora e si trova la tensione  $V$  applicata o apparente.

$$V = \sqrt{V_a^2 + V_r^2}.$$

Analogamente, l'impedenza  $Z$  del circuito si calcola trovando anzitutto la reattanza totale  $X_t$  con la differenza aritmetica tra la reattanza induttiva  $X_L$  e la reattanza capacitiva  $X_C$ :

$$X_t = X_L - X_C,$$

e poi sommando geometricamente la reattanza totale  $X_t$  con la resistenza ohmica  $R$ :

$$Z = \sqrt{R^2 + X_t^2}.$$

L'intensità  $I$  della corrente è data da:

$$I = \frac{V}{Z},$$

e l'angolo di sfasamento  $\varphi$  tra la tensione apparente  $V$  e la corrente  $I$  viene determinato da:

$$\cos \varphi = \frac{V_a}{V} = \frac{R}{Z} \quad \text{sen} \varphi = \frac{V_r}{V} = \frac{X_t}{Z} \quad \text{tg} \varphi = \frac{V_r}{V_a} = \frac{X_t}{R}.$$

Dal diagramma vettoriale si rileva che la capacità e l'induttanza, avendo effetti contrari, possono, con il valore della loro reattanza, non solo influire sul valore dell'impedenza  $Z$  e dell'intensità  $I$  della corrente, ma possono modificare lo spostamento di fase tra la tensione applicata  $V$  e la corrente  $I$ . Si ha cioè che in un circuito ohmico-induttivo-capacitivo la corrente  $I$  è in ritardo sulla tensione quando la reattanza induttiva  $X_L$  prevale sulla reattanza capacitiva  $X_C$ ; è invece in anticipo sulla tensione quando la reattanza  $X_C$  prevale sulla reattanza  $X_L$  ed è in fase quando le reattanze  $X_L$  e  $X_C$  si uguagliano.

Osserviamo infine che la tensione  $V$  applicata, occorrente nel circuito per mantenere una determinata corrente  $I$ , risulta tanto più ridotta quanto minore è l'angolo  $\varphi$  di sfasamento e cioè quanto più si avvicinano i valori delle due reattanze.

Al limite, per  $X_L = X_C$  si ha  $X_t = \text{zero}$  e la tensione  $V$  occorrente per mantenere nel circuito una certa corrente  $I$  coincide con la caduta ohmica di tensione ( $V = V_a$ ) e risulta perciò in fase con la corrente, mentre l'impedenza  $Z$  si riduce al valore della semplice resistenza ohmica  $R$ .

In forma simbolica, la tensione apparente  $V$  assume l'espressione complessa:

$$\bar{V} = Va + j(V_L - V_C) = Va \pm jVr = I(R \pm jXt),$$

dove:

$$R \pm jXt = R + j(X_L - X_C) = \bar{Z},$$

è l'espressione complessa dell'impedenza  $Z$  del circuito ohmico-induttivo-capacitivo.

In forma trigonometrica si ha:

$$\bar{Z} = Z(\cos \varphi \pm j \sin \varphi),$$

e

$$\bar{V} = V(\cos \varphi \pm j \sin \varphi) = ZI(\cos \varphi \pm j \sin \varphi).$$

### Esempio numerico

Un circuito è costituito da una resistenza  $R$  di 8 ohm, da una induttanza di  $2.868 \cdot 10^{-5}$  Hr e da una capacità di  $1.061 \mu\text{F}$ .

Sapendo che la caduta ohmica di tensione  $Va$  è di 40 volt e che la frequenza è di 50 Hz, calcolare la corrente  $I$ , la tensione applicata  $V$ , l'impedenza  $Z$  e l'angolo di sfasamento, sia con il metodo geometrico che con il metodo simbolico.

### Soluzione

#### 1) Metodo geometrico

Calcolo delle reattanze  $X_L$ ,  $X_C$  e  $Xt$ :

$$X_L = 2\pi fL = 6,28 \cdot 50 \cdot 2.868 \cdot 10^{-5} = 9 \text{ ohm},$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \frac{1}{6,28 \cdot 50 \cdot 1.061 \cdot 10^{-6}} = 3 \text{ ohm},$$

$$Xt = X_L - X_C = 9 - 3 = 6 \text{ ohm}.$$

Calcolo della corrente assorbita  $I$ :

$$I = \frac{Va}{R} = \frac{40}{8} = 5 \text{ ampere}.$$

Calcolo dell'impedenza  $Z$  del circuito:

$$Z = \sqrt{R^2 + Xt^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ ohm}.$$

Calcolo della tensione applicata  $Vt$ :

$$Vt = I \cdot Z = 5 \cdot 10 = 50 \text{ volt}.$$

Calcolo del  $\cos \varphi$ :

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{8}{10} = 0,8,$$

in ritardo, perché  $X_L$  è prevalentemente induttiva, oppure:

$$\cos \varphi = \frac{V_a}{V} = \frac{40}{50} = 0,8.$$

Dalle tabelle trigonometriche si ha, per  $\cos \varphi = 0,8$ , un angolo di  $37^\circ$  circa.

## 2) Metodo simbolico

Calcolati i valori delle reattanze  $X_L$  e  $X_C$  e l'intensità della corrente  $I$ , se questa viene posta sull'asse reale positivo, la tensione apparente  $V$  è data da:

$$\overline{V} = I[R + j(X_L - X_C)] = 5[8 + j(9 - 3)] = 40 + j30,$$

da cui si deduce subito che la tensione applicata al circuito è in anticipo sulla corrente e che perciò il circuito è prevalentemente induttivo.

Il modulo della  $V$  risulta quindi:

$$V = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \text{ volt},$$

mentre il suo argomento  $\varphi$ , e perciò l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente, è definito da:

$$\cos \varphi = \frac{V_a}{V} = \frac{40}{50} = 0,8.$$

L'impedenza del circuito è data da:

$$\overline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 8 + j(9 - 3) = 8 + j6,$$

da cui si deduce ancora che il circuito è ohmico-induttivo e che perciò la corrente  $I$  è in ritardo sulla tensione applicata  $V$ .

Il modulo dell'impedenza vale:

$$Z = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ ohm},$$

e il suo argomento, che poi è lo stesso di quello della tensione  $V$ , è definito da:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

## 8.6. LE POTENZE DELLA CORRENTE ALTERNATA

In corrente continua, la potenza elettrica  $P$  è stata analiticamente definita con il prodotto della tensione  $V$  per l'intensità  $I$  della corrente:

$$P = V \cdot I.$$

In un circuito a corrente alternata, data la continua variabilità della corrente e della tensione, la potenza varia da istante a istante e ad ogni istante è uguale al prodotto del valore istantaneo  $v$  della tensione per il corrispondente valore istantaneo  $i$  dell'intensità di corrente:

$$p = v \cdot i.$$

Pertanto la potenza della corrente alternata viene definita dalla media dei valori istantanei che la potenza assume durante un periodo, e corrisponde al lavoro compiuto dalla corrente elettrica nell'unità di tempo.

Per determinare il valore medio della potenza occorre però considerare anche la fase tra corrente e tensione.

Si hanno perciò i seguenti casi:

### 1) La corrente è in fase con la tensione (circuito puramente ohmico)

Se la corrente è in fase con la tensione, la curva dei valori istantanei della potenza assume l'andamento di figura 8.23, forma cioè, per ogni periodo, due alternanze positive uguali tra loro, che passano per lo zero e per i valori massimi contemporaneamente alla tensione e alla corrente.

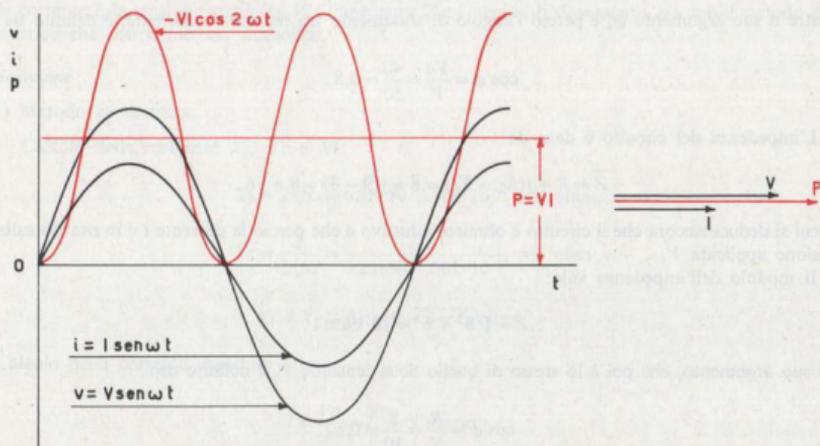


Fig. 8.23 - La potenza di una corrente in fase con la tensione.

Infatti al principio del periodo, quando tensione e corrente sono uguali a zero, anche la potenza è nulla; ma poi essa aumenta con l'aumentare dei valori positivi della tensione e della corrente; è massima quando questi raggiungono il massimo, diminuisce e si annulla quando questi diminuiscono e si annullano.

Durante la semionda negativa la potenza torna ad assumere però gli stessi valori positivi corrispondenti alla semionda positiva, in quanto tensione e corrente sono entrambe di segno negativo.

Si osservi che la curva dei valori istantanei della potenza ha andamento sinusoidale di frequenza doppia di quella della tensione o della corrente originali ed è tangente all'asse dei tempi.

Pertanto il valore medio  $P_m$  della potenza coincide esattamente con l'asse di simmetria di questa sinusoide e ha per ordinata la metà del valore massimo  $P_{mx}$ :

$$P_m = \frac{P_{mx}}{2}.$$

Sostituendo a  $P_{mx}$  il prodotto dei valori massimi della tensione  $V_{mx}$  e della corrente  $I_{mx}$ , si ha:

$$P_m = \frac{V_{mx} \cdot I_{mx}}{2} = \frac{V_{mx}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_{mx}}{\sqrt{2}}.$$

Ricordando che  $\frac{V_{mx}}{\sqrt{2}}$  e  $\frac{I_{mx}}{\sqrt{2}}$  sono i valori efficaci rispettivamente della tensione e della corrente, si ha:

$$P_m = V \cdot I \quad (8.38)$$

Dunque il valore medio della potenza, espressa in watt, di un circuito puramente ohmico e cioè di un circuito in cui tensione e corrente sono in fase tra loro, è uguale al prodotto dei valori efficaci della tensione in volt per la corrente in ampere, e si indica semplicemente con la lettera  $P$ .

Sostituendo al posto della  $V$  o della  $I$  i rispettivi valori dati dalla legge di Ohm per i circuiti puramente ohmici, si ha anche:

$$P = R \cdot I^2 \quad \text{oppure} \quad P = \frac{V^2}{R}.$$

In forma analitica, il valore della potenza media si ottiene considerando che la potenza istantanea  $p$  è data dal prodotto del valore istantaneo  $v$  della tensione per il corrispondente valore istantaneo  $i$  della corrente:

$$p = v \cdot i = V_{mx} \sin \omega t \cdot I_{mx} \sin \omega t = V_{mx} \cdot I_{mx} \sin^2 \omega t,$$

ricordando che:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2},$$

si ha:

$$p = V_{mx} \cdot I_{mx} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} = \frac{V_{mx} \cdot I_{mx}}{2} - \frac{V_{mx} \cdot I_{mx}}{2} \cos 2\omega t .$$

Se al posto dei valori massimi della tensione e della corrente si sostituiscono i valori efficaci, si ottiene:

$$p = V \cdot I - V \cdot I \cos 2\omega t , \quad (8.39)$$

da cui si deduce che la potenza istantanea è data dalla somma algebrica di un termine costante  $VI$  e da un termine cosinusoidale di ampiezza  $VI$  e con pulsazione  $2\omega$ , ossia con frequenza doppia di quella della tensione o della corrente originali. Questo secondo termine cosinusoidale, che può essere rappresentato nel corrispondente termine sinusoidale:

$$- V \cdot I \cos 2\omega t = V \cdot I \sin (2\omega t - 90^\circ) ,$$

ha ovviamente valore medio nullo.

Dunque il valore medio di tutte le potenze istantanee nell'intervallo di un intero periodo è definito solo dal termine costante  $VI$  che è sempre positivo. Ciò significa che la tensione riesce a produrre, durante l'intero periodo, un movimento di elettroni, e quindi una corrente elettrica, nella propria direzione, compiendo un lavoro reale o positivo, ovvero un lavoro che viene sempre assorbito od utilizzato dal carico. Di conseguenza, nel caso considerato di perfetta concordanza di fase tra tensione e corrente, anche la potenza  $P = VI$  compie un lavoro reale e positivo e viene detta perciò *potenza reale o attiva*.

Il concetto di potenza attiva deriva anche dal fatto che essa rappresenta il prodotto scalare della tensione  $V$  per la corrente  $I$ . Infatti, riferendoci al grafico vettoriale di figura 8.23, se il vettore  $V$  è posto sull'asse reale positivo, il vettore  $I$ , essendo in fase con la  $V$ , è esprimibile con il complesso  $I = I \cos \varphi + + I \sin \varphi = I - jo$ , per cui il prodotto:

$$V \cdot \overline{I} = V(I - jo) = VI - jo = VI = P ,$$

è una potenza definita dal solo termine reale, ossia dal prodotto scalare della tensione  $V$  per la corrente  $I$ , il cui vettore giace anch'esso sull'asse reale positivo.

2) **La corrente è in quadratura con la tensione** (circuito puramente induttivo o puramente capacitivo)

Se la corrente è sfasata di  $90^\circ$  sulla tensione (corrente reattiva) la curva dei valori istantanei della potenza assume l'andamento di figura 8.24 relativa alla

corrente in ritardo di  $90^\circ$  sulla tensione. È cioè una senoide le cui alternanze positive sono dovute al prodotto dei valori istantanei della tensione e della corrente aventi lo stesso segno, ossia dirette nello stesso senso, mentre le alternanze negative sono dovute al prodotto dei valori istantanei della corrente e della tensione aventi segno contrario, ossia dirette in senso opposto. Durante un semi-periodo della corrente, i valori istantanei della potenza descrivono allora un'intera senoide e cioè un'alternanza positiva perfettamente uguale a quella negativa, per cui evidentemente la potenza media è nulla.

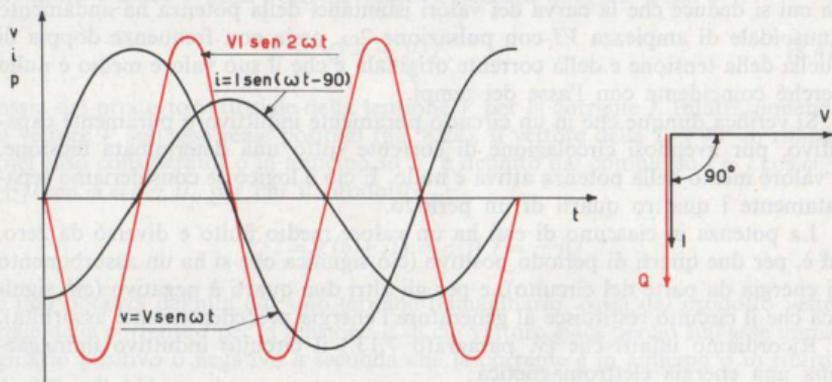


Fig. 8.24 - La potenza di una corrente in quadratura con la tensione.

Infatti la potenza istantanea  $p$  è data dal prodotto del valore istantaneo  $v$  della tensione:

$$v = Vm_x \text{ sen } \omega t ,$$

per il valore istantaneo  $i$  della corrente:

$$i = Im_x \text{ sen } (\omega t \pm 90^\circ) = \pm Im_x \text{ cos } \omega t ,$$

che avrà segno positivo se sarà in anticipo di  $90^\circ$  sulla  $V$  e segno negativo se sarà in ritardo di  $90^\circ$ .

Si ha perciò:

$$p = v \cdot i = \pm Vm_x \cdot Im_x \text{ sen } \omega t \text{ cos } \omega t .$$

Ricordando che:

$$\text{sen } \omega t \text{ cos } \omega t = \frac{\text{sen } 2\omega t}{2} ,$$

si ottiene:

$$p = \pm \frac{V_{mx} \cdot I_{mx}}{2} \text{sen } 2\omega t.$$

Sostituendo al posto dei valori massimi della tensione e della corrente i valori efficaci, si ha:

$$p = \pm V \cdot I \text{sen } 2\omega t, \quad (8.40)$$

da cui si deduce che la curva dei valori istantanei della potenza ha andamento sinusoidale di ampiezza  $VI$  con pulsazione  $2\omega$ , ossia con frequenza doppia di quella della tensione e della corrente originali, e che il suo valore medio è nullo perché coincidente con l'asse dei tempi.

Si verifica dunque che in un circuito puramente induttivo o puramente capacitivo, pur avendosi circolazione di corrente sotto una determinata tensione, il valore medio della potenza attiva è nullo. E ciò è logico se consideriamo separatamente i quattro quarti di un periodo.

La potenza in ciascuno di essi ha un valore medio finito e diverso da zero, ed è, per due quarti di periodo positivo (ciò significa che si ha un assorbimento di energia da parte del circuito), e per gli altri due quarti è negativo (ciò significa che il circuito restituisce al generatore l'energia precedentemente assorbita).

Ricordiamo infatti che (v. paragrafo 7.13.) il circuito induttivo immagazzina una energia elettromagnetica:

$$W = \frac{1}{2} LI^2,$$

durante i quarti di periodo in cui corrente e tensione hanno lo stesso senso, e restituisce integralmente al generatore la medesima energia durante i quarti di periodo in cui la corrente ha senso opposto a quello della tensione.

Analogamente, se il circuito è puramente capacitivo immagazzina una energia elettrostatica (v. paragrafo 6.5.):

$$W = \frac{1}{2} CV^2,$$

durante la carica e cioè durante i quarti di periodo in cui la corrente circola nel senso della tensione, e restituisce integralmente al generatore la stessa energia durante la scarica e cioè durante i quarti di periodo in cui la corrente ha senso opposto a quello della tensione applicata.

Nell'uno e nell'altro circuito si verifica insomma un continuo scambio di energia tra il generatore ed il circuito, per cui il valore medio della potenza è effettivamente nullo.

La differenza essenziale quindi tra un circuito puramente ohmico e un circuito puramente reattivo sta nel fatto che il circuito ohmico trasforma tutta l'energia che riceve in calore, mentre il circuito reattivo immagazzina tutta l'energia che riceve durante un quarto di periodo e la restituisce integralmente durante il quarto di periodo successivo.

La potenza che alternativamente viene scambiata tra il generatore e il circuito reattivo prende il nome di *potenza reattiva* e si indica con la lettera  $Q$ .

Essa si fa corrispondere al prodotto del valore efficace  $V$  della tensione per il valore efficace  $I$  della corrente reattiva (sfasata di  $\pm 90^\circ$  sulla  $V$ ):

$$Q = \pm V \cdot I, \quad (8.41)$$

ossia dal prodotto vettoriale della tensione  $V$  per la corrente  $I$ . Infatti, ponendo il vettore  $V$  sull'asse reale positivo (fig. 8.24), il vettore della  $I$ , a  $90^\circ$  in ritardo (nel caso considerato) o in anticipo su  $V$ , è definito dal complesso  $\bar{I} = I \cos \varphi \pm \pm jI \sin \varphi = o \pm jI$ , per cui il prodotto:

$$V \cdot \bar{I} = V(o \pm jI) = \pm jVI = \pm jQ,$$

è una potenza definita dal solo termine immaginario, ossia dal prodotto vettoriale della corrente  $I$  per la tensione  $V$ , il cui vettore giace perciò sull'asse immaginario positivo o negativo a seconda che la corrente è in anticipo o in ritardo di  $90^\circ$  sulla  $V$ .

Tale potenza non riveste alcun significato fisico, ma fornisce solo una valutazione della maggiore o minore entità dello scambio alterno di potenza tra il generatore e il circuito reattivo. Per questo non si misura in *watt* come la potenza attiva, ma in *volt-ampere reattivi* o *VAR*.

Sostituendo al posto della  $V$  e della  $I$  i rispettivi valori dati dalla legge di Ohm per i circuiti puramente reattivi, si ha anche:

$$Q = X \cdot I^2 \quad \text{oppure} \quad Q = \frac{V^2}{X}.$$

### 3) La corrente è sfasata di un angolo $\varphi$ sulla tensione

Se la corrente è sfasata di un angolo  $\varphi$  compreso tra zero e  $90^\circ$ , in ritardo o in anticipo sulla tensione, la curva dei valori istantanei della potenza assume, per un determinato angolo di sfasamento  $\varphi$ , l'andamento di figura 8.25 relativo ad una corrente in ritardo sulla tensione.

Durante un semiperiodo della corrente, la curva della potenza assume valori positivi in corrispondenza agli istanti in cui corrente e tensione hanno lo stesso segno, e valori negativi in corrispondenza agli istanti in cui tensione e corrente hanno segno contrario.

Ciò significa che durante una frazione di periodo il circuito assorbe una potenza e durante l'altra frazione dello stesso periodo restituisce al generatore una parte della potenza assorbita.

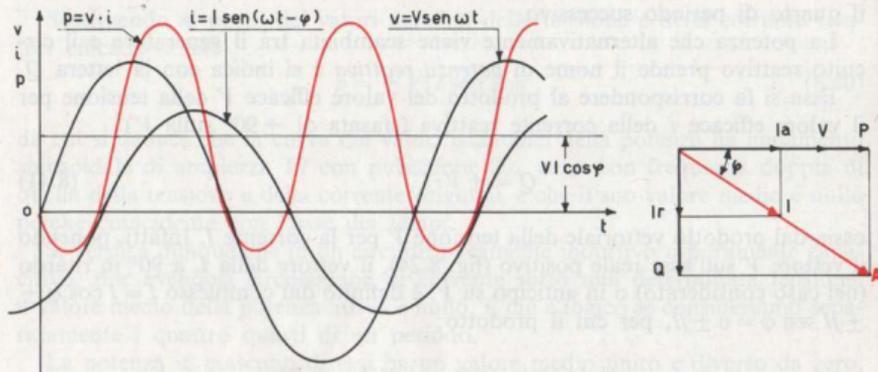


Fig. 8.25 - Le potenze di una corrente sfasata di un angolo  $\varphi$  sulla tensione.

La parte di potenza che il circuito trattiene e trasforma è evidentemente la potenza attiva  $P$ , data dal prodotto del valore efficace  $V$  della tensione per il valore efficace della componente attiva  $I_a$ , in fase con  $V$ , della corrente apparente  $I$ , oppure, (ponendo la  $I$  sull'asse reale e la  $V$  in anticipo su  $I$  dell'angolo  $\varphi$ ), dal prodotto del valore efficace della corrente  $I$  per il valore efficace della componente attiva  $V_a$  della tensione apparente  $V$ .

La parte, invece, di potenza che il circuito scambia con il generatore è la potenza reattiva  $Q$ , data dal prodotto del valore efficace della tensione  $V$  per il valore efficace della componente reattiva  $I_r$ , a  $90^\circ$  su  $V$ , della corrente apparente  $I$  (o simmetricamente scambiando  $I$  con  $V$ ).

Essendo  $I_a = I \cos \varphi$  e  $I_r = I \sin \varphi$  od anche  $V_a = V \cos \varphi$  e  $V_r = V \sin \varphi$  si ha:

$$P = V \cdot I_a = V_a \cdot I = V \cdot I \cdot \cos \varphi . \quad (8.42)$$

La potenza attiva  $P$  di un circuito è dunque data dal prodotto dei valori apparenti della tensione  $V$  e della corrente  $I$  per il coseno del loro angolo  $\varphi$  di sfasamento.

Il termine  $\cos \varphi$  prende il nome di *fattore di potenza attiva*, perché figura come uno dei fattori nella formula della potenza attiva di una corrente alternata.

Analogamente si ha:

$$Q = V \cdot I_r = V_r \cdot I = V \cdot I \cdot \sin \varphi . \quad (8.43)$$

La potenza reattiva  $Q$  di un circuito è dunque data dal prodotto dei valori apparenti della tensione  $V$  e della corrente  $I$  per il seno del loro angolo  $\varphi$  di sfasamento.

Al termine  $\sin \varphi$  si dà il nome di *fattore di potenza reattiva*.

La potenza complessiva che agisce nel circuito viene detta *potenza apparente*  $A$  e, dal diagramma vettoriale, si rileva che è la risultante delle due potenze  $P$  e  $Q$  tra loro in quadratura ed è perciò rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo, detto *triangolo delle potenze*, il cui cateto adiacente all'angolo di sfasamento  $\varphi$  rappresenta la potenza attiva  $P$  e il cateto opposto all'angolo la potenza reattiva  $Q$ .

Pertanto la potenza apparente  $A$  è, per il teorema di Pitagora:

$$A^2 = P^2 + Q^2 = V^2 \cdot I^2 \cos^2 \varphi + V^2 \cdot I^2 \sin^2 \varphi = V^2 \cdot I^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi).$$

Ricordando dalla trigonometria che  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ , si ha:

$$A = V \cdot I. \quad (8.44)$$

Quindi la potenza apparente di un circuito è data dal prodotto dei valori apparenti della tensione e della corrente.

Tale potenza non riveste alcun carattere energetico, ma indica solo il valore che potrebbe assumere la potenza attiva qualora la corrente fosse in fase con la tensione. Perciò essa viene misurata semplicemente in *volt-ampere* ( $VA$ ).

Sostituendo a  $V$  od a  $I$  i rispettivi valori dati dalla legge di Ohm per i circuiti ohmici-induttivi-capacitivi, si ha anche:

$$A = Z \cdot I^2 \quad \text{oppure} \quad A = \frac{V^2}{Z}.$$

In forma analitica, le espressioni delle potenze attive e reattive si deducono dall'espressione della potenza istantanea  $p$  data dal prodotto del valore istantaneo  $v$  della tensione:

$$v = V_m \sin \omega t,$$

per il corrispondente valore istantaneo  $i$  della corrente:

$$i = I_m \sin (\omega t \pm \varphi) = I_m (\sin \omega t \cos \varphi \pm \cos \omega t \sin \varphi),$$

dove il segno positivo e il segno negativo stanno ad indicare che la corrente  $I$  è rispettivamente in anticipo o in ritardo sulla  $V$ .

Si ha perciò:

$$\begin{aligned} p &= v \cdot i = V_m \cdot I_m \sin \omega t (\sin \omega t \cos \varphi \pm \cos \omega t \sin \varphi) = \\ &= V_m \cdot I_m (\sin^2 \omega t \cos \varphi \pm \sin \omega t \cos \omega t \sin \varphi). \end{aligned}$$

Ricordando che:

$$\operatorname{sen}^2 \omega t = \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \quad \text{e che} \quad \operatorname{sen} \omega t \cos \omega t = \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{2},$$

si ha:

$$p = V m_x \cdot I m_x \left( \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \cos \varphi \pm \frac{\operatorname{sen} 2\omega t}{2} \operatorname{sen} \varphi \right).$$

Se al posto dei valori massimi si sostituiscono i valori efficaci della tensione e della corrente, si ottiene:

$$p = V \cdot I (1 - \cos 2\omega t) \cos \varphi \pm V \cdot I \operatorname{sen} 2\omega t \operatorname{sen} \varphi. \quad (8.45)$$

Il primo addendo:

$$V \cdot I (1 - \cos 2\omega t) \cos \varphi = V \cdot I \cos \varphi - V \cdot I \cos 2\omega t \cos \varphi,$$

è costituito da un termine costante  $V I \cos \varphi$  a cui si somma algebricamente il termine cosinusoidale  $V I \cos 2\omega t \cos \varphi$  di ampiezza  $V I$  e con pulsazione  $2\omega$ , ma con valore medio nullo (fig. 8.26).

Analogamente a quanto detto al punto 1, il termine costante  $V I \cos \varphi$  rappresenta allora il valore medio della potenza e per il fatto di essere sempre positivo, perché il valore  $\cos \varphi$  compreso tra  $0^\circ$  e  $90^\circ$  è sempre maggiore di zero, non può che rappresentare la potenza attiva:

$$P = V \cdot I \cos \varphi.$$

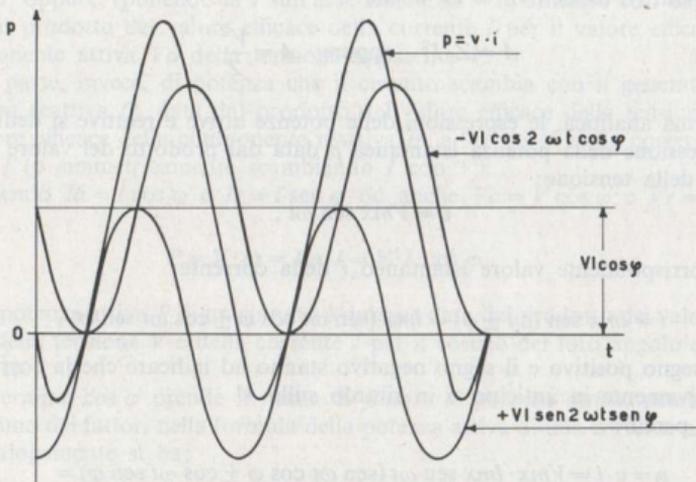


Fig. 8.26 - Diagramma della potenza attiva, reattiva e apparente.

Il secondo addendo:

$$\pm V \cdot I \sin 2\omega t \sin \varphi ,$$

rappresenta un termine ad andamento sinusoidale di ampiezza  $VI$  e con pulsazione  $2\omega$ , ma con valore medio nullo; inoltre, per la presenza del fattore  $\sin \varphi$ , risulta sfasato di  $90^\circ$  sul primo addendo (fig. 8.26).

Come detto al punto 2, a tale termine si dà il nome di potenza reattiva  $Q$  e si fa corrispondere al prodotto del valore efficace  $V$  della tensione per il valore efficace della corrente reattiva che, nel caso in esame, vale  $I \sin \varphi$ . Si ha pertanto:

$$Q = \pm V \cdot I \sin \varphi .$$

La somma geometrica o vettoriale della potenza attiva  $P$  con la potenza reattiva  $Q$  rappresenta la potenza apparente  $A$ , la cui curva, indicata con  $p$  in figura 8.26, esprime per intero la relazione (8.45) suindicata.

In forma simbolica, la potenza apparente  $A$  viene definita dalle sue coordinate rispetto ad un asse di riferimento che si fa coincidere, normalmente, con il vettore della  $V$  o con il vettore della  $I$ . Riferendoci ancora al grafico di figura 8.25, dove il vettore della tensione  $V$  è posto sull'asse reale positivo, il vettore della corrente  $I$ , essendo in ritardo su  $V$  di un angolo  $\varphi$ , è definito dal complesso:

$$\bar{I} = Ia - jIr = I \cos \varphi - jI \sin \varphi .$$

Il prodotto di  $V$  per  $I$  è allora un numero complesso:

$$V \cdot \bar{I} = V(Ia - jIr) = VI \cos \varphi - jVI \sin \varphi ,$$

il cui termine reale è un prodotto scalare e perciò è una potenza attiva  $P$  il cui vettore giace sull'asse reale positivo, e il termine immaginario è un prodotto vettoriale e perciò una potenza reattiva  $Q$  il cui vettore giace sull'asse immaginario negativo.

Quindi il complesso:

$$\bar{A} = P - jQ ,$$

definisce le potenze apparente, attiva e reattiva, e dimostra che il vettore  $\bar{A}$  ha lo stesso argomento del vettore  $\bar{I}$  rispetto a  $V$ .

In generale:

$$\bar{A} = P \pm jQ ,$$

definisce il vettore di una potenza apparente, la cui componente reale, o vettore della potenza attiva, giace sull'asse di riferimento, mentre la componente im-

maginaria, o vettore della potenza reattiva, giace a  $90^\circ$  in ritardo o in anticipo sull'asse di riferimento a seconda che è di segno negativo o di segno positivo. Più propriamente, se l'asse di riferimento è quello della  $V$ , il segno della  $Q$  è positivo o negativo se, rispettivamente, la  $I$  è in anticipo o in ritardo sulla  $V$ , mentre, se l'asse di riferimento è quello della  $I$ , il segno della  $Q$  è positivo o negativo se, rispettivamente, la  $V$  è in anticipo o in ritardo sulla  $I$ .

### Esempio numerico

Un circuito ohmico-induttivo-capacitivo avente la resistenza ohmica di 16 ohm, la reattanza induttiva di 26 ohm e la reattanza capacitiva di 14 ohm, è sottoposto alla tensione alternata di 100 volt. Calcolare l'impedenza del circuito, la corrente da esso assorbita, la potenza attiva, reattiva ed apparente.

### Soluzione

Calcolo dell'impedenza  $Z$ :

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{16^2 + (26 - 14)^2} = 20 \text{ ohm}.$$

Calcolo della corrente  $I$  assorbita dal circuito:

$$I = \frac{V}{Z} = \frac{100}{20} = 5 \text{ ampere}.$$

Calcolo del fattore di potenza attivo e reattivo:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{16}{20} = 0,8, \quad \text{sen } \varphi = \frac{X_I}{Z} = \frac{12}{20} = 0,6.$$

Calcolo della potenza attiva, reattiva ed apparente:

$$P = V \cdot I \cos \varphi = 100 \cdot 5 \cdot 0,8 = 400 \text{ watt},$$

$$Q = V \cdot I \text{sen } \varphi = 100 \cdot 5 \cdot 0,6 = 300 \text{ VAR},$$

$$A = V \cdot I = 100 \cdot 5 = 500 \text{ VA}.$$

oppure:

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ VA}.$$

In forma simbolica (ponendo la  $V$  sull'asse reale) si ha:

$$\bar{Z} = R + j(X_L - X_C) = 16 + j(26 - 14) = 16 + j12,$$

da cui si deduce che il circuito è prevalentemente ohmico-induttivo e da cui:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_I^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ ohm}.$$

L'intensità della corrente si ottiene dal rapporto:

$$\bar{I} = \frac{V}{Z} = \frac{100}{16 + j12} = \frac{1.600}{400} - j \frac{1.200}{400} = 4 - j3,$$

da cui si deduce che la corrente è in ritardo sulla tensione e da cui:

$$I = \sqrt{Ia^2 + Ir^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ ampere .}$$

Le potenze possono essere calcolate in vari modi:

$$\vec{A} = V\vec{I} = V(Ia - jIr) = 100(4 - j3) = 400 - j300 ,$$

oppure:

$$\vec{A} = \frac{V^2}{Z} = \frac{10.000}{16 + j12} = \frac{160.000}{400} - j \frac{120.000}{400} = 400 - j300 ,$$

dove il termine reale corrisponde al modulo della potenza attiva  $P$  e il termine immaginario al modulo della potenza reattiva  $Q$ , e da cui:

$$A = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500 \text{ VA .}$$

I fattori di potenza attiva e reattiva si possono ottenere da:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{Ia}{I} = \frac{P}{A} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = \frac{400}{500} = 0,8 ,$$

$$\sin \varphi = \frac{Xl}{Z} = \frac{Ir}{I} = \frac{Q}{A} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = \frac{300}{500} = 0,6 .$$

## 8.7. RAGGRUPPAMENTO DI IMPEDENZE

Le impedenze, come le resistenze, possono essere collegate tra loro in serie, in parallelo e in modo misto.

Noti i valori dei componenti di ciascuna impedenza, della tensione applicata al circuito e della frequenza, si vuol conoscere, di ciascun collegamento, l'impedenza totale, l'intensità di corrente totale e in ciascuna impedenza, la caduta di tensione provocata da ciascuna impedenza e lo sfasamento tra la corrente totale e la tensione applicata.

Diversamente che nel caso della corrente continua, con le correnti alternate, a causa del diverso sfasamento tra la corrente e la tensione ai capi di ciascuna impedenza, i calcoli risolutivi necessitano non solo del procedimento aritmetico, ma anche del procedimento algebrico, e geometrico, o trigonometrico, o vettoriale.

### a) Circuito con più impedenze collegate in serie

Consideriamo il circuito di figura 8.27 costituito da due bobine aventi rispettivamente le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  e le reattanze  $X_{L1}$  e  $X_{L2}$ , da una reattanza capacitiva  $X_c$  e da una resistenza ohmica  $R_3$ .

Sia  $Vt$  la tensione alternata di alimentazione.

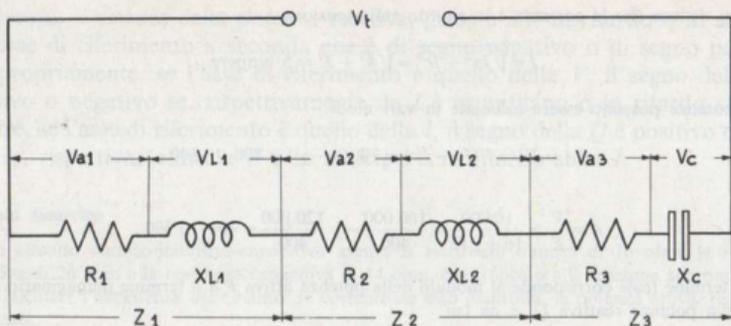


Fig. 8.27 - Impedenze in serie.

Ricordando che ciascuna impedenza  $Z$  è rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo, di cui il cateto adiacente all'angolo di sfasamento rappresenta la resistenza ohmica  $R$  e il cateto opposto la reattanza  $X$ , il valore dell'impedenza totale  $Z_t$  non può essere determinato che dall'ipotenusa del triangolo risultante dalla composizione dei triangoli delle singole impedenze (fig. 8.28).

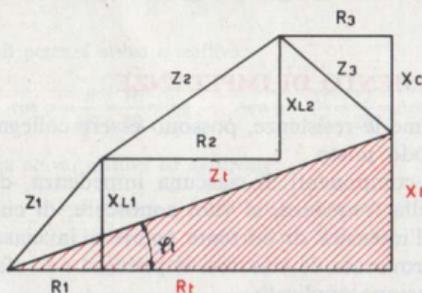


Fig. 8.28 - Somma geometrica di tre impedenze.

Si deduce allora che per calcolare l'impedenza totale  $Z_t$  occorre:

- 1) calcolare la resistenza ohmica totale  $R_t$  dell'intero circuito facendo la somma aritmetica delle singole resistenze:

$$R_t = R_1 + R_2 + R_3 ,$$

- 2) calcolare la reattanza totale  $X_t$  facendo la somma algebrica delle singole reattanze (ricordiamo che le reattanze capacitive agiscono in senso opposto alle reattanze induttive):

$$X_t = X_{L1} + X_{L2} - X_c ,$$

3) calcolare l'impedenza totale  $Z_t$  facendo la somma geometrica o vettoriale della resistenza totale  $R_t$  e della reattanza totale  $X_t$ :

$$Z_t = \sqrt{R_t^2 + X_t^2}.$$

La corrente  $I$  che si stabilisce nel circuito e che è la stessa in tutte le impedenze, è data da:

$$I = \frac{V_t}{Z_t}.$$

Le cadute di tensione che la corrente  $I$  provoca nelle resistenze e nelle reattanze, si calcolano moltiplicando la corrente  $I$  per il valore di ciascuna resistenza e di ciascuna reattanza, e precisamente:

$V_{a1} = I \cdot R_1$	in fase con la corrente $I$ ,
$V_{L1} = I \cdot X_{L1}$	sfasata di $90^\circ$ in anticipo sulla $I$ ,
$V_{a2} = I \cdot R_2$	in fase con la corrente $I$ ,
$V_{L2} = I \cdot X_{L2}$	sfasata di $90^\circ$ in anticipo sulla $I$ ,
$V_c = I \cdot X_c$	sfasata di $90^\circ$ in ritardo sulla $I$ ,
$V_{a3} = I \cdot R_3$	in fase con la corrente $I$ .

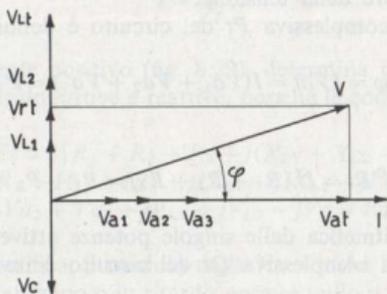


Fig. 8.29 - Diagramma delle tensioni di impedenze in serie.

Si deduce che la tensione applicata  $V_t$  (tensione apparente) è ancora rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo, (fig. 8.29), di cui il cateto adiacente all'angolo di sfasamento  $\varphi$  rappresenta la somma aritmetica  $V_{at}$  delle cadute di tensione in fase con la corrente e cioè provocate nelle resistenze ohmiche (cadute attive):

$$V_{at} = V_{a1} + V_{a2} + V_{a3},$$

e il cateto opposto all'angolo di sfasamento rappresenta la somma algebrica  $V_{rt}$  delle cadute di tensione in quadratura sulla corrente e cioè provocate dalle reattanze (cadute reattive):

$$V_{rt} = V_{L1} + V_{L2} - V_c,$$

per cui:

$$V_t = \sqrt{V_{at}^2 + V_{rt}^2}.$$

Facciamo osservare che a seconda del valore delle reattanze, è possibile che qualche caduta di tensione reattiva abbia un valore maggiore della tensione applicata.

L'angolo di sfasamento totale  $\varphi$  e cioè l'angolo di sfasamento tra la corrente totale e la tensione applicata, si ricava dalle funzioni trigonometriche:

$$\cos \varphi = \frac{R_t}{Z_t} = \frac{V_{at}}{V_t} \quad \text{sen } \varphi = \frac{X_t}{Z_t} = \frac{V_{rt}}{V_t} \quad \text{tg } \varphi = \frac{X_t}{R_t} = \frac{V_{rt}}{V_{at}},$$

e può essere in ritardo od in anticipo od anche nullo a seconda che la reattanza induttiva è maggiore o minore od uguale alla reattanza capacitiva, in quanto convenzionalmente il ritardo o l'anticipo è sempre riferito al vettore della corrente rispetto al vettore della tensione.

La potenza attiva complessiva  $P_t$  del circuito è definita da:

$$P_t = V_t I \cos \varphi = I V_{at} = I(V_{a1} + V_{a2} + V_{a3}) = P_1 + P_2 + P_3,$$

oppure da:

$$P_t = I^2 R_t = I^2(R_1 + R_2 + R_3) = P_1 + P_2 + P_3,$$

ossia dalla somma aritmetica delle singole potenze attive.

La potenza reattiva complessiva  $Q_t$  del circuito è invece definita da:

$$Q_t = V_t I \text{sen } \varphi = I V_{rt} = I(V_{L1} + V_{L2} - V_c) = Q_1 + Q_2 - Q_3,$$

oppure da:

$$Q_t = I^2 X_t = I^2(X_{L1} + X_{L2} - X_c) = Q_1 + Q_2 - Q_3,$$

ossia dalla somma algebrica delle singole potenze reattive.

La potenza apparente totale  $A_t$  del circuito è data da:

$$A_t = V_t I = I^2 Z_t = I^2 \sqrt{R_t^2 + X_t^2} = \sqrt{I^4 R_t^2 + I^4 X_t^2} = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2}.$$

Il procedimento analitico suesposto viene notevolmente contenuto adottando il metodo simbolico.

Riferendoci ancora al circuito di figura 8.27, possiamo scrivere:

$$\bar{Z}_1 = R_1 + jX_{L1} \quad \bar{Z}_2 = R_2 + jX_{L2} \quad \bar{Z}_3 = R_3 - jX_C,$$

per cui l'impedenza totale è definita da:

$$\begin{aligned} \bar{Z}_t &= \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_3 = R_1 + jX_{L1} + R_2 + jX_{L2} + R_3 - jX_C = \\ &= R_1 + R_2 + R_3 + j(X_{L1} + X_{L2} - X_C) = Rt \pm jXt, \end{aligned}$$

da cui si ricava il modulo e l'argomento del vettore  $\bar{Z}_t$ :

$$Z_t = \sqrt{Rt^2 + Xt^2} \quad \text{e} \quad \cos \varphi = \frac{Rt}{Z_t}.$$

Dal complesso della  $Z_t$  si deduce che il circuito si comporta da prevalentemente induttivo o da prevalentemente capacitivo oppure da puramente ohmico, a seconda che il termine immaginario risulta positivo o negativo oppure nullo.

Nota la tensione  $V_t$  applicata al circuito, si calcola il modulo della corrente  $I$  fluente nel circuito:

$$I = \frac{V_t}{Z_t},$$

che, posta sull'asse reale positivo (fig. 8.29), determina immediatamente il valore e la fase delle tensioni attive e reattive, nonché le coordinate della  $V_t$  apparente:

$$\begin{aligned} \bar{V}_t &= I \cdot \bar{Z}_t = I[R_1 + R_2 + R_3 + j(X_{L1} + X_{L2} - X_C)] = \\ &= IR_1 + IR_2 + IR_3 + jIX_{L1} + jIX_{L2} - jIX_C = \\ &= Va_1 + Va_2 + Va_3 + jV_{L1} + jV_{L2} - jV_C = Vat \pm jVrt, \end{aligned}$$

da cui si ricava, per verifica, il modulo della  $V_t$ , nonché il suo sfasamento sulla  $I$  che può risultare in anticipo o in ritardo oppure nullo a seconda che il termine immaginario è positivo o negativo oppure nullo.

Dal complesso della  $V_t$  o della  $Z_t$  si ricava il complesso della potenza apparente  $At$ :

$$\bar{A}_t = \bar{I}\bar{V}_t = I(Vat \pm jVrt) = Pt \pm jQt,$$

oppure:

$$\bar{A}_t = I^2 \bar{Z}_t = I^2(Rt \pm jXt) = Pt \pm jQt,$$

e quindi il modulo della potenza attiva e della potenza reattiva, nonché l'argomento della  $At$  riferito al vettore della  $I$ .

### Esempio numerico

Due bobine della resistenza ohmica  $R_1$  di 4 ohm e  $R_2$  di 2 ohm e della reattanza induttiva  $X_{L1}$  di 10 ohm e  $X_{L2}$  di 6 ohm, sono collegati in serie con un condensatore.

Sapendo che la tensione applicata  $V_t$  è di 60 volt con frequenza di 50 Hz e che la corrente totale  $I_t$  è di 6 ampere, calcolare la capacità del condensatore, l'angolo di sfasamento tra tensione e corrente, e le potenze attiva reattiva ed apparente.

### Soluzione

Calcolo dell'impedenza totale  $Z_t$ :

$$Z_t = \frac{V_t}{I_t} = \frac{60}{6} = 10 \text{ ohm} .$$

Calcolo della resistenza complessiva  $R_t$ :

$$R_t = R_1 + R_2 = 4 + 2 = 6 \text{ ohm} .$$

Calcolo della reattanza complessiva  $X_t$ :

$$X_t = \sqrt{Z_t^2 - R_t^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ ohm} .$$

Calcolo della reattanza capacitiva  $X_c$ :

$$X_c = (X_{L1} + X_{L2}) - X_t = (10 + 6) - 8 = 8 \text{ ohm} .$$

Calcolo della capacità del condensatore:

$$C = \frac{1}{2\pi f X_c} = \frac{1}{6,28 \cdot 50 \cdot 8} = 0,000398 \text{ F} = 398 \text{ } \mu\text{F} .$$

Calcolo dei fattori di potenza attiva e reattiva:

$$\cos \varphi = \frac{R_t}{Z_t} = \frac{6}{10} = 0,6 , \quad \sin \varphi = \frac{X_t}{Z_t} = \frac{8}{10} = 0,8 .$$

Dalle tavole trigonometriche si ha per  $\cos \varphi = 0,6$  un angolo di  $53^\circ$  circa, in ritardo essendo  $X_c$  maggiore di  $X_c$ .

Verifichiamo che la somma geometrica delle cadute di tensione è uguale alla tensione applicata  $V_t$ .

Calcolo delle cadute di tensione attive:

$$V_{a1} = R_1 \cdot I = 4 \cdot 6 = 24 \text{ volt} ,$$

$$V_{a2} = R_2 \cdot I = 2 \cdot 6 = 12 \text{ volt} ,$$

$$V_{at} = V_{a1} + V_{a2} = 24 + 12 = 36 \text{ volt} .$$

Calcolo delle cadute reattive:

$$V_{L1} = X_{L1} \cdot I = 10 \cdot 6 = 60 \text{ volt} ,$$

$$V_{L2} = X_{L2} \cdot I = 6 \cdot 6 = 36 \text{ volt} ,$$

$$V_c = X_c \cdot I = 8 \cdot 6 = 48 \text{ volt} ,$$

$$V_{rt} = V_{L1} + V_{L2} - V_c = 60 + 36 - 48 = 48 \text{ volt} .$$

Calcolo della tensione totale  $V_t$ :

$$V_t = \sqrt{V_{at}^2 + V_{rt}^2} = \sqrt{36^2 + 48^2} = 60 \text{ volt} .$$

Calcolo della potenza attiva complessiva  $P_t$ :

$$P_t = IV_t \cos \varphi = 6 \cdot 60 \cdot 0,6 = 216 \text{ watt} ,$$

oppure:

$$P_t = IV_{at} = 6 \cdot 36 = 216 \text{ watt} ,$$

oppure:

$$P_t = I^2 R_t = 6^2 \cdot 6 = 216 \text{ watt} .$$

Calcolo della potenza reattiva complessiva  $Q_t$ :

$$Q_t = IV_t \sin \varphi = 6 \cdot 60 \cdot 0,8 = 288 \text{ VAR} ,$$

oppure:

$$Q_t = IV_{rt} = 6 \cdot 48 = 288 \text{ VAR} ,$$

oppure:

$$Q_t = I^2 X_t = 6^2 \cdot 8 = 288 \text{ VAR} .$$

Calcolo della potenza apparente complessiva  $A_t$ :

$$A_t = IV_t = 6 \cdot 60 = 360 \text{ VA} ,$$

oppure:

$$A_t = I^2 Z = 6^2 \cdot 10 = 360 \text{ VA} ,$$

oppure:

$$A_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2} = \sqrt{216^2 + 288^2} = 360 \text{ VA} .$$

## b) Circuiti con più impedenze in parallelo

Il circuito di figura 8.30 è formato da tre rami in parallelo: il primo costituito da una bobina di resistenza ohmica  $R_1$  e reattanza  $X_L$ , il secondo da un condensatore di reattanza  $X_C$  e da una resistenza  $R_2$  e il terzo comprendente solamente una resistenza ohmica  $R_3$ .

Sia  $V$  la tensione applicata.

Si osserva anzitutto che la tensione agente ai capi di ciascuna impedenza

è uguale a  $V$ , per cui la corrente in ciascun ramo può essere subito calcolata con le seguenti formule:

$$I_1 = \frac{V}{\sqrt{R_1^2 + X_L^2}} \quad I_2 = \frac{V}{\sqrt{R_2^2 + X_C^2}} \quad I_3 = \frac{V}{R_3},$$

dove  $\sqrt{R_1^2 + X_L^2}$ ,  $\sqrt{R_2^2 + X_C^2}$  e  $R_3$  sono le impedenze rispettivamente del primo, del secondo e del terzo ramo del parallelo.

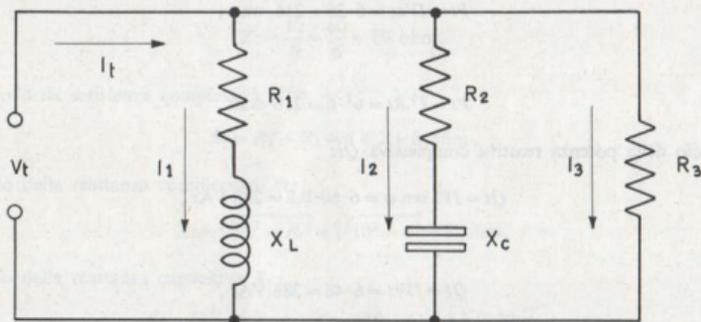


Fig. 8.30 - Impedenza in parallelo.

Le tre correnti non sono logicamente in fase tra loro, per cui la corrente totale o apparente non può calcolarsi facendo la somma aritmetica delle singole correnti, come in corrente continua, ma facendone la somma vettoriale o geometrica, come è stato fatto per le cadute di tensione nel collegamento serie.

La corrente risultante è rappresentata dall'ipotenusa di un triangolo rettangolo, detto *triangolo delle correnti*, di cui il cateto adiacente all'angolo di sfa-

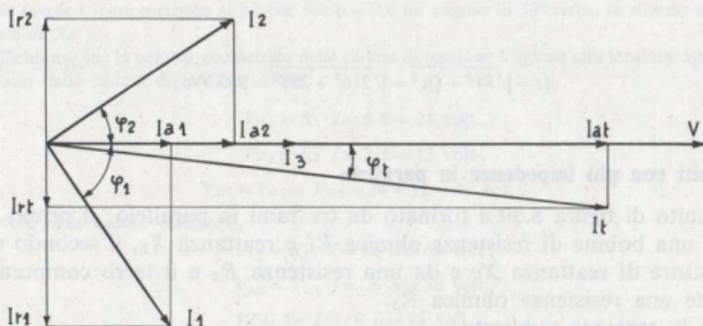


Fig. 8.31 - Diagramma vettoriale delle correnti di un circuito di impedenze in parallelo.

samento totale, rappresenta la somma aritmetica delle componenti attive ed è in fase con la tensione e il cateto opposto all'angolo rappresenta la somma algebrica delle componenti reattive e cioè delle correnti sfasate di  $90^\circ$  sulla tensione.

Osserviamo infatti il diagramma vettoriale di figura 8.31.

La tensione applicata  $V$ , essendo uguale per ciascun ramo del parallelo, è rappresentata dal vettore  $V$  disposto sull'asse reale, a riferimento degli angoli di sfasamento. La corrente  $I_1$ , percorrendo un carico ohmico-induttivo è indubbiamente in ritardo di un angolo  $\varphi_1$ , la corrente  $I_2$ , che percorre un carico ohmico-capacitivo, è in anticipo di un angolo  $\varphi_2$  e la corrente  $I_3$  è in fase con la tensione perché assorbita da un carico puramente ohmico.

Per calcolare allora l'intensità totale  $I_t$  della corrente occorre:

- 1) Calcolare le funzioni trigonometriche dell'angolo di sfasamento dell'impedenza di ciascun ramo del parallelo:

$$\cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} \text{ rit.} \quad \cos \varphi_2 = \frac{R_2}{Z_2} \text{ ant.} \quad \cos \varphi_3 = \frac{R_3}{Z_3} \text{ (nel nostro caso = 1)}$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{X_1}{Z_1} \quad \sin \varphi_2 = \frac{X_2}{Z_2} \quad \sin \varphi_3 = \frac{X_3}{Z_3} \text{ (nel nostro caso = 0).}$$

- 2) Scomporre il vettore di ciascuna corrente in due vettori, uno in fase con la tensione (componente attiva  $Ia$ ) e l'altro in quadratura (componente reattiva  $Ir$ ):

$$Ia_1 = I_1 \cos \varphi_1 \quad Ia_2 = I_2 \cos \varphi_2 \quad Ia_3 = I_3 \cos \varphi_3 ,$$

$$Ir_1 = I_1 \sin \varphi_1 \text{ rit.} \quad Ir_2 = I_2 \sin \varphi_2 \text{ ant.} \quad Ir_3 = I_3 \sin \varphi_3 .$$

- 3) Calcolare la corrente attiva totale  $Iat$  facendo la somma aritmetica delle componenti attive:

$$Iat = Ia_1 + Ia_2 + Ia_3 .$$

- 4) Calcolare la corrente reattiva totale  $Irt$  facendo la somma algebrica delle componenti reattive:

$$Irt = Ir_1 - Ir_2 + Ir_3 .$$

- 5) Sommare geometricamente o vettorialmente la corrente attiva totale  $Iat$  con la corrente reattiva totale  $Irt$ . Si ottiene così la corrente totale  $I_t$  del circuito.

$$I_t = \sqrt{Iat^2 + Irt^2} . \quad (8.46)$$

Si osserva che la corrente totale  $I_t$  può risultare sfasata in ritardo oppure in anticipo od anche in fase con la tensione applicata  $V$ , a seconda che la componente reattiva induttiva è maggiore oppure minore od uguale alla componente reattiva capacitiva.

L'intensità  $I_t$  della corrente totale può aversi anche dal rapporto tra la tensione applicata  $V$  e l'impedenza totale  $Z_t$  del circuito:

$$I_t = \frac{V}{Z_t}.$$

Occorre però conoscere e perciò calcolare l'impedenza totale  $Z_t$ .

In corrente continua per calcolare la resistenza equivalente di un gruppo di resistenze in parallelo si può fare l'inverso della somma degli inversi di ciascuna resistenza (v. parag. 4.8.), ma più semplicemente si può fare la somma aritmetica delle corrispondenti conduttanze.

Anche in corrente alternata, per calcolare l'impedenza totale od equivalente di un gruppo di impedenze collegate in parallelo, il metodo analitico più semplice, relativamente al metodo di calcolo trigonometrico per ora usato, è quello di trasformare i triangoli delle impedenze nei corrispondenti triangoli delle ammettenze e quindi farne la somma geometrica.

Consideriamo il triangolo delle correnti di figura 8.32.

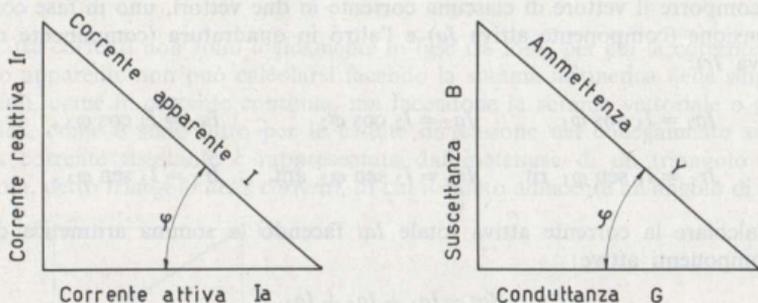


Fig. 8.32 - Triangolo delle correnti e delle ammettenze.

Se dividiamo la tensione  $V$  per la corrente attiva  $I_a = I \cos \varphi$ , si ottiene la resistenza ohmica  $R$ , se invece dividiamo la corrente attiva  $I_a$  per la tensione  $V$  si ottiene la *conduttanza*  $G$ .

$$G = \frac{I_a}{V} = \frac{I \cos \varphi}{V}.$$

Essendo  $I/V = 1/Z$  e  $\cos \varphi = R/Z$  si ha:

$$G = \frac{1}{Z} \cdot \frac{R}{Z} = \frac{R}{Z^2}. \quad (8.47)$$

La conduttanza  $G$  di un ramo del parallelo si calcola dunque con il rapporto tra la resistenza ohmica totale  $R$  del ramo e il quadrato dell'impedenza  $Z$  del ramo stesso.

Analogamente, dividendo la tensione  $V$  per la corrente reattiva  $I_r$  si ottiene la reattanza  $X$ , se invece facciamo il rapporto tra la corrente reattiva  $I_r$  e la tensione  $V$  si ottiene una *conduttanza reattiva*, che prende il nome di *suscettanza*  $B$ .

$$B = \frac{I_r}{V} = \frac{I \sin \varphi}{V} = \frac{I}{V} \cdot \frac{X}{Z} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{X}{Z} = \frac{X}{Z^2}. \quad (8.48)$$

La suscettanza  $B$  di un ramo del parallelo si calcola dunque con il rapporto tra la reattanza totale  $X$  del ramo per il quadrato della impedenza  $Z$  del ramo stesso.

Sostituendo nella (8.46) al posto di  $I_a$  e di  $I_r$  i rispettivi valori  $V \cdot G$  e  $V \cdot B$  si ha:

$$I = \sqrt{V^2 G^2 + V^2 B^2} = V \sqrt{G^2 + B^2},$$

dove il termine  $\sqrt{G^2 + B^2}$  indica il valore della conduttanza complessiva o apparente, detta *ammettenza*  $Y$ :

$$Y = \sqrt{G^2 + B^2}, \quad (8.49)$$

da cui si deduce che l'ammettenza  $Y$  è rappresentata dall'ipotenusa (fig. 8.32) di un triangolo rettangolo, detto *triangolo della ammettenze*, di cui il cateto adiacente all'angolo di sfasamento  $\varphi$  rappresenta la conduttanza  $G$  e il cateto opposto all'angolo  $\varphi$  rappresenta la suscettanza  $B$ .

La conduttanza  $G$ , la suscettanza  $B$  e l'ammettenza  $Y$  si misurano, ovviamente, in *siemens*.

L'impedenza  $Z$  si calcola facendo l'inverso aritmetico dell'ammettenza  $Y$ :

$$Z = \frac{1}{Y} \quad \text{da cui} \quad Y = \frac{1}{Z}. \quad (8.50)$$

Per calcolare quindi l'impedenza equivalente  $Z_t$  di un gruppo di impedenze in parallelo, si procede nel seguente modo:

1) Date le resistenze  $R$  e le reattanze  $X$  di ciascun ramo, si calcola dapprima l'impedenza  $Z$  di ciascun ramo:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_1^2} \quad Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_2^2} \quad Z_3 = \sqrt{R_3^2 + X_3^2}.$$

2) Si calcola la conduttanza  $G$  di ciascun ramo:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} \quad G_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} \quad G_3 = \frac{R_3}{Z_3^2}.$$

3) Si calcola la suscettanza  $B$  di ciascun ramo:

$$B_1 = \frac{X_1}{Z_1^2} \quad B_2 = \frac{X_2}{Z_2^2} \quad B_3 = \frac{X_3}{Z_3^2}.$$

4) Si calcola la conduttanza totale  $G_t$ , facendo la somma aritmetica delle singole conduttanze:

$$G_t = G_1 + G_2 + G_3.$$

5) Si calcola la suscettanza totale  $B_t$ , facendo la somma algebrica delle singole suscettanze:

$$B_t = B_1 - B_2 + B_3.$$

6) Si calcola l'ammettenza totale  $Y_t$ , facendo la somma geometrica o vettoriale della conduttanza  $G_t$  e della suscettanza  $B_t$ :

$$Y_t = \sqrt{G_t^2 + B_t^2}.$$

7) Facendo l'inverso aritmetico dell'ammettenza totale  $Y_t$  si trova l'impedenza equivalente  $Z_t$ :

$$Z_t = \frac{1}{Y_t}.$$

Volendo poi calcolare le componenti dell'impedenza  $Z_t$  e cioè la resistenza ohmica equivalente serie  $R_e$  e la reattanza equivalente serie  $X_e$  dell'intero collegamento, si applicano le seguenti espressioni:

$$R_e = \frac{G_t}{Y_t^2} \quad e \quad X_e = \frac{B_t}{Y_t^2}. \quad (8.51)$$

L'impedenza complessiva  $Z_t$  può risultare prevalentemente induttiva (angolo di sfasamento in ritardo), o prevalentemente capacitiva (angolo di sfasamento in anticipo), od anche puramente ohmica, a seconda che la somma algebrica delle suscettanze, dà una suscettanza induttiva, o capacitiva, oppure nulla.

L'angolo  $\varphi_t$  di sfasamento tra la tensione  $V$  applicata e la corrente totale  $I_t$  assorbita dall'intero circuito, è determinato dalle funzioni trigonometriche:

$$\cos \varphi_t = \frac{I_{at}}{I_t} = \frac{G_t}{Y_t} = \frac{R_e}{Z_t} \quad \text{sen } \varphi_t = \frac{I_{rt}}{I_t} = \frac{B_t}{Y_t} = \frac{X_e}{Z_t}.$$

Per calcolare la potenza attiva complessiva  $P_t$  del circuito si usano le espressioni:

$$P_t = VIt \cos \varphi = VIa_t = V(Ia_1 + Ia_2 + Ia_3) = P_1 + P_2 + P_3,$$

od anche:

$$P_t = I_t^2 R_t = I_t^2 (R_1 + R_2 + R_3) = P_1 + P_2 + P_3,$$

da cui si deduce che la potenza attiva complessiva di un circuito di impedenze in parallelo è data dalla somma aritmetica (come per le impedenze in serie) delle potenze attive di ciascun ramo.

La potenza reattiva complessiva  $Q_t$  è invece data da:

$$Q_t = VIt \sin \varphi = VIr_t = V(Ir_1 - Ir_2 + Ir_3) = Q_1 - Q_2 + Q_3,$$

oppure:

$$Q_t = I_t^2 X_t = I_t^2 (X_{L1} - X_c + X_{L2}) = Q_1 - Q_2 + Q_3,$$

da cui si deduce che la potenza reattiva complessiva di un circuito di impedenze in parallelo è data dalla somma algebrica (come per le impedenze in serie) delle potenze reattive dei singoli rami.

La potenza apparente complessiva  $A_t$  si calcola con le espressioni:

$$A_t = VIt \quad \text{oppure} \quad A_t = I_t^2 Z_t \quad \text{oppure} \quad A_t = \sqrt{P_t^2 + Q_t^2}.$$

Risolviamo ora lo stesso circuito di figura 8.30 con il metodo dei numeri complessi.

In forma simbolica si può scrivere:

$$\bar{Z}_1 = R_1 + jX_L \quad \bar{Z}_2 = R_2 - jX_c \quad \bar{Z}_3 = R_3 + j\omega.$$

Per calcolare la corrente totale  $I_t$  del circuito si può operare in due modi: o facendo il rapporto tra la tensione applicata  $V$  e l'impedenza totale  $Z_t$ , oppure sommando vettorialmente le correnti di ciascun ramo.

Nel primo caso occorre calcolare l'impedenza complessiva  $Z_t$ .

Dalle tre impedenze si ricavano le rispettive ammettenze, conduttanze e suscettanze:

$$\bar{Y}_1 = \frac{1}{\bar{Z}_1} = \frac{1}{R_1 + jX_L} = \frac{R_1 - jX_L}{Z_1^2} = \frac{R_1}{Z_1^2} - j \frac{X_L}{Z_1^2} = G_1 - jB_L,$$

analogamente:

$$\bar{Y}_2 = G_2 + jB_c \quad \text{e} \quad \bar{Y}_3 = G_3 + j\omega,$$

e quindi l'ammettenza totale  $Y_t$ :

$$\overline{Y_t} = \overline{Y_1} + \overline{Y_2} + \overline{Y_3} = G_1 - jB_L + G_2 + jB_C + G_3 = G_1 + G_2 + G_3 + j(B_C - B_L) = G_t \pm jB_t.$$

L'impedenza complessiva  $Z_t$  risulta perciò:

$$\overline{Z_t} = \frac{1}{\overline{Y_t}} = \frac{1}{G_t \pm jB_t} = \frac{G_t \pm jB_t}{Y_t^2} = \frac{G_t}{Y_t^2} \pm j \frac{B_t}{Y_t^2} = Re \pm jXe,$$

dove  $Re$  e  $Xe$  sono rispettivamente la resistenza e la reattanza equivalenti serie del circuito dato.

La corrente totale viene definita dal numero complesso:

$$\overline{I_t} = \frac{V}{Z_t} = V \cdot \overline{G_t} = V(G_t \pm jB_t) = Iat \pm jIrt,$$

da cui si ricava il modulo della corrente e il suo argomento riferito alla  $V$ , ossia lo sfasamento tra la  $I_t$  e la  $V$  che può risultare in anticipo o in ritardo oppure nullo a seconda che il termine immaginario è positivo o negativo oppure nullo.

Nel secondo caso, note le ammettenze di ciascun ramo, si calcolano le correnti fluenti in esse:

$$\begin{aligned}\overline{I_1} &= V \cdot \overline{Y_1} = V(G_1 - jB_L), \\ \overline{I_2} &= V \cdot \overline{Y_2} = V(G_2 + jB_C), \\ \overline{I_3} &= V \cdot \overline{Y_3} = V(G_3 + j0),\end{aligned}$$

da cui, volendo, si ricavano i rispettivi moduli e il loro argomento riferito alla  $V$  applicata.

La corrente totale è data dalla somma vettoriale delle tre correnti parziali:

$$\overline{I_t} = \overline{I_1} + \overline{I_2} + \overline{I_3} = V(G_1 + G_2 + G_3 - jB_L + jB_C) = V(G_t \pm jB_t) = Iat \pm jIrt,$$

che è lo stesso complesso ricavato nel primo caso.

Dal complesso della corrente o della ammettenza si ottiene il complesso della potenza apparente  $At$ :

$$\overline{At} = V\overline{I_t} = V(Iat \pm jIrt) = V Iat \pm jV Irt = Pt \pm jQt,$$

oppure:

$$\overline{At} = V^2 \overline{Y_t} = V^2(G_t \pm jB_t) = V^2 G_t \pm jV^2 B_t = Pt \pm jQt,$$

dove il termine reale rappresenta la potenza attiva e il termine immaginario la potenza reattiva.

### c) Circuiti con impedenze in collegamento misto

Come le resistenze, anche le impedenze possono essere collegate in serie-parallelo o in parallelo-serie.

Nel primo caso si calcola prima la serie e poi il parallelo, nel secondo caso si calcola prima il parallelo e poi la serie, facendo uso evidentemente dei procedimenti suesposti relativi ai collegamenti in serie e ai collegamenti in parallelo.

#### Esempi numerici

1. Un circuito costituito da tre impedenze in parallelo è alimentato alla tensione  $V$  di 47,4 volt. La prima impedenza è formata dalla resistenza  $R_1$  di 4 ohm e dalla reattanza capacitiva  $X_C$  di 3 ohm, la seconda è una resistenza ohmica  $R_2$  di 5 ohm e la terza è costituita da una resistenza ohmica  $R_3$  di 6 ohm e da una reattanza induttiva  $X_L$  di 8 ohm.

Calcolare la corrente totale, la corrente in ciascuna impedenza, lo sfasamento complessivo, la resistenza  $R_e$  e la reattanza  $X_e$  equivalenti dell'intero circuito, con il metodo geometrico e con il metodo simbolico.

#### Soluzione

##### 1) Metodo geometrico

Calcolo delle impedenze di ciascun ramo del parallelo:

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_C^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ ohm ,}$$

$$Z_2 = R_2 = 5 \text{ ohm ,}$$

$$Z_3 = \sqrt{R_3^2 + X_L^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ ohm .}$$

Calcolo delle conduttanze di ciascun ramo e totale:

$$G_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{4}{5^2} = 0,16 \text{ siemens ,}$$

$$G_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ siemens ,}$$

$$G_3 = \frac{R_3}{Z_3^2} = \frac{6}{10^2} = 0,06 \text{ siemens .}$$

$$G_t = G_1 + G_2 + G_3 = 0,16 + 0,2 + 0,06 = 0,42 \text{ siemens .}$$

Calcolo delle suscettanze di ciascun ramo e totale:

$$B_1 = \frac{X_C}{Z_1^2} = \frac{3}{5^2} = 0,12 \text{ siemens ,} \quad (\text{capacitiva})$$

$$B_2 = \text{zero ,}$$

$$B_3 = \frac{X_L}{Z_3^2} = \frac{8}{10^2} = 0,08 \text{ siemens,} \quad (\text{induttiva})$$

$$Bt = Bc - B_L = 0,12 - 0,08 = 0,04 \text{ siemens.} \quad (\text{capacitiva})$$

Calcolo dell'ammontenza totale  $Yt$ :

$$Yt = \sqrt{Gt^2 + Bt^2} = \sqrt{0,42^2 + 0,04^2} = 0,422 \text{ siemens.}$$

Calcolo dell'impedenza  $Zt$  dell'intero circuito:

$$Zt = \frac{1}{Yt} = \frac{1}{0,422} = 2,37 \text{ ohm.}$$

Calcolo della corrente totale  $It$  e in ciascun ramo:

$$It = \frac{V}{Zt} = \frac{47,4}{2,37} = 20 \text{ ampere.}$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{47,4}{5} = 9,48 \text{ A,}$$

$$(\text{sfasata in anticipo: } \cos \varphi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{4}{5} = 0,8; \text{ sen } \varphi_1 = 0,6),$$

$$I_2 = \frac{V}{Z_2} = \frac{47,4}{5} = 9,48 \text{ A in fase,}$$

$$I_3 = \frac{V}{Z_3} = \frac{47,4}{10} = 4,74 \text{ A,}$$

$$(\text{sfasata in ritardo: } \cos \varphi_3 = \frac{R_3}{Z_3} = \frac{6}{10} = 0,6; \text{ sen } \varphi_3 = 0,8).$$

La somma geometrica delle tre correnti deve corrispondere alla corrente totale. Infatti:

$$\begin{aligned} It &= \sqrt{(I_2 + I_1 \cos \varphi_1 + I_3 \cos \varphi_3)^2 + (I_1 \sin \varphi_1 - I_3 \sin \varphi_3)^2} = \\ &= \sqrt{(9,48 + 9,48 \cdot 0,8 + 4,74 \cdot 0,6)^2 + (9,48 \cdot 0,6 - 4,74 \cdot 0,8)^2} = \\ &= 20 \text{ ampere.} \end{aligned}$$

Calcolo dello sfasamento totale:

$$\cos \varphi_t = \frac{Gt}{Yt} = \frac{0,42}{0,422} = 0,991.$$

Calcolo della resistenza  $Re$  equivalente e della reattanza  $Xe$  equivalente dell'intero circuito:

$$Re = \frac{Gt}{Yt^2} = \frac{0,42}{0,422^2} = 2,35 \text{ ohm,}$$

$$X_e = \frac{Bt}{Yt^2} = \frac{0,04}{0,422^2} = 0,226 \text{ ohm ,}$$

per verifica:

$$\cos \varphi_r = \frac{Re}{Zt} = \frac{2,35}{2,37} = 0,991 .$$

## 2) Metodo simbolico

Le tre impedenze in forma simbolica sono:

$$\bar{Z}_1 = R_1 - jX_C = 4 - j3 , \quad \bar{Z}_2 = R_2 = 5 , \quad \bar{Z}_3 = R_3 + jX_L = 6 + j8 ,$$

e le loro rispettive ammettenze risultano:

$$\bar{Y}_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} + j \frac{X_C}{Z_1^2} = \frac{4}{25} + j \frac{3}{25} = 0,16 + j0,12 ,$$

$$\bar{Y}_2 = \frac{1}{R_2} = \frac{1}{5} = 0,2 ,$$

$$\bar{Y}_3 = \frac{R_3}{Z_3^2} - j \frac{X_L}{Z_3^2} = \frac{6}{100} - j \frac{8}{100} = 0,06 - j0,08 .$$

Le correnti nei singoli rami sono definite perciò da:

$$\bar{I}_1 = V \cdot \bar{Y}_1 = 47,4 \left( \frac{4}{25} + j \frac{3}{25} \right) = 7,584 + j5,688 ,$$

che risulta in anticipo sulla  $V$  perché il termine immaginario è positivo.

$$\bar{I}_2 = V \cdot \bar{Y}_2 = 47,4 \cdot \frac{1}{5} = 9,48 ,$$

che risulta in fase con la  $V$  perché il termine immaginario è nullo.

$$\bar{I}_3 = V \cdot \bar{Y}_3 = 47,4 \left( \frac{6}{100} - j \frac{8}{100} \right) = 2,844 - j3,792 ,$$

che risulta in ritardo sulla  $V$  perché il termine immaginario è negativo.

La corrente totale è perciò definita da:

$$\bar{I} = \bar{I}_1 + \bar{I}_2 + \bar{I}_3 = 7,584 + j5,688 + 9,48 + 2,844 - j3,792 = 19,908 + j1,896 ,$$

che risulta in anticipo sulla  $V$  perché il termine immaginario è positivo.

Per verifica, essendo l'ammettenza totale data da:

$$\bar{Y}_T = \bar{Y}_1 + \bar{Y}_2 + \bar{Y}_3 = 0,16 + j0,12 + 0,2 + 0,06 - j0,08 = 0,42 + j0,04 ,$$

la corrente totale risulta:

$$\bar{I} = V \cdot \bar{Y}_T = 47,4 (0,42 + j0,04) = 19,908 + j1,896 .$$

L'impedenza totale e quindi la resistenza e la reattanza equivalenti del circuito, vengono definite da:

$$\bar{Z}_t = \frac{1}{Y_t} = \frac{1}{0,42 + j0,04} = \frac{0,42 - j0,04}{0,178} = 2,35 - j0,226 ,$$

dove il terminè reale rappresenta il valore della resistenza equivalente  $R_e$  del circuito e il termine immaginario il valore della reattanza equivalente  $X_e$  che risulta prevalentemente capacitiva.

I moduli e gli argomenti delle correnti totale e parziali, nonché il modulo della  $Z_t$ , vengono calcolati come al punto precedente.

2. Due carichi collegati tra loro in parallelo hanno il primo la potenza  $P_1$  di 6 KW a  $\cos \varphi_1 = 0,6$  e il secondo la potenza reattiva  $Q_2$  di 3 KVA a  $\cos \varphi_2 = 0,8$  e sono alimentati alla tensione di 500 V. Calcolare la corrente complessiva in linea e il fattore di potenza complessivo.

#### Soluzione

Occorre calcolare innanzi tutto la potenza  $P_2$  del secondo carico. Dalle tavole trigonometriche si ha, per  $\cos \varphi_2 = 0,8$ ,  $\text{tg } \varphi_2 = 0,75$  e  $\text{sen } \varphi_2 = 0,6$ :

$$P_2 = \frac{Q_2}{\text{tg } \varphi_2} = \frac{3}{0,75} = 4 \text{ KW} .$$

Calcolo della potenza complessiva  $P_t$ :

$$P_t = P_1 + P_2 = 6 + 4 = 10 \text{ KW} .$$

Calcolo della potenza reattiva  $Q_1$  del primo carico. Dalle tabelle trigonometriche si ha, per  $\cos \varphi_1 = 0,6$ ,  $\text{tg } \varphi_1 = 1,33$  e  $\text{sen } \varphi_1 = 0,8$ :

$$Q_1 = P_1 \cdot \text{tg } \varphi_1 = 6 \cdot 1,33 = 7,98 \text{ KVA} .$$

Calcolo della potenza reattiva complessiva  $Q_t$ :

$$Q_t = Q_1 + Q_2 = 7,98 + 3 = 10,98 \text{ KVA} .$$

Calcolo del fattore di potenza complessivo  $\cos \varphi_t$ :

$$\text{tg } \varphi_t = \frac{Q_t}{P_t} = \frac{10,98}{10} = 1,098 \text{ da cui } \cos \varphi_t = 0,67 .$$

Calcolo della corrente totale in linea  $I_t$ :

$$I_t = \frac{P_t}{V \cos \varphi_t} = \frac{10.000}{500 \cdot 0,67} = 29,8 \text{ ampere} .$$

Allo stesso risultato si può pervenire facendo la somma geometrica delle correnti assorbite dai due carichi.

$$I_1 = \frac{P_1}{V \cos \varphi_1} = \frac{6.000}{500 \cdot 0,6} = 20 \text{ ampere} ,$$

$$I_2 = \frac{P_2}{V \cos \varphi_2} = \frac{4.000}{500 \cdot 0,8} = 10 \text{ ampere} .$$

Calcolo delle correnti attive:

$$Ia_1 = I_1 \cos \varphi_1 = 20 \cdot 0,6 = 12 \text{ ampere ,}$$

$$Ia_2 = I_2 \cos \varphi_2 = 10 \cdot 0,8 = 8 \text{ ampere ,}$$

$$Iat = Ia_1 + Ia_2 = 12 + 8 = 20 \text{ ampere .}$$

Calcolo delle correnti reattive:

$$Ir_1 = I_1 \sin \varphi_1 = 20 \cdot 0,8 = 16 \text{ ampere ,}$$

$$Ir_2 = I_2 \sin \varphi_2 = 10 \cdot 0,6 = 6 \text{ ampere ,}$$

$$Irt = Ir_1 + Ir_2 = 16 + 6 = 22 \text{ ampere .}$$

Calcolo della corrente totale  $I_t$ :

$$I_t = \sqrt{Iat^2 + Irt^2} = \sqrt{20^2 + 22^2} = 29,8 \text{ ampere .}$$

Calcolo del fattore di potenza complessivo:

$$\cos \varphi_t = \frac{Iat}{I_t} = \frac{20}{29,8} = 0,67 .$$

Lo stesso esercizio può essere risolto in modo più contenuto con il metodo simbolico. Con le grandezze date, si calcola la potenza apparente totale  $At$  in forma complessa riferendola al vettore della tensione. Poiché le correnti sono entrambe in ritardo sulla  $V$ , si ha:

$$\begin{aligned} \overline{At} &= \overline{A_1} + \overline{A_2} = P_1 + P_2 - j(Q_1 + Q_2) = P_1 + \frac{Q_2}{\operatorname{tg} \varphi_2} - j(P_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + Q_2) = \\ &= 6 + \frac{3}{0,75} - j(6 \cdot 1,33 + 3) = 10 - j 10,98 \text{ in KVA .} \end{aligned}$$

La corrente totale  $I_t$  risulta perciò in forma complessa:

$$\overline{I_t} = \frac{\overline{At}}{V} = \frac{10.000 - j 10.980}{500} = 20 - j 22 ,$$

da cui si deduce che la corrente totale è in ritardo sulla  $V$  e ha per modulo:

$$I_t = \sqrt{Iat^2 + Irt^2} = \sqrt{20^2 + 22^2} = 29,8 \text{ A ,}$$

e per fattore di potenza complessivo:

$$\cos \varphi_t = \frac{Iat}{I_t} = \frac{20}{29,8} = 0,67 .$$

La corrente totale  $I_t$  può essere ottenuta anche facendo la somma delle correnti parziali. Partendo dai dati del problema, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \overline{I_t} &= \overline{I_1} + \overline{I_2} = Ia_1 + Ia_2 - j(Ir_1 + Ir_2) = \frac{P_1}{V} + \frac{Q_2}{V \operatorname{tg} \varphi_2} - j \left( \frac{P_1 \operatorname{tg} \varphi_1}{V} + \frac{Q_2}{V} \right) = \\ &= \frac{6.000}{500} + \frac{3.000}{500 \cdot 0,75} - j \left( \frac{6.000 \cdot 1,332}{500} + \frac{3.000}{500} \right) = 20 - j 22 , \end{aligned}$$

da cui si ricava il modulo e l'argomento riferito alla  $V$ .

## 8.8. CENNI SUL RIFASAMENTO DELLA CORRENTE

Il fattore di potenza, e quindi l'angolo  $\varphi$  di sfasamento tra tensione e corrente, ha un ruolo importantissimo nei circuiti a corrente alternata, in quanto la potenza apparente di un circuito può identificarsi totalmente con la potenza attiva e trasformarsi tutta in lavoro utile, se l'angolo di sfasamento è nullo, ma può anche identificarsi totalmente con la potenza reattiva e non produrre alcun lavoro utile ai fini economici, se l'angolo di sfasamento raggiunge i  $90^\circ$ .

Infatti, un circuito puramente ohmico, per il fatto di essere percorso da una corrente  $I$  in fase con la tensione  $V$  ( $\varphi = 0$ ,  $\cos \varphi = 1$ ,  $\sin \varphi = 0$ ) assorbe una potenza attiva  $P = VI$  e una potenza reattiva  $Q = \text{zero}$ . Ciò vuol dire che esso preleva dal generatore una potenza pari a quella che esso trasforma in lavoro utile, a meno delle perdite di potenza lungo le linee di collegamento che, comunque, sono legate all'intensità della corrente corrispondente alla sola potenza attiva.

Se un carico è invece ohmico-induttivo o ohmico-capacitivo, esso assorbe una corrente apparente  $I$  sfasata di un certo angolo  $\varphi$  sulla tensione  $V$  e richiede dal generatore una potenza attiva  $P = VI \cos \varphi$  e una potenza reattiva  $Q = VI \sin \varphi$ . Quest'ultima non dà lavoro utile ai fini economici, ma tutt'al più serve al funzionamento del carico stesso (come avviene nei motori a corrente alternata, nei trasformatori, ecc.). Il generatore è costretto ad erogare dunque una corrente, e quindi una potenza apparente  $VI$ , maggiore di quella richiesta per il lavoro utile ed anche le linee di collegamento, percorse da una corrente più elevata, provocano maggiori perdite.

Al limite, se un apparecchio assorbisse una corrente in quadratura con la tensione, non produrrebbe alcun lavoro utile, pur richiedendo al generatore una tensione  $V$  e una corrente  $I$  e cioè una potenza  $VI$ .

Da quanto esposto si comprende l'utilità di avere nei circuiti un fattore di potenza attiva il più possibile prossimo all'unità. Di qui il problema del rifasamento degli impianti.

Gli impianti di utilizzazione dell'energia elettrica a corrente alternata sono normalmente costituiti da circuiti ohmici-induttivi, in quanto quasi tutte le apparecchiature e macchine elettriche (relè, motori, trasformatori, linee elettriche, ecc.) possiedono oltre che una resistenza ohmica, una induttanza e quindi una reattanza induttiva, a volte per altro necessaria allo stesso funzionamento dell'apparecchio o macchina elettrica.

Un motore elettrico, per esempio, per funzionare deve produrre un flusso magnetico e perciò deve assorbire dalla linea non solo la corrente in fase con la tensione (corrente attiva), ma anche una corrente magnetizzante, ossia una corrente sfasata di  $90^\circ$  in ritardo sulla tensione di alimentazione (corrente reattiva).

La corrente in fase rappresenta una potenza attiva  $P$  che la macchina trasforma in lavoro utile, mentre la corrente in quadratura rappresenta una poten-

za reattiva  $Q$  che viene alternativamente assorbita e restituita. Per non caricare le linee di trasmissione e gli stessi generatori di una corrente reattiva che provoca solo un aumento delle perdite per effetto termico e nello stesso tempo richiede dal generatore una maggiore potenza apparente, conviene rifasare l'impianto e cioè produrre direttamente presso gli stessi impianti di utilizzazione una potenza reattiva capacitiva  $Q_c$  che, componendosi con la potenza reattiva induttiva  $Q_L$  dell'impianto, riduca la corrente reattiva nelle linee e nel generatore.

Ciò significa diminuire l'angolo di sfasamento tra la corrente apparente di linea e la tensione di alimentazione e cioè aumentare il fattore di potenza.

Il rifasamento della corrente viene ottenuto con i normali condensatori statici, oppure con particolari macchine capaci di assorbire una corrente in anticipo sulla tensione, dette compensatori sincroni od anche condensatori rotanti.

Tra i diversi metodi di rifasamento, scegliamo quello più comunemente adottato e cioè il rifasamento parziale a potenza  $P$  costante, ottenuto con condensatori statici disposti in parallelo al carico da rifasare.

Consideriamo il circuito di figura 8.33. Esso è costituito da un carico  $K$  ohmico-induttivo, avente cioè una potenza attiva  $P$  e una potenza reattiva  $Q_L$  e di conseguenza un fattore di potenza  $\cos \varphi_1$ . Sia  $V$  la tensione di alimentazione.

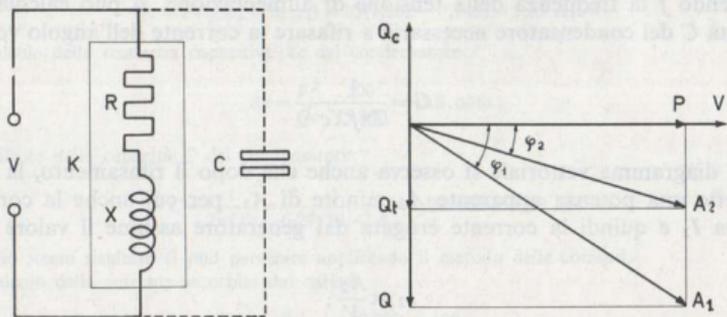


Fig. 8.33 - Rifasamento di un carico ohmico-induttivo a  $P$  costante.

Prima del rifasamento e cioè prima di allacciare il condensatore  $C$ , il carico assorbe dalla linea una potenza apparente  $A_1 = \sqrt{P^2 + Q_L^2}$  (oppure una corrente apparente  $I_1 = \frac{A_1}{V}$ ) sfasata dell'angolo  $\varphi_1$  in ritardo sulla potenza  $P$  (oppure sulla tensione  $V$ ).

Volendo ridurre l'angolo di sfasamento tra la tensione  $V$  di alimentazione e la corrente apparente  $I_1$  di linea da  $\varphi_1$  a  $\varphi_2$ , occorre allacciare in parallelo al carico un condensatore, di opportuna capacità  $C$ , che, assorbendo una poten-

za reattiva  $Q_c$ , riduca la potenza reattiva in linea al valore  $Q_t$  corrispondente, a parità di potenza  $P$ , al nuovo angolo di sfasamento  $\varphi_2$ .

Dal diagramma vettoriale si ha:

$$Q_t = Q_L - Q_c .$$

Essendo:

$$Q_L = P \operatorname{tg} \varphi_1 \quad \text{e} \quad Q_t = P \operatorname{tg} \varphi_2 ,$$

si ha anche:

$$Q_c = Q_L - Q_t = P \operatorname{tg} \varphi_1 - P \operatorname{tg} \varphi_2 = P(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) .$$

Per calcolare dunque la potenza reattiva  $Q_c$  del condensatore si moltiplica la potenza attiva  $P$  del carico per la differenza tra la tangente dell'angolo  $\varphi_1$  di sfasamento del carico e la tangente dell'angolo  $\varphi_2$  che si vuole ottenere dopo il rifasamento.

Ricordando che:

$$X_c = \frac{V^2}{Q_c} ,$$

ed essendo  $f$  la frequenza della tensione di alimentazione, si può calcolare la capacità  $C$  del condensatore necessaria a rifasare la corrente dell'angolo voluto.

$$C = \frac{1}{2\pi f X_c} .$$

Dal diagramma vettoriale si osserva anche che dopo il rifasamento, la linea trasmette una potenza apparente  $A_2$  minore di  $A_1$ , per cui anche la corrente in linea  $I_2$  e quindi la corrente erogata dal generatore assume il valore:

$$I_2 = \frac{A_2}{V} ,$$

minore del valore  $I_1$  che si aveva prima del rifasamento.

Il rifasamento è imposto dalle Società di produzione e di distribuzione dell'energia elettrica agli utenti che assorbono una potenza avente il  $\cos \varphi$  minore di 0,8, mediante l'applicazione di una penalità contrattuale sul costo dell'energia consumata, che può essere computata con la seguente formula:

$$W_p = W_c (1,8 - \cos \varphi) ,$$

dove  $W_c$  è l'energia che l'utente consuma e  $W_p$  è l'energia che ad esso viene addebitata.

Si comprende allora che per un  $\cos \varphi$  uguale o maggiore di 0,8 non figura alcuna penalità, e l'utente non è tenuto ad effettuare alcun rifasamento. Per  $\cos \varphi$  inferiore a 0,8, la penalità aumenta il costo dell'energia realmente consumata del 10 % per ogni decimo in meno del fattore di potenza, per compensare appunto le maggiori perdite di potenza elettrica nelle linee di trasmissione, nei trasformatori e nei generatori e per la maggiore potenza apparente che gli stessi generatori devono produrre.

### Esempio numerico

Un carico della potenza di 10 KW a  $\cos \varphi_1 = 0,6$  è alimentato alla tensione di 500 V con frequenza 50 Hz.

Calcolare il valore della capacità da disporre in parallelo al carico per ottenere il rifasamento a potenza costante a  $\cos \varphi_2 = 0,8$ .

### Soluzione

Dalle tavole trigonometriche:

$$\text{per } \cos \varphi_1 = 0,6 \quad \text{si ricava } \operatorname{tg} \varphi_1 = 1,332,$$

$$\text{per } \cos \varphi_2 = 0,8 \quad \text{si ricava } \operatorname{tg} \varphi_2 = 0,749.$$

Calcolo della potenza reattiva  $Q_c$  che deve assorbire il condensatore:

$$Q_c = P(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) = 10(1,332 - 0,749) = 5,83 \text{ KVAR}$$

Calcolo della reattanza capacitiva  $X_c$  del condensatore:

$$X_c = \frac{V^2}{Q_c} = \frac{500^2}{5,830} = 42,8 \text{ ohm}.$$

Calcolo della capacità  $C$  del condensatore:

$$C = \frac{1}{2\pi f X_c} = \frac{1}{6,28 \cdot 50 \cdot 42,8} = 0,000069 \text{ F} = 69 \mu\text{F}.$$

Allo stesso risultato si può pervenire applicando il metodo delle correnti.

Calcolo della corrente assorbita dal carico:

$$I = \frac{P}{V \cos \varphi_1} = \frac{10.000}{500 \cdot 0,6} = \frac{100}{3} \text{ ampere}.$$

La corrente reattiva  $I_c$  che deve assorbire il condensatore è:

$$\begin{aligned} I_c &= I_a(\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) = I \cos \varphi_1 (\operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} \varphi_2) = \\ &= \frac{100}{3} \cdot 0,6 (1,332 - 0,749) = \frac{100}{3} \cdot 0,6 \cdot 0,583 = 11,66 \text{ ampere}. \end{aligned}$$

La reattanza del condensatore è allora:

$$X_c = \frac{V}{I_c} = \frac{500}{11,66} = 42,8 \text{ ohm},$$

da cui si ricava il valore della capacità  $C$  del condensatore.

## 8.9. L'EFFETTO PELLICOLARE NEI CONDUTTORI A CORRENTE ALTERNATA

Abbiamo accennato al paragrafo 3.1. che la resistenza elettrica di un conduttore aumenta con l'aumentare della frequenza della corrente che lo percorre.

Ciò è dovuto al fatto che anche nei conduttori si generano delle correnti parassite che obbligano la corrente a portarsi alla superficie del conduttore stesso.

Infatti (v. parag. 7.2.), il campo magnetico generato dalla corrente nell'interno di un conduttore cilindrico è nullo sull'asse e cresce linearmente lungo il raggio, per poi diminuire all'esterno.

Nei conduttori magnetici il flusso magnetico interno è molto più intenso che non nei conduttori non magnetici, a causa della loro maggiore permeabilità.

Supponendo che il conduttore sia formato da un insieme di tanti piccoli fili, è evidente che i filetti centrali sono circondati da un flusso magnetico notevolmente maggiore rispetto ai filetti esterni.

Se la corrente che percorre il conduttore è continua, il flusso è costante e non provoca alcun effetto sulla corrente.

Se invece questa è alternata, il flusso che si concatena con i filetti produce una f.e.m. indotta e quindi una corrente indotta (corrente parassita), che è maggiore nei filetti interni e minore in quelli esterni.

Tale corrente contrasta, per la legge di Lenz, le variazioni della corrente principale, e, come abbiamo detto a proposito dei circuiti induttivi, determina una reattanza induttiva maggiore per i filetti interni che non per quelli esterni.

La corrente tende pertanto a portarsi nelle zone di minore impedenza e cioè verso la superficie del conduttore.

La reattanza è poi proporzionale alla frequenza, per cui più alta è la frequenza e maggiore è l'addensamento della corrente verso la superficie del conduttore.

È questo *l'effetto pellicolare* o *della pelle*, che comporta quindi una ineguale ripartizione della corrente nella sezione del conduttore e quindi un aumento di resistenza, perché in effetti è diminuita la sezione utile del conduttore stesso.

Infatti in questi casi un conduttore tubolare è equivalente ai fini della resistenza, ad un conduttore cilindrico massiccio, avente lo stesso diametro esterno.

L'effetto è praticamente trascurabile nei conduttori non magnetici percorsi da corrente a frequenza industriale (40-60 Hz). È invece considerevole per le alte frequenze e specialmente nei conduttori di bassa resistività elettrica e di alta permeabilità magnetica.

All'aumento di resistenza per l'effetto pellicolare corrisponde evidentemente un aumento della dissipazione di energia per effetto Joule.

In pratica la resistenza effettiva  $R$  di un conduttore percorso da corrente ad alta frequenza, viene determinata dividendo la potenza  $P$  dissipata in calore

nel conduttore stesso per il quadrato del valore efficace  $I$  della corrente che lo percorre.

## 8.10. I FENOMENI DI AUTOINDUZIONE E DI MUTUA INDUZIONE IN CORRENTE ALTERNATA

Il valore medio della f.e.m.  $E_1$  di autoinduzione ed  $E_2$  di mutua induzione si calcola, come abbiamo visto al paragrafo 7.11., con l'espressione generale:

$$E = \frac{\Delta\Phi_c}{\Delta t},$$

oppure con le espressioni:

$$E_1 = -L_1 \frac{\Delta I_1}{\Delta t} \quad \text{e} \quad E_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t},$$

che sono valide qualunque sia la legge di variazione del flusso magnetico  $\Phi$  o della corrente di eccitazione  $I$ , purché tali variazioni vengano considerate in un tempuscolo  $\Delta t$ .

In corrente alternata, proprio per le precise leggi di variazione delle grandezze sinusoidali, è possibile esprimere il valore medio e perciò anche il valore efficace delle f.e.m. indotte con altre espressioni analitiche che rispondono più da vicino alle esigenze pratiche di calcolo delle macchine funzionanti in corrente alternata.

Se consideriamo che in un periodo  $T$ , il flusso varia per due volte da zero al valore massimo  $\Phi_{mx}$  e per due volte dal valore  $\Phi_{mx}$  a zero, la variazione di flusso corrisponde ad un periodo  $T$  è  $4\Phi_{mx}$ .

Il valore medio della f.e.m. indotta in ogni spira è allora:

$$E_m = \frac{4\Phi_{mx}}{T} = 4f\Phi_{mx}.$$

Ricordando che il rapporto tra il valore efficace  $E$  e il valore medio  $E_m$  è dato dal fattore di forma che vale 1,11, si ha che il valore efficace  $E$  della f.e.m. indotta in ogni spira è:

$$E = 4,44 f\Phi_{mx}.$$

Nell'avvolgimento primario, composto di  $N_1$  spire collegate in serie, si genera perciò una f.e.m. totale di autoinduzione che assume il valore efficace  $E_1$ :

$$E_1 = 4,44 N_1 f\Phi_{mx},$$

mentre nell'avvolgimento secondario di  $N_2$  spire la f.e.m. totale di mutua induzione assume il valore efficace  $E_2$ :

$$E_2 = 4,44 N_2 f \Phi m x .$$

È evidente che le due f.e.m. stanno ancora tra loro nel rapporto diretto dei numeri delle spire dei rispettivi circuiti.

### 8.11. CENNI SULLE CORRENTI TRIFASI

Un sistema di tre correnti alternate generate da tre f.e.m. sinusoidali aventi la stessa ampiezza e la stessa frequenza e spostate di fase l'una rispetto all'altra di  $\frac{1}{3}$  di periodo e cioè di  $120^\circ$  prende il nome di *sistema trifase*.

Consideriamo tre spire uguali disposte reciprocamente a  $120^\circ$  (fig. 8.34) e ruotanti attorno al loro asse con velocità uguale e costante in un campo magnetico uniforme.

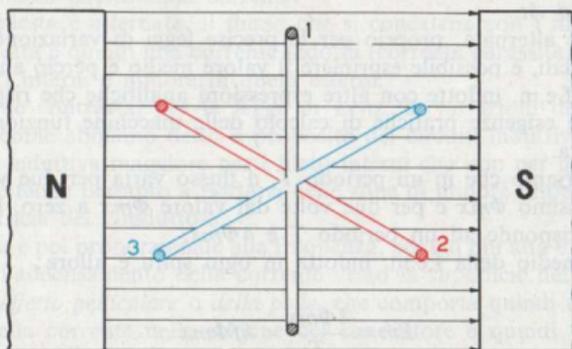


Fig. 8.34 - Tre spire sfasate reciprocamente nello spazio di  $120^\circ$  rotanti in un campo magnetico uniforme.

Al paragrafo 8.1. abbiamo visto che in ciascuna spira si genera una f.e.m. sinusoidale. Essendo però le tre spire spostate nello spazio di  $120^\circ$  l'una rispetto all'altra, è evidente che le tre f.e.m. indotte risultano sfasate nel tempo di  $120^\circ$  e sono rappresentate da tre sinusoidi uguali sfasate di  $\frac{1}{3}$  periodo, oppure da tre vettori uguali spostati tra loro di  $120^\circ$ , come rappresentato in figura 8.35.

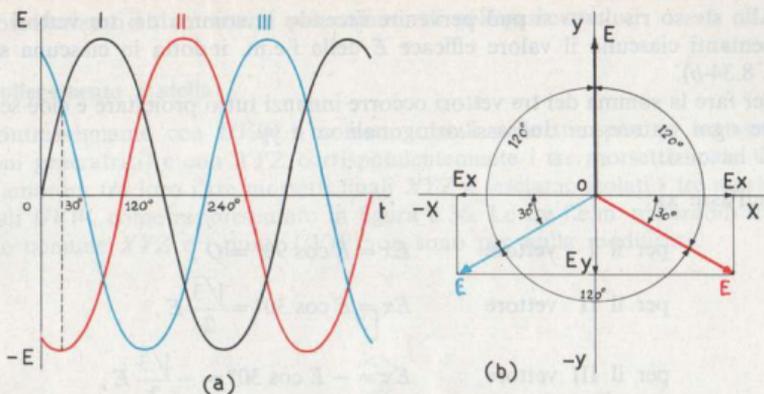


Fig. 8.35 - Rappresentazione del sistema trifase.

È facile constatare:

- 1) nell'istante in cui due f.e.m. hanno lo stesso segno, la terza f.e.m. ha segno opposto (oppure mentre una f.e.m. è positiva, una è zero e l'altra è negativa);
- 2) la somma algebrica dei valori istantanei delle tre f.e.m. è, in ciascun istante, uguale a zero.

Consideriamo un istante qualsiasi, per esempio l'istante corrispondente ai  $30^\circ$  dall'inizio del periodo della prima grandezza.

Il valore istantaneo della prima sinusoide è:

$$e_1 = Blv \sin 30^\circ = \frac{1}{2} Blv .$$

Il valore istantaneo della seconda sinusoide è:

$$e_2 = Blv \sin 270^\circ = -Blv .$$

Il valore istantaneo della terza sinusoide è:

$$e_3 = Blv \sin 150^\circ = Blv \sin 30^\circ = \frac{1}{2} Blv .$$

Il valore somma dei tre valori istantanei è dunque:

$$e = e_1 + e_2 + e_3 = \frac{1}{2} Blv - Blv + \frac{1}{2} Blv = 0 .$$

Allo stesso risultato si può pervenire facendo la somma dei tre vettori rappresentanti ciascuno il valore efficace  $E$  della f.e.m. indotta in ciascuna spira (fig. 8.34-b).

Per fare la somma dei tre vettori occorre innanzi tutto proiettare e cioè scomporre ogni vettore sui due assi ortogonali  $xx$  e  $yy$ .

Si ha così:

a) sull'asse  $xx$ :

$$\text{per il I vettore} \quad E_x = E \cos 90^\circ = 0,$$

$$\text{per il II vettore} \quad E_x = E \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} E,$$

$$\text{per il III vettore} \quad E_x = -E \cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} E,$$

per cui la somma delle proiezioni dei tre vettori sull'asse  $xx$  è:

$$0 + \frac{\sqrt{3}}{2} E - \frac{\sqrt{3}}{2} E = 0,$$

b) sull'asse  $yy$ :

$$\text{per il I vettore} \quad E_y = E \sin 90^\circ = E,$$

$$\text{per il II vettore} \quad E_y = -E \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} E,$$

$$\text{per il III vettore} \quad E_y = -E \sin 30^\circ = -\frac{1}{2} E,$$

per cui la somma delle proiezioni dei tre vettori sull'asse  $yy$  è:

$$E - \frac{1}{2} E - \frac{1}{2} E = 0.$$

Quindi la somma dei tre vettori è nulla.

Più brevemente, in forma simbolica, si può scrivere:

$$\begin{aligned} \overline{E_t} = \overline{E_1} + \overline{E_2} + \overline{E_3} &= jE + E \cos(-30^\circ) + jE \sin(-30^\circ) + E \cos 210^\circ + \\ &+ jE \sin 210^\circ = jE + \frac{\sqrt{3}}{2} E - j \frac{1}{2} E - \frac{\sqrt{3}}{2} E - j \frac{1}{2} E = \text{zero}. \end{aligned}$$

Le tre f.e.m.  $E$  considerate separatamente costituiscono tre distinti sistemi monofasi, ma se collegati fra loro in opportuni modi costituiscono un sistema trifase.

Consideriamo i due sistemi più comuni di collegamento:

### a) Collegamento a stella

Contrassegniamo con  $UVW$  i morsetti iniziali delle tre spire (o matasse o sezioni generatrici) e con  $XYZ$  corrispondentemente i tre morsetti finali. Colleghiamo ora tra loro i tre morsetti finali  $XYZ$  e lasciamo isolati i tre morsetti iniziali  $UVW$ , come rappresentato in figura 8.36. Le tre f.e.m. misurabili fra il punto comune  $XYZ$  e i punti  $UVW$  non sono per nulla modificate.

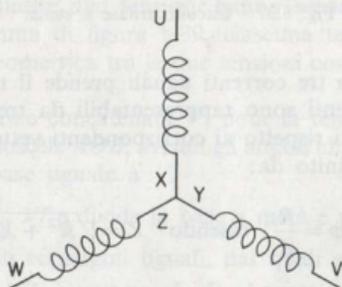


Fig. 8.36 - Collegamento a stella.

Questo modo di connessione delle tre sezioni generatrici prende il nome di *collegamento a stella* o *collegamento aperto*.

Se ora i tre morsetti  $UVW$  e il centro stella  $O$  vengono allacciati a quattro fili che alimentano tre impedenze  $Z$  uguali, pure connesse a stella (fig. 8.37), si ha una circolazione di corrente che, se si suppone nulla l'impedenza delle matasse del generatore e dei conduttori, è in ogni impedenza  $Z$  e nei tre circuiti corrispondenti:

$$I = \frac{E}{Z},$$

mentre nel filo  $00_1$  la corrente  $I_0$  è data dalla somma vettoriale o geometrica delle tre correnti  $I$ .

Essendo però la somma delle f.e.m. uguale a zero ed essendo uguali tra loro le impedenze  $Z$  anche le tre correnti  $I$  risultano tra loro uguali e spostate di  $120^\circ$  l'una rispetto all'altra, per cui nel filo  $00_1$  detto *filo neutro*, la corrente è nulla.

Pertanto tale filo potrebbe anche essere soppresso, riducendo il sistema a tre fili soltanto.

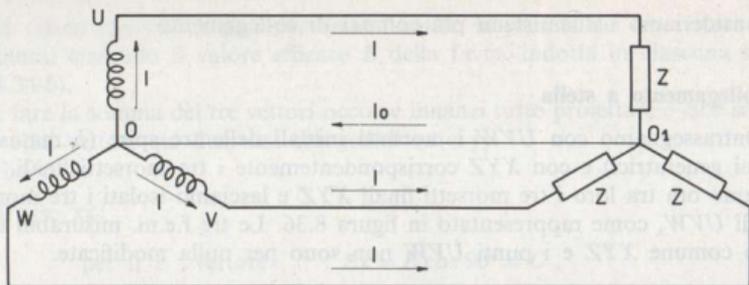


Fig. 8.37 - Circuito trifase a stella.

Il sistema formato da tre correnti uguali prende il nome di *sistema trifase equilibrato* e le tre correnti sono rappresentabili da tre vettori uguali, sfasati di  $120^\circ$  fra loro e ruotati rispetto ai corrispondenti vettori delle tensioni di un angolo  $\varphi$  (fig. 8.38) definito da:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad \text{essendo} \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2},$$

in ritardo o in anticipo a seconda che la reattanza  $X$  è induttiva o capacitiva.

Logicamente un sistema equilibrato, e cioè un sistema di tre correnti uguali, determina tre cadute di tensione uguali sia nelle sezioni del generatore che nei tre fili di linea, supposti tra loro uguali, per cui anche le tre tensioni  $V_f$  misurabili ai morsetti di ciascuna sezione generatrice o le tensioni misurabili ai morsetti di ciascuna impedenza di carico, risultano tra loro uguali.

Un sistema di tre tensioni uguali sfasate di  $120^\circ$  prende il nome di *sistema trifase simmetrico* (fig. 8.39).

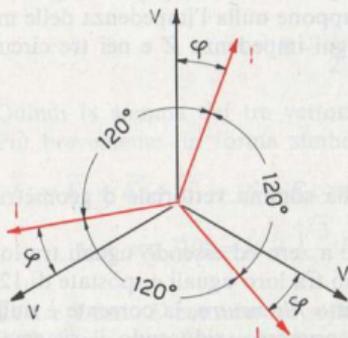


Fig. 8.38 - Sistema trifase equilibrato.

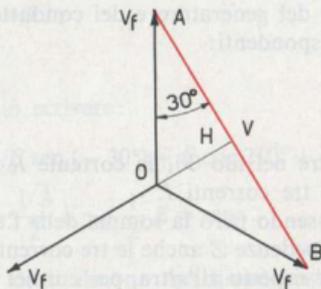


Fig. 8.39 - Sistema trifase simmetrico.

Nel collegamento a stella osserviamo:

- a) le correnti che percorrono i fili di linea, dette *correnti di linea I*, sono uguali a quelle che percorrono le sezioni generatrici, dette *correnti di fase I<sub>f</sub>*, per cui:

$$I = I_f,$$

- b) le tensioni tra due fili di linea, dette *tensioni concatenate V*, non possono evidentemente coincidere con il valore delle tensioni di fase *V<sub>f</sub>*, ma sono le risultanti di due tensioni di fase *V<sub>f</sub>*.

Considerando che queste due tensioni hanno senso opposto, come si può constatare dal diagramma di figura 8.39, ciascuna tensione concatenata *V* è data dalla differenza geometrica tra le due tensioni componenti *V<sub>f</sub>*, dette *anche tensioni stellari*.

Il valore della tensione concatenata *V*, nota la tensione di fase *V<sub>f</sub>*, si può ricavare dal triangolo isoscele *AOB*, avente gli angoli alla base di 30°, i lati uguali costituiti da *V<sub>f</sub>* e la base uguale a *V*.

L'altezza *OH* vale  $\frac{1}{2} V_f$  e divide la base a metà e perciò divide il triangolo isoscele in due triangoli rettangoli uguali, dai quali si ricava:

$$V = 2 \sqrt{V_f^2 - \left(\frac{1}{2} V_f\right)^2} = 2 \sqrt{\frac{3}{4} V_f^2} = \sqrt{3} V_f,$$

oppure:

$$V = 2 V_f \cos 30^\circ = 2 V_f \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} V_f.$$

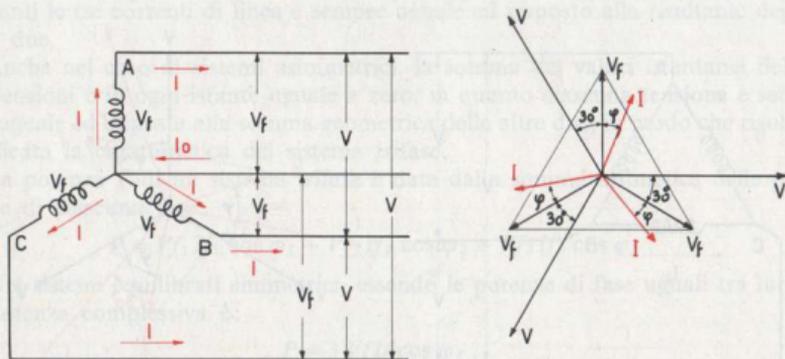


Fig. 8.40 - Le tensioni e le correnti del sistema trifase a stella e relativo diagramma vettoriale.

Si ha così che tra il valore efficace  $V$  delle tensioni concatenate e il valore efficace  $V_f$  delle tensioni di fase sussiste la relazione:

$$V = 1,73 V_f \text{ e viceversa } V_f = 0,578 V.$$

Le tre tensioni concatenate  $V$  costituiscono anch'esse un sistema trifase e sono rappresentabili con una terna di vettori uguali, sfasati tra loro di  $120^\circ$ , ma in anticipo di fase di  $30^\circ$  rispetto ai vettori delle tensioni di fase  $V_f$  come è rappresentato (fig. 8.40) nel diagramma vettoriale delle tensioni e delle correnti di un sistema a stella con carico equilibrato induttivo.

Si osserva infine che usufruendo anche del filo neutro si possono ottenere in linea altre tre tensioni uguali alle tensioni di fase, misurabili tra lo stesso filo neutro e un filo qualsiasi della terna.

### b) Collegamento a triangolo

Immaginiamo ora di collegare le tre spire generatrici come indicato in figura 8.41. Si ottiene il cosiddetto *collegamento a triangolo* o *collegamento chiuso*.

La somma delle tre f.e.m.  $E$  nel circuito chiuso è ovviamente nulla e pertanto non si ha in esso corrente di circolazione.

Se però ai nodi  $A$ ,  $B$  e  $C$  e cioè ai vertici del triangolo, vengono allacciati tre fili che alimentano tre impedenze  $Z$  uguali, collegate, per esempio, a stella, come nel caso precedente, si ha una corrente in ogni sezione del generatore, detta *corrente di fase*  $I_f$  e una corrente in ciascun filo di linea, detta *corrente di linea*  $I$ .

È evidente che le tensioni concatenate  $V$  sono uguali alle tensioni di fase  $V_f$ :

$$V = V_f,$$

mentre le correnti di linea  $I$  sono, in ogni istante, uguali alla differenza geometrica tra le due correnti di fase  $I_f$  che percorrono due sezioni generatrici.

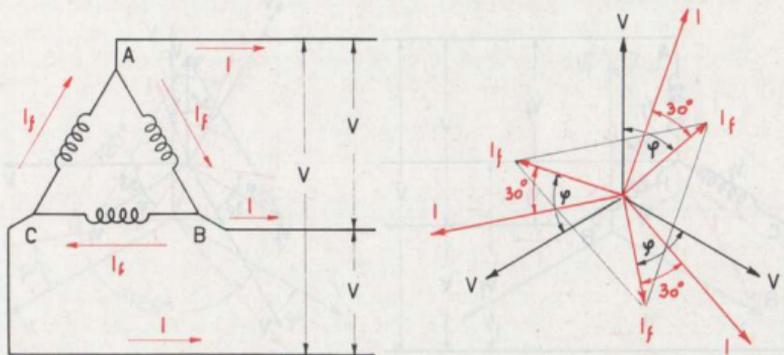


Fig. 8.41 - Le correnti e le tensioni del sistema trifase a triangolo e relativo diagramma vettoriale.

Come per le tensioni nel caso del sistema a stella, così per le correnti di un sistema a triangolo valgono le relazioni:

$$I = \sqrt{3} I_f = 1,73 I_f \quad \text{e viceversa} \quad I_f = 0,578 I.$$

Le tre correnti di linea  $I$  sono quindi rappresentabili con tre vettori uguali sfasati tra loro di  $120^\circ$  e spostati in anticipo di  $30^\circ$  sui vettori delle correnti di fase  $I_f$ , come rappresentato dal diagramma vettoriale di figura 8.41.

Nella pratica i circuiti equilibrati si hanno solamente nei casi di alimentazione dei motori o degli apparecchi elettrici trifasi opportunamente costruiti e cioè aventi le tre impedenze di fase identiche.

In tutti gli altri casi e soprattutto negli impianti di distribuzione dell'energia elettrica, i carichi sulle tre fasi sono tra loro diversi e perciò assorbono correnti di intensità e di fase diversa.

Tali correnti provocano nei fili di linea e nelle fasi del generatore cadute di tensione diverse, per cui anche le tre tensioni di alimentazione risultano disuguali tra loro.

Si ottengono così i sistemi trifasi asimmetrici e squilibrati.

In realtà nella pratica gli squilibri dei carichi sono contenuti entro limiti ristretti, per cui la disimmetria tra le tensioni risulta piccola così da poterla trascurare. Si vengono ad avere cioè i sistemi trifasi simmetrici squilibrati.

Se gli squilibri non sono forti i generatori possono essere avvolti a triangolo, mentre se lo squilibrio è forte, come nel caso degli impianti di illuminazione privata dove le lampade si accendono e si spengono indipendentemente le une dalle altre, si ricorre al collegamento a stella a quattro fili: le lampade si inseriscono tra i singoli fili di fase e il filo neutro.

Nel caso di sistemi squilibrati, anche se le correnti di linea sono diverse di intensità e di fase, si ha sempre in ogni istante che la somma dei valori istantanei delle correnti è uguale a zero. Si ha cioè che ognuno dei tre vettori rappresentanti le tre correnti di linea è sempre uguale ed opposto alla risultante degli altri due.

Anche nel caso di sistemi asimmetrici, la somma dei valori istantanei delle tre tensioni è in ogni istante uguale a zero, in quanto ciascuna tensione è sempre uguale ed opposta alla somma geometrica delle altre due, in modo che risulta verificata la caratteristica del sistema trifase.

La potenza  $P$  di un sistema trifase è data dalla somma aritmetica delle potenze di ciascuna fase:

$$P = V f_1 I f_1 \cos \varphi_1 + V f_2 I f_2 \cos \varphi_2 + V f_3 I f_3 \cos \varphi_3 .$$

Nei sistemi equilibrati simmetrici, essendo le potenze di fase uguali tra loro, la potenza complessiva è:

$$P = 3 V f I f \cos \varphi_f ,$$

dove  $\varphi_f$  è l'angolo di sfasamento tra la tensione di fase  $V f$  e la corrente di fase  $I f$ .

Volendo sostituire ai valori di fase i corrispondenti valori concatenati o di linea, si ha:

a) per il sistema a stella:

$$\text{Essendo } I = I_f \text{ e } V = \sqrt{3} V_f,$$

$$P = 3 \frac{V}{\sqrt{3}} I \cos \varphi = \sqrt{3} VI \cos \varphi,$$

b) per il sistema a triangolo:

$$\text{Essendo } I = \sqrt{3} I_f \text{ e } V = V_f,$$

$$P = 3 V \frac{I}{\sqrt{3}} \cos \varphi = \sqrt{3} VI \cos \varphi.$$

Si deduce dunque che la potenza di un sistema trifase equilibrato simmetrico è data da 1,73 volte il prodotto del valore efficace della tensione concatenata  $V$  per il valore efficace della corrente di linea  $I$  per il coseno dell'angolo di sfasamento tra la corrente e la tensione di fase.

Analogamente, la potenza reattiva  $Q$  e la potenza apparente  $A$  di un sistema trifase equilibrato simmetrico, sono date da:

$$Q = \sqrt{3} VI \sin \varphi \text{ e } A = \sqrt{3} VI.$$

#### Esempio numerico

Un alternatore trifase a stella sviluppa 150 volt per ogni fase e alimenta una linea con tre utilizzatori uguali aventi la resistenza di 8 ohm e la reattanza induttiva di 6 ohm, connessi a triangolo.

Calcolare la corrente in ogni fase utilizzatrice, la corrente in linea, il fattore di potenza e la potenza totale.

#### Soluzione

Calcolo della tensione concatenata  $V$ :

$$V = 1,73 V_f = 1,73 \cdot 150 = 260 \text{ volt}.$$

Calcolo dell'impedenza di ciascun utilizzatore:

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \text{ ohm}.$$

Calcolo della corrente in ciascuna fase utilizzatrice:

$$I_f = \frac{V}{Z} = \frac{260}{10} = 26 \text{ ampere}.$$

Calcolo della corrente in linea:

$$I = 1,73 If = 1,73 \cdot 26 = 45 \text{ ampere.}$$

Calcolo del fattore di potenza:

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{8}{10} = 0,8.$$

Calcolo della potenza complessiva:

$$P = 1,73 VI \cos \varphi = 1,73 \cdot 260 \cdot 45 \cdot 0,8 = 16.193 \text{ watt.}$$

## 8.12. ESERCIZI DA RISOLVERE

1. Una matassa di 100 spire disposta in un campo magnetico avente induzione di  $1 \text{ Wb/m}^2$ , ruota intorno al suo asse di simmetria perpendicolare al flusso con la velocità di 1.200 giri al minuto. Sapendo che i lati attivi della spira sono lunghi 30 cm e i lati inattivi di 20 cm, calcolare la f.e.m. indotta massima, media ed efficace, nonché la frequenza. (R.  $E_{mx} = 120 \text{ V}$ ;  $E = 85 \text{ V}$ ;  $E_m = 76,5 \text{ V}$ ;  $f = 20 \text{ Hz}$ ).
2. Una bobina (solenoidale), avente la resistenza ohmica di 4 ohm e l'induttanza di  $956 \cdot 10^{-5} \text{ Hr}$ , è alimentata alla tensione di 20 V con frequenza 50 Hz. Calcolare l'impedenza  $Z$  della bobina, l'intensità  $I$  della corrente assorbita, l'angolo  $\varphi$  di sfasamento tra tensione e corrente, la caduta ohmica  $V_a$  e la caduta induttiva  $V_L$ . (R.  $Z = 5 \text{ ohm}$ ;  $I = 4 \text{ A}$ ;  $\varphi = 36^\circ 50'$ ;  $V_a = 16 \text{ V}$ ;  $V_L = 12 \text{ V}$ ).
3. La resistenza ohmica di una bobina vale 4 ohm e provoca una caduta di 32 V. Sapendo che il coseno dell'angolo di sfasamento tra la tensione applicata e la corrente è di 0,8, calcolare la corrente  $I$ , l'impedenza  $Z$  e la reattanza  $X_L$  della bobina, la tensione applicata  $V$  e la caduta induttiva  $V_L$ . (R.  $I = 8 \text{ A}$ ;  $Z = 5 \text{ ohm}$ ;  $X_L = 3 \text{ ohm}$ ;  $V = 40 \text{ V}$ ;  $V_L = 24 \text{ V}$ ).
4. Una bobina con resistenza di 8 ohm e con reattanza di 16 ohm è disposta in serie con un condensatore avente la reattanza di 10 ohm. Sapendo che la tensione ai capi del condensatore è di 50 V, calcolare la corrente nel circuito, la tensione applicata, il coseno del loro angolo di sfasamento, l'impedenza del circuito e le cadute ohmica e induttiva. (R.  $I = 5 \text{ A}$ ;  $V = 50 \text{ V}$ ;  $\cos \varphi = 0,8$ ;  $Z = 10 \text{ ohm}$ ;  $V_a = 40 \text{ V}$ ;  $V_L = 80 \text{ V}$ ).
5. Due bobine, una di 15 ohm di resistenza e 0,1 Hr e l'altra di 10 ohm e 1,55 Hr sono disposte in serie tra loro e con una resistenza di 5 ohm e con un condensatore di  $79,6 \mu\text{F}$ . Sapendo che la tensione di alimentazione è di 100 V con frequenza 50 Hz, calcolare l'impedenza del circuito, la corrente assorbita, la tensione ai capi del condensatore e il coseno dell'angolo di sfasamento tra tensione e corrente specificando se questo è in ritardo o in anticipo su  $V$ . (R.  $Z = 50 \text{ ohm}$ ;  $I = 2 \text{ A}$ ;  $V_c = 80 \text{ V}$ ;  $\cos \varphi = 0,6$  in rit.).
6. Tre impedenze in serie  $Z_1 = 3 + j4$ ,  $Z_2 = 8 - j12$ ,  $Z_3 = 5 + jX_L$  sono sottoposte alla tensione di 100 V. Sapendo che il fattore di potenza complessivo è di 0,8, calcolare la reattanza della terza impedenza, la corrente totale, le potenze complessive. (R.  $X_L = j20$ ;  $I = 4 - j3$ ;  $A = 400 - j300$ ).

7. Tre impedenze in parallelo  $Z_1 = 3 + j4$ ,  $Z_2 = 12 - j16$  e  $Z_3 = 8 + j6$  sono sottoposte alla tensione di 100 V. Calcolare la corrente in ciascuna impedenza e la corrente totale, l'impedenza totale, le potenze e i fattori di potenza complessivi. (R.  $I_1 = 12 - j16$ ;  $I_2 = 3 + j4$ ;  $I_3 = 8 - j6$ ;  $I_t = 23 - j18$ ;  $Z_t = 2,7 + j2,11$ ;  $A_t = 2.300 - j1.800$ ;  $\cos \varphi_t = 0,78$ ;  $\sin \varphi_t = 0,62$ ).
8. Due impedenze in parallelo, l'una di 10 ohm con  $\cos \varphi = 0,8$  in anticipo e l'altra di 20 ohm con  $\cos \varphi = 0,6$  in ritardo, sono sottoposte alla tensione di 100 V. Calcolare l'impedenza totale, la corrente complessiva, il fattore di potenza totale e la potenza dissipata in calore da ciascuna impedenza. (R.  $Z_t = 8,8 - j1,6$ ;  $I_t = 11 + j2$ ;  $\cos \varphi_t = 0,983$ ;  $P_1 = 800$  W;  $P_2 = 300$  W).
9. Un carico della potenza di 1,6 Kw con  $\cos \varphi = 0,8$  è posto in parallelo ad un altro carico della potenza di 600 W con  $\cos \varphi = 0,6$ . Sapendo che la tensione di alimentazione è di 100 V, calcolare la corrente totale assorbita, il fattore di potenza totale, la resistenza e la reattanza di ciascun carico. (R.  $I_t = 22 - j20$ ;  $\cos \varphi_t = 0,73$ ;  $Z_1 = 4 + j3$ ;  $Z_2 = 6 + j8$ ).
10. Un carico, avente l'impedenza di 50 ohm, sottoposto alla tensione di 200 V con frequenza 50 Hz, ha un fattore di potenza di 0,5. Calcolare la capacità da disporre in parallelo al carico per ottenere un fattore di potenza complessivo di 0,8 a potenza attiva costante. (R.  $C = 55 \mu\text{F}$ ).
11. Un'impedenza  $Z_1 = 3,6 + j6,8$ , è posta in serie a due impedenze in parallelo  $Z_2 = 6 + j8$  e  $Z_3 = 4 - j3$ . Sapendo che la tensione di alimentazione è di 50 V, calcolare la corrente totale e nei due rami del parallelo e il fattore di potenza totale. (Verificare graficamente i risultati ottenuti). (R.  $I_t = I_1 = 4 - j3$ ;  $I_2 = -0,4 - j2,2$ ;  $I_3 = 4,4 - j0,8$ ;  $\cos \varphi_t = 0,8$ ).
12. Un carico della potenza  $P_1 = 1.200$  W a  $\cos \varphi_1 = 0,8$  è posto in serie a due carichi tra loro in parallelo aventi  $P_2 = 900$  W a  $\cos \varphi_2 = 0,6$  e  $P_3 = 1.800$  W a  $\cos \varphi_3 = 0,9$ . Sapendo che la tensione di alimentazione è di 100 V, calcolare la corrente totale e il fattore di potenza complessivo. (R.  $I_t = 39 - j25,35$ ;  $\cos \varphi_t = 0,84$ ).
13. Un carico della potenza  $P_1 = 1.200$  W a  $\cos \varphi_1 = 0,8$  deve essere alimentato alla tensione di 100 V, ed è posto in serie ad un altro carico della potenza reattiva  $Q_2 = 2.400$  VAR a  $\cos \varphi_2 = 0,6$ . Calcolare la corrente nel circuito, la tensione totale da applicare al circuito stesso e il fattore di potenza complessivo (verificare graficamente i risultati ottenuti). (R.  $I_t = 12 - j9$ ;  $V_t = 200 + j220$ ;  $\cos \varphi_t = 0,7$ ).
14. Un generatore di tensione alternata avente la resistenza interna  $R_o = 2$  ohm e la tensione a vuoto  $E_o = 100$  volt alla frequenza di 50 Hz, alimenta un carico costituito da una resistenza  $R = 58$  ohm e da un condensatore in serie della capacità  $C = 39,81 \mu\text{F}$ . Calcolare la corrente  $I_k$  e la tensione  $V_k$  del carico. (R.  $I_k = 0,6 + j0,8$ ;  $V_k = 100,8 - j1,6$ ).
15. Due impedenze in serie  $Z_1 = 3 + j4$  e  $Z_2 = 5 - j10$  sono poste in parallelo con l'impedenza  $Z_3 = 6 + j8$ . Sapendo che la corrente in  $Z_3$  è di 5 ampere, calcolare la tensione  $V$  applicata al circuito, la corrente totale  $I_t$ , il fattore di potenza complessivo e le potenze totali. (R.  $V = 50$  V;  $I_t = 7 - j1$ ;  $\cos \varphi_t = 0,97$ ;  $A_t = 350 - j50$ ).

## Capitolo Nono

### Cenni sulle macchine elettriche

Le macchine elettriche sono trasformatori di energia e il loro principio di funzionamento è basato sui fenomeni dell'induzione elettromagnetica.

Le macchine delle quali ci occuperemo brevemente possono essere suddivise in:

- a) *Trasformatori elettrici.* Sono macchine statiche che sfruttano i fenomeni della mutua induzione e perciò funzionano in corrente alternata. Sono convertitori di energia elettrica di una determinata tensione e di una determinata corrente in energia elettrica di tensione e corrente diverse ma tali che il loro prodotto resti costante (lasciando inalterata la frequenza).
- b) *Generatori elettrici.* Sono macchine rotanti che trasformano l'energia meccanica in energia elettrica sotto forma di corrente continua (dinamo), oppure sotto forma di corrente alternata (alternatori).
- c) *Motori elettrici.* Sono macchine rotanti che trasformano l'energia elettrica in energia meccanica. I motori non differiscono sostanzialmente dai generatori in quanto il loro funzionamento è, in generale, reversibile e cioè, se sottoposti ad una energia meccanica di rotazione, producono energia elettrica. Possono essere a corrente continua e a corrente alternata.

Esistono poi macchine rotanti oppure statiche che convertono la corrente alternata in continua e viceversa (convertitori di forma) o la corrente alternata di una determinata frequenza in corrente alternata di frequenza diversa (convertitori di frequenza).

#### 9.1. TRASFORMATORI ELETTRICI

Il trasformatore più semplice è quello monofase a due avvolgimenti.

È essenzialmente costituito da tre parti: il nucleo magnetico, l'avvolgimento primario e l'avvolgimento secondario.

Il nucleo o circuito magnetico è costituito da lamierini di ferro al silicio a basse perdite per isteresi ed ad alta permeabilità, dello spessore di  $0,3 \div 0,5$  mm.

I lamierini sono isolati tra loro allo scopo di ridurre le correnti parassite e sono disposti nel piano parallelo alle linee di flusso.

Il nucleo può avere la forma di figura 9.1-a o la forma di figura 9.1-b.

Nel primo caso i trasformatori sono detti *a colonne*, nel secondo caso sono detti trasformatori *a mantello o corazzati*.

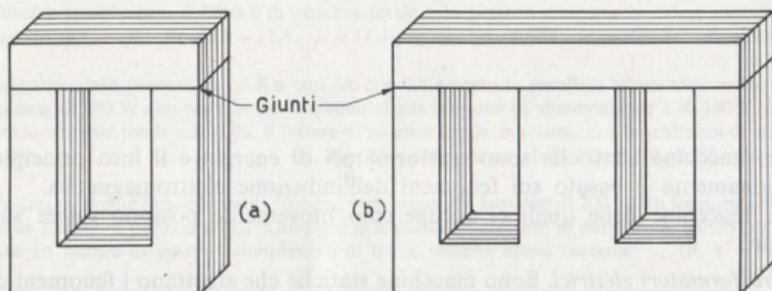


Fig. 9.1 - Nuclei magnetici a colonna (a) e a mantello (b).

Le porzioni di nucleo su cui si dispongono gli avvolgimenti sono dette *colonne*, le parti di collegamento sono dette *giochi*.

Per poter infilare l'avvolgimento sulle colonne, il nucleo deve essere composto con lamierini in più pezzi, per cui lo stesso nucleo presenta un certo numero di *giunti*, che possono essere *affacciati* oppure *intercalati*.

I lamierini sono fortemente pressati e tenuti serrati per mezzo di bulloni passanti, isolati, onde evitare che questi mettano in collegamento i lamierini e quindi aumentino le correnti parassite.

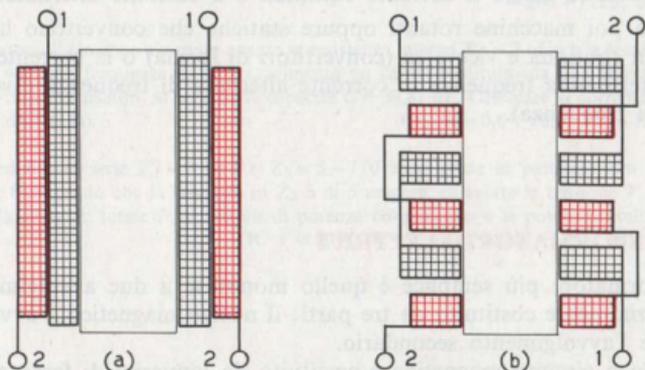


Fig. 9.2 - Avvolgimenti concentrici (a) ed alternati (b).

I due avvolgimenti elettrici, primario e secondario, devono essere strettamente concatenati e isolati l'uno dall'altro in ragione delle tensioni indotte.

Anche le spire e gli strati sovrapposti di ogni singolo avvolgimento sono reciprocamente isolati con carta e fibre tessili eventualmente impregnate con vernici isolanti.

La disposizione degli avvolgimenti può essere *concentrica* (fig. 9.2-a) oppure *alternata* (fig. 9.2-b).

Le denominazioni di primario e di secondario non si riferiscono alla differenziazione costruttiva dei due avvolgimenti, ma hanno significato funzionale: *primario* è l'avvolgimento alimentato dalla sorgente di energia elettrica, *secondario* è l'avvolgimento che eroga energia al circuito di utilizzazione.

Le due funzioni possono essere assolte indifferentemente dai due avvolgimenti.

Nel nucleo, a causa dell'isteresi magnetica e delle correnti parassite, e negli avvolgimenti, a causa dell'effetto Joule, si ha una dissipazione di energia con conseguente produzione di calore. Per evitare l'eccessivo surriscaldamento delle varie parti del trasformatore, si deve provvedere ad un adeguato smaltimento del calore.

Per i piccoli trasformatori è sufficiente la dissipazione naturale nell'aria ambiente, per i trasformatori di media potenza si deve provvedere ad attivare il ricambio dell'aria con ventilazione forzata, mentre per i trasformatori di grande potenza si ricorre al raffreddamento in olio con il vantaggio di ottenere una più alta rigidità dielettrica e quindi un miglior isolamento nei trasformatori per tensioni elevate.

Il principio di funzionamento, e quindi la teoria generale del trasformatore monofase a due avvolgimenti, deriva dai fenomeni di mutua e di autoinduzione visti ai paragrafi 7.11. e 7.14. e cioè dal comportamento di due circuiti elettrici isolati, magneticamente accoppiati, quando uno di essi è alimentato da una tensione alternata sinusoidale di frequenza  $f$ .

Esaminiamo il funzionamento del trasformatore a vuoto e a carico.

#### a) Funzionamento a vuoto del trasformatore

Consideriamo dapprima un trasformatore ideale e cioè privo di perdite sia nel ferro (perdite per isteresi e per correnti parassite nel nucleo magnetico), che nel rame (perdite per effetto Joule negli avvolgimenti primario e secondario). Riteniamo inoltre nulle le dispersioni di flusso magnetico, come se tutte le linee di forza prodotte potessero concatenarsi con i due avvolgimenti.

Il funzionamento a vuoto si ottiene a circuito secondario aperto e cioè in assenza della corrente secondaria  $I_2$ .

Riferendoci alla figura 9.3-a-b, applichiamo all'avvolgimento primario di  $N_1$  spire la tensione  $V_1$ . Avendo trascurato la resistenza primaria  $R_1$ , l'impedenza

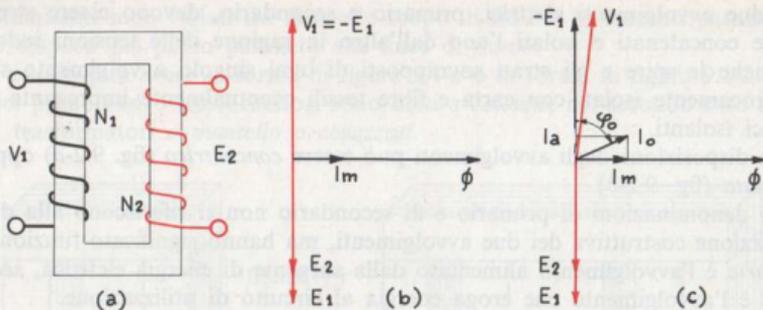


Fig. 9.3 - Funzionamento a vuoto di un trasformatore ideale (b) e reale (c).

del circuito primario coincide con la reattanza  $X_1$  e perciò nel primario circola una corrente a vuoto  $I_m$  totalmente reattiva o magnetizzante sfasata di  $90^\circ$  in ritardo sulla  $V_1$ :

$$I_m = \frac{V_1}{X_1}.$$

Detta corrente produce un flusso alternativo  $\Phi$  che, per aver supposta nulla l'isteresi, è in fase con la  $I_m$ .

Il flusso  $\Phi$  induce in ciascuna spira una f.e.m.:

$$e = 4,44 f \Phi_{mx},$$

e, come abbiamo detto al paragrafo 7.14., induce nel primario di  $N_1$  spire una f.e.m.  $E_1$ :

$$E_1 = 4,44 f N_1 \Phi_{mx},$$

in ritardo di  $90^\circ$  sul flusso induttore e cioè in opposizione alla tensione  $V_1$ . Infatti essa ha il carattere di una caduta induttiva che, in assenza della caduta ohmica, deve risultare uguale in grandezza a  $V_1$ .

Lo stesso flusso induce nell'avvolgimento secondario di  $N_2$  spire una f.e.m.  $E_2$  di mutua induzione:

$$E_2 = 4,44 f N_2 \Phi_{mx},$$

in ritardo di  $90^\circ$  sul flusso induttore e quindi in fase con la  $E_1$  e in opposizione alla  $V_1$ .

Il rapporto di trasformazione (vedi paragrafo 7.11.) a vuoto, trascurando la resistenza ohmica, può allora essere espresso da:

$$\tau_0 = \frac{N_1}{N_2} = \frac{V_1}{E_2}, \quad (9.1)$$

essendo  $E_1 = V_1$ .

Le relazioni precedenti permettono di calcolare il numero delle spire primarie e secondarie, quando sia stato prefissato il flusso massimo con opportuni criteri e siano note la frequenza, la tensione di alimentazione e la f.e.m. che si vuole ottenere al secondario.

La potenza assorbita a vuoto da un trasformatore ideale è dunque una potenza reattiva  $Q$  corrispondente alla potenza magnetizzante e cioè alla potenza necessaria per i fenomeni di auto e di mutua induzione.

$$Q = I_m \cdot V_1 .$$

Se ora consideriamo la resistenza  $R_1$  dell'avvolgimento primario, le relative perdite Joule e le perdite per isteresi e per correnti parassite, il trasformatore funzionante a vuoto, assorbe una corrente  $I_0$  primaria a vuoto, non più totalmente magnetizzante  $I_m$ , ma contenente una componente attiva  $I_a$  il cui valore è dato dal rapporto tra la potenza complessiva  $P_0$  dissipata a vuoto e la tensione di alimentazione  $V_1$ :

$$I_a = \frac{P_0}{V_1} , \quad (9.2)$$

mentre la corrente magnetizzante  $I_m$  rimane invariata.

Il diagramma vettoriale del trasformatore reale funzionante a vuoto va allora modificato come in figura 9.3-c. L'angolo di sfasamento  $\varphi_0$  a vuoto differisce di poco dai  $90^\circ$ , essendo la corrente attiva  $I_a$  di piccolissima intensità. In pratica si ritiene  $I_0 = I_m$ , per cui la f.m.m.  $N_1 \cdot I_m$ , alla quale dobbiamo attribuire la produzione del flusso  $\Phi$ , in pratica viene calcolata con il prodotto  $N_1 \cdot I_0$ .

Anche la tensione primaria  $V_1$  che, a causa della caduta di tensione primaria provocata dalla  $I_0$ , risulta leggermente superiore alla f.e.m.  $E_1$  e di poco sfasata, in pratica si identifica con la stessa  $E_1$ .

Quando il circuito secondario rimane aperto, il trasformatore dunque non adempie ad alcuna funzione, ma assorbe unicamente una potenza attiva corrispondente alla dissipazione di energia nel circuito primario e nel ferro e una potenza reattiva  $Q$  corrispondente all'energia magnetizzante. La potenza assorbita è all'ordine dell'1-3 % della potenza nominale e cioè della potenza per la quale il trasformatore è stato calcolato.

## b) Funzionamento a carico del trasformatore

Il funzionamento a carico si ottiene a circuito secondario chiuso su un utilizzatore e cioè con circolazione di corrente secondaria  $I_2$  (fig. 9.4-a).

Chiudendo l'avvolgimento secondario su un circuito utilizzatore, la f.e.m.  $E_2$  di mutua induzione vi determina una corrente secondaria  $I_2$  data da:

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2},$$

dove  $Z_2$  è l'impedenza complessiva dell'avvolgimento secondario e dell'utilizzatore.

Consideriamo il solo caso di un carico ohmico-induttivo (fig. 9.4-b).

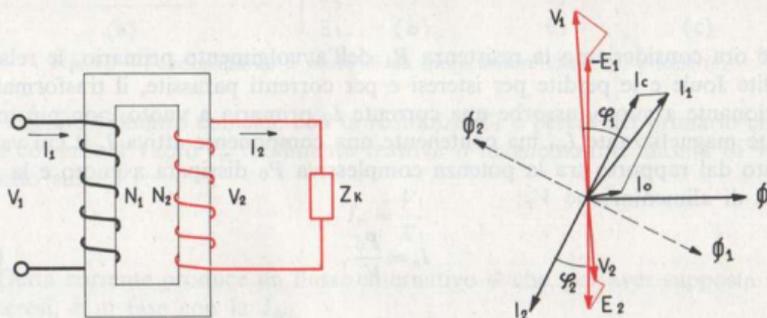


Fig. 9.4 - Funzionamento di un trasformatore sotto carico.

La corrente  $I_2$ , sfasata in ritardo di un angolo  $\varphi_2$  rispetto alla f.e.m.  $E_2$ , produce nel nucleo un flusso  $\Phi_2$  in ritardo di  $90^\circ$  su di essa, proporzionale alla f.m.m.  $N_2 \cdot I_2$ , che componendosi con il flusso principale  $\Phi$  prodotto dalla f.m.m.  $N_1 \cdot I_0$ , lo riduce, diminuendo di conseguenza la f.e.m. di autoinduzione  $E_1$ , oltre la  $E_2$ .

Essendo il valore efficace della tensione di alimentazione  $V_1$  costante, a causa della diminuzione della  $E_1$ , nasce nell'avvolgimento primario una corrente  $I_c$ , detta di *compensazione* proporzionale alla corrente secondaria  $I_2$ , e sfasata rispetto ad  $E_1$  di un angolo  $\varphi_1$  uguale a  $\varphi_2$ .

La corrente di compensazione genera a sua volta un flusso primario  $\Phi_1$  a  $90^\circ$  in ritardo su se stessa e cioè in opposizione a  $\Phi_2$  e a questo uguale, perché dovuto alla f.m.m.  $N_1 \cdot I_c$  che risulta evidentemente uguale a  $N_2 \cdot I_2$ .

Pertanto nel nucleo magnetico il flusso  $\Phi \equiv N_1 \cdot I_0$  rimane praticamente costante ed indipendente dal carico.

Il trasformatore è cioè *autoregolatore*, in quanto la corrente che esso preleva dalla linea di alimentazione si proporziona spontaneamente a quella richiesta dall'utilizzatore.

E ciò è logico se si pensa che qualsiasi macchina, per il principio della conservazione dell'energia, non può mai fornire una potenza maggiore di quella

assorbita, bensì assorbe una potenza maggiore di quella resa, a causa delle inevitabili perdite proprie di ogni macchina.

Nel primario si ha dunque una corrente  $I_1$  data dalla somma geometrica della corrente di compensazione  $I_c$  con la corrente a vuoto  $I_0$ .

Nel trasformatore esiste un flusso di dispersione primario che rappresenta quel flusso prodotto dal primario che non riesce a concatenarsi con il secondario, e un flusso di dispersione secondario che rappresenta quel flusso generato dal secondario che non si concatena con il primario, per cui i due avvolgimenti, non solo possiedono una resistenza ohmica e una propria reattanza induttiva, ma possiedono anche una reattanza di dispersione e cioè una reattanza che diminuisce la corrente magnetizzante di un valore proporzionale alla diminuzione del flusso concatenato rispetto a quello generato.

In ciascun avvolgimento si hanno così due cadute di tensione, una ohmica in fase con la rispettiva corrente e una induttiva sfasata di  $90^\circ$ .

Si ha cioè che la tensione  $V_2$  disponibile ai morsetti secondari è inferiore e sfasata rispetto alla f.e.m.  $E_2$ , a causa delle cadute di tensione secondarie, mentre la tensione primaria  $V_1$  deve essere maggiore di  $E_1$  per effetto delle cadute di tensione primarie.

Essendo però la tensione di alimentazione primaria  $V_1$  costante, passando dal funzionamento a vuoto al funzionamento a carico, è il flusso che si modifica, quindi le f.e.m. indotte e di conseguenza la tensione secondaria.

Per ridurre al minimo le reattanze di dispersione, i due avvolgimenti primario e secondario devono essere strettamente accoppiati e cioè avvolti su un'unica colonna.

Il rapporto tra la tensione primaria  $V_1$  e la tensione secondaria  $V_2$  detto *rapporto di trasformazione a carico*, risulta evidentemente maggiore del rapporto di trasformazione a vuoto e cioè del rapporto tra il numero delle spire primarie  $N_1$  e il numero delle spire secondarie  $N_2$ .

Considerando poi che la corrente a vuoto  $I_0$  è una bassa percentuale della corrente primaria a carico  $I_1$  (5-10 % della corrente a pieno carico), e che, nei buoni trasformatori, la reattanza di dispersione e la resistenza ohmica sono di piccola entità, per cui anche le cadute di tensione da esse determinate sono poco rilevanti, gli angoli di sfasamento primario  $\varphi_1$  e secondario  $\varphi_2$  si possono in pratica ritenere uguali, purché il trasformatore lavori verso il pieno carico.

Il trasformatore funzionante a carico rende dunque al secondario una potenza  $P_2$  data da:

$$P_2 = V_2 I_2 \cos \varphi ,$$

che è inferiore alla potenza  $P_1$  che il trasformatore assorbe:

$$P_1 = V_1 I_1 \cos \varphi ,$$

a causa delle perdite nel ferro e nel rame.

Il rendimento del trasformatore è comunque, rispetto alle altre macchine, sempre elevato: può arrivare anche a  $0,96 \div 0,98$ .

Il valore efficace del flusso magnetico occorrente al funzionamento del trasformatore può essere calcolato da:

$$\Phi = \frac{N_1 I_m}{\mathcal{R}},$$

e il suo valore massimo  $\Phi_{mx}$  è dato da  $\sqrt{2}\Phi$ .

In pratica però viene calcolato con formule empiriche.

Per poter adattare il trasformatore alle diverse tensioni delle reti di distribuzione dell'energia elettrica, l'avvolgimento primario è costruito con più derivazioni intermedie (fig. 9.5), che proporzionano il numero delle spire alla tensione usata, così, per poter usufruire di diverse tensioni secondarie, il secondario viene costruito a più avvolgimenti o con più prese intermedie.

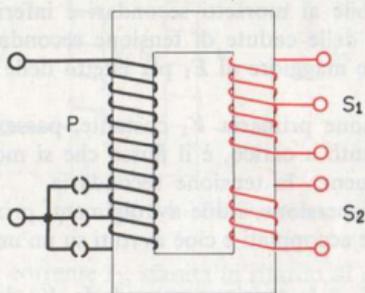


Fig. 9.5 - Trasformatore monofase a derivazioni intermedie.

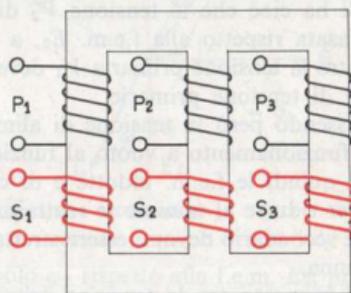


Fig. 9.6 - Trasformatore trifase a colonna.

I trasformatori trifasi sono dotati di tre avvolgimenti primari e di tre avvolgimenti secondari avvolti su un solo nucleo magnetico a tre colonne come, per esempio, rappresentato in figura 9.6.

I tre avvolgimenti primari e i tre avvolgimenti secondari possono essere collegati sia a stella che a triangolo.

### c) L'autotrasformatore

Ai fini del nostro studio è utile accennare anche ad un tipo speciale di trasformatore, detto *autotrasformatore*.

Gli autotrasformatori sono dotati di un solo avvolgimento (fig. 9.7) di  $N_1$  spire. La tensione  $V_1$  applicata ai suoi estremi  $A$  e  $B$  dà origine ad una corrente primaria  $I_1$  e quindi ad un flusso  $\Phi$  che genera una f.e.m. di autoinduzione  $E_1$ .

Questa, prescindendo dalle cadute di tensione, è uguale ed opposta alla  $V_1$  e si divide in parti uguali fra le singole spire. Sia  $e$  la f.e.m. indotta in ciascuna spira.

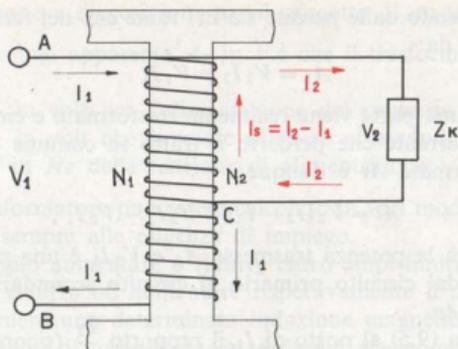


Fig. 9.7 - Autotrasformatore.

Fra un estremo, per esempio  $A$  e un punto qualsiasi  $C$ , sussiste una f.e.m.  $E_2$  data da:

$$E_2 = e \cdot N_2, \quad (9.3)$$

essendo  $N_2$  il numero di spire compreso fra  $A$  e  $C$ .

Se da questi due punti si deriva una linea si può alimentare un carico adeguato. Ovviamente, prescindendo dalle cadute e dalle perdite interne di energia, le tensioni primarie e secondarie sono ancora direttamente proporzionali rispettivamente al numero delle spire primarie e secondarie, mentre le correnti nei circuiti primario e secondario sono inversamente proporzionali al numero delle rispettive spire, come per un normale trasformatore.

L'autotrasformatore però ha il vantaggio di non avere un avvolgimento secondario vero e proprio, ma di usufruire di  $N_2$  spire dell'avvolgimento primario, con conseguente notevole risparmio di rame.

Ciò è dovuto anche al fatto che mentre il tratto  $CB$  è percorso dalla corrente primaria  $I_1$ , il tratto  $AB$  che fa parte sia del primario che del secondario è percorso non già dalla somma, ma dalla differenza tra la corrente secondaria  $I_2$  e la corrente primaria  $I_1$  essendo, come nel trasformatore normale, l'una in opposizione all'altra.

Pertanto nell'autotrasformatore si ha, rispetto al trasformatore, una minor perdita per effetto Joule e quindi un maggior rendimento.

A parità di potenza nominale, il nucleo magnetico può essere ridotto rispetto a quello del trasformatore, in quanto il flusso magnetico necessario al funzionamento corrisponde solo alla potenza *trasformata* che nell'autotrasformatore è minore di quella *trasmessa*, perché una parte di questa, detta *passante*, passa direttamente dalla linea primaria a quella secondaria in ragione diretta della differenza fra la corrente  $I_2$  del circuito secondario e la corrente  $I_s = I_2 - I_1$  che percorre l'avvolgimento secondario.

Infatti, prescindendo dalle perdite sia nel rame che nel ferro, la potenza trasmessa  $A_2$  è data da:

$$A_2 = V_2 I_2 = V_1 I_1 . \quad (9.4)$$

Di questa solo una parte viene realmente trasformata e cioè solo quella corrispondente alla corrente che percorre il tratto in comune dell'avvolgimento. La potenza trasformata  $At$  è dunque:

$$At = V_2(I_2 - I_1) = V_2 I_2 - V_2 I_1 , \quad (9.5)$$

dove  $V_2 I_2$  è ancora la potenza trasmessa  $A_2$  e  $V_2 I_1$  è una potenza che è passata direttamente dal circuito primario al circuito secondario, detta appunto potenza passante  $Ap$ .

Sostituendo nella (9.5) al posto di  $I_1$  il rapporto  $\frac{I_2}{\tau}$  (ricordiamo che  $\frac{I_2}{I_1} = \tau$ ) si ha:

$$At = A_2 - \frac{A_2}{\tau} = A_2 \left( 1 - \frac{1}{\tau} \right) .$$

Il termine  $\left( 1 - \frac{1}{\tau} \right)$ , è per ciascun autotrasformatore, una costante  $K$ , per cui:

$$At = K A_2 . \quad (9.6)$$

Osserviamo che per  $\tau = 1$ , il coefficiente  $K$  è nullo e perciò l'autotrasformatore non trasforma alcuna potenza perché tutta la potenza del primario passa direttamente al secondario. L'autotrasformatore non ha più alcuna utilità e si comporta come una impedenza in parallelo alla linea, che assorbe in ragione delle proprie perdite.

Se invece il rapporto di trasformazione  $\tau$  è altissimo, il coefficiente  $K$  tende a 1 per cui la potenza trasformata tende a divenire uguale a quella trasmessa, come in un normale trasformatore.

In pratica però l'impiego dell'autotrasformatore è limitato a quei casi in cui il rapporto di trasformazione è dell'ordine di 3-4 unità, poiché la linea secondaria, non essendo isolata elettricamente dalla primaria, può assumere «verso terra» una tensione che può arrivare ad eguagliare la tensione primaria e quindi pericolosa per le apparecchiature utilizzatrici.

L'autotrasformatore, come i trasformatori, è reversibile nel senso che gli avvolgimenti possono funzionare indifferentemente da indotto e da induttore, per cui si può applicare al secondario una tensione di alimentazione  $V_2$  per ottenere al primario una tensione  $V_1$ .

## 9.2. CALCOLO PRATICO DI PICCOLI TRASFORMATORI

Per calcolare le dimensioni del circuito magnetico e degli avvolgimenti dei trasformatori statici che non superano la potenza di 1.000 VA, si ricorre a metodi semplificativi ed empirici di calcolo, dei quali diamo qualche esempio.

I dati che si hanno a disposizione per il progetto di un trasformatore sono:

- a) la potenza massima apparente  $A_2$  in VA che il trasformatore deve rendere al secondario;
- b) la tensione  $V_1$  in volt per l'alimentazione del primario;
- c) la tensione  $V_2$  in volt che si vuole ottenere al secondario;
- d) la frequenza  $f$  in Hz della tensione di alimentazione.

Uno stesso trasformatore può essere calcolato in vari modi e con dati diversi pur rispondendo sempre alle esigenze di impiego.

Si può ad esempio aumentare o ridurre entro ampi limiti la sezione del nucleo magnetico e ridurre od aumentare rispettivamente il numero delle spire.

Infatti per ottenere una determinata induzione magnetica  $B$  occorre stabilire un certo flusso  $\Phi$  e di conseguenza assegnare al nucleo magnetico una determinata sezione  $s$ .

Senonché il numero delle spire  $n$  per ogni volt efficace di f.e.m. indotta è legato al flusso  $\Phi$  dalla relazione (vedi paragrafo 8.10.):

$$\Phi_{mx} = \frac{1}{4,44 f \cdot n},$$

da cui:

$$\Phi_{mx} \cdot n = \frac{1}{4,44 f}.$$

Per una determinata frequenza  $f$  il termine  $\frac{1}{4,44 f}$  è costante, per cui il prodotto del flusso  $\Phi$  per il numero delle spire  $n$  è una costante.

Ciò significa che aumentando il flusso, e perciò la sezione da assegnare al nucleo, a parità di induzione  $B$ , diminuisce proporzionalmente il numero delle spire e quindi il peso di rame.

Si ha cioè che il numero delle spire  $n$  è inversamente proporzionale alla sezione  $s$  del nucleo magnetico.

Si tratta dunque di scegliere il migliore compromesso tra la sezione del nucleo e il numero delle spire, in relazione alla potenza del trasformatore.

Criteri di economia di rame suggeriscono di adottare per il calcolo della sezione lorda  $Sl$  del nucleo magnetico, la seguente formula empirica:

$$Sl = 2 \sqrt{A_2}, \quad (9.7)$$

dove  $Sl$  è espressa in  $\text{cm}^2$ .

Per ottenere la sezione netta  $Sn$  basta togliere dalla sezione lorda l'ingombro relativo all'isolamento dei lamierini.

Tale ingombro è valutato del 15 % per i lamierini di 0,35 mm e del 10 % per i lamierini di 0,5 mm; si ha cioè:

$$Sn = \frac{Sl}{1,15} \text{ per i lamierini di } 0,35 \text{ mm.}$$

$$Sn = \frac{Sl}{1,1} \text{ per i lamierini di } 0,5 \text{ mm.}$$

Calcolata la sezione netta del nucleo e stabilito il valore della induzione magnetica  $B$  con la quale si vuol far lavorare il nucleo e che in genere è di  $1 \text{ Wb/m}^2$ , si può calcolare subito il valore del flusso  $\Phi$ :

$$\Phi = B \cdot Sn .$$

Nota la tensione primaria  $V_1$  e la tensione secondaria  $V_2$  e ricordando che il numero  $n$  di spire per ogni volt è:

$$n = \frac{1}{4,44 f \Phi} \text{ spire/volt ,}$$

si ricava il numero  $N_1$  delle spire primarie:

$$N_1 = n V_1 .$$

Per calcolare il numero  $N_2$  delle spire secondarie si ricorre alla stessa formula. Tenendo conto però delle cadute di tensione che si hanno nell'avvolgimento secondario e che per i piccoli trasformatori possono ritenersi del 3-10 %, il numero delle spire secondarie può considerarsi definito da:

$$N_2 = 1,03 \div 1,1 n \cdot V_2 .$$

La sezione e quindi il diametro da assegnare ai conduttori, viene calcolato in base alla densità di corrente. Generalmente si ammette una densità di  $2 \text{ A/mm}^2$ , per cui la sezione  $s$  viene data da:

$$s = \frac{I}{2} ,$$

mentre il diametro  $d$  è dato da:

$$d = 0,8 \sqrt{I} .$$

Occorre pertanto calcolare la corrente primaria  $I_1$  e la corrente secondaria  $I_2$ . Quest'ultima si ha immediatamente:

$$I_2 = \frac{A_2}{V_2} ,$$

mentre per conoscere la  $I_1$  occorre tener conto del rendimento  $\eta$  del trasformatore e della presenza nel primario della corrente reattiva e cioè del fattore di potenza  $\cos \varphi$ .

Amnesso un rendimento  $\eta = 0,8$  e un fattore di potenza  $\cos \varphi = 0,9$  si ha:

$$A_1 = \frac{A_2}{\eta \cdot \cos \varphi}.$$

La corrente primaria  $I_1$  è data allora da:

$$I_1 = \frac{A_1}{V_1}.$$

Volendo ora procedere al calcolo delle dimensioni di ingombro degli avvolgimenti, onde poter scegliere il tipo di lamierino avente la *finestra* di dimensioni sufficienti a contenere l'avvolgimento stesso, si calcola dapprima l'ingombro teorico dell'avvolgimento, come se questo fosse costituito da conduttori nudi.

L'ingombro teorico  $A$  è ovviamente dato da:

$$A = Nd^2, \quad (9.8)$$

dove  $A$  è l'area della sezione dell'avvolgimento in  $\text{mm}^2$ ,  $d$  il diametro dei conduttori in  $\text{mm}$  e  $N$  il numero delle spire dell'avvolgimento considerato.

Dobbiamo però considerare anche l'ingombro degli isolanti che ricoprono i conduttori e che isolano gli strati e gli spazi vuoti che rimangono tra filo e filo.

L'ingombro complessivo si trova allora moltiplicando l'ingombro teorico per un fattore, detto *coefficiente di riempimento*, che può variare da 2,6 a 2,4 a seconda che il trasformatore abbia, oppure no, prese intermedie.

Pertanto l'area complessiva  $At$  della sezione lorda dell'avvolgimento è:

$$At = 2,4 \div 2,6 Nd^2.$$

Scelto il lamierino avente la *finestra* corrispondente all'area  $At$  e, noto il suo spessore, risulta subito il numero dei lamierini occorrenti.

Nota poi l'altezza della *finestra* si calcola il numero delle spire per ogni strato e conseguentemente il numero degli strati dei due avvolgimenti.

Gli autotrasformatori vengono calcolati in modo analogo al trasformatore. Però per il calcolo della sezione del nucleo non ci si basa più sulla potenza secondaria o trasmessa  $A_2$ , ma sulla potenza trasformata  $At$  che, come abbiamo visto al paragrafo precedente, essendo uguale alla differenza tra la potenza trasmessa  $A_2$  e la potenza passante  $A_p$ , risulta:

$$At = A_2 - \frac{A_2}{\tau}, \quad (9.9)$$

che corrisponde ovviamente alla potenza relativa al tratto non in comune dell'avvolgimento.

La sezione lorda  $Sl$  del nucleo viene quindi calcolata con:

$$Sl = 2 \sqrt{At}.$$

Anche il diametro dei conduttori che costituiscono l'avvolgimento risulta ridotto rispetto a quello di un corrispondente trasformatore perché, mentre il tratto non in comune dell'avvolgimento è percorso dalla corrente primaria o secondaria a secondo che il trasformatore sia abbassatore (rapporto in discesa) o elevatore (rapporto in salita), il tratto comune è invece percorso dalla differenza tra le due correnti.

Si conclude che quanto più basso è il rapporto di trasformazione, tanto più ridotta risulta la sezione del nucleo e quindi quella dei conduttori, cioè l'ingombro complessivo dell'autotrasformatore.

#### Esempio numerico

Si vuole calcolare un trasformatore avente le seguenti caratteristiche:

Tensione del primario: 110 - 125 - 160 - 220 V.

Tensioni e potenze al secondario diviso in 3 avvolgimenti:

Primo avvolgimento: 300 V      30 VA.

Secondo avvolgimento: 20 V      40 VA.

Terzo avvolgimento: 4 V      11 VA.

Frequenza della rete: 50 Hz.

#### Soluzione

La potenza complessiva richiesta al secondario è data da:

$$A_2 = 30 + 40 + 11 = 81 \text{ VA}.$$

La sezione lorda del nucleo magnetico è:

$$Sl = 2 \sqrt{A_2} = 2 \sqrt{81} = 18 \text{ cm}^2.$$

La sezione netta, supponendo che lo spessore dei lamierini sia di 0,3 mm, è data da:

$$Sn = \frac{Sl}{1,15} = \frac{18}{1,15} = 15,65 \text{ cm}^2.$$

Volendo far lavorare il ferro con un'induzione magnetica di  $1 \text{ Wb/m}^2$  il flusso nel nucleo risulta:

$$\Phi = B \cdot Sn = 1 \cdot 15,65 \cdot 10^{-4} = 1,565 \cdot 10^{-6} \text{ Wb}.$$

Il numero delle spire per volt è dato da:

$$n = \frac{1}{4,44 f \Phi} = \frac{1}{4,44 \cdot 50 \cdot 1,565 \cdot 10^{-6}} = 2,9 \text{ spire/volt .}$$

Il numero delle spire complessive primarie si calcola in base alla tensione di alimentazione, partendo dalla tensione più elevata:

$$N_1 = n \cdot V_1 = 2,9 \cdot 220 = 638 \text{ spire .}$$

Le derivazioni relative alle tensioni intermedie si effettuano dopo aver avvolto il seguente numero di spire:

per la tensione di 110 volt:

$$2,9 \cdot 110 = 319 \text{ spire ,}$$

per la tensione di 125 volt:

$$2,9 \cdot 125 = 363 \text{ spire ,}$$

per la tensione di 160 volt:

$$2,9 \cdot 160 = 464 \text{ spire .}$$

Il numero delle spire dei tre avvolgimenti secondari è dato da:

$$N_{S_1} = 1,05 \cdot 2,9 \cdot 300 = 914 \text{ spire ,}$$

$$N_{S_2} = 1,05 \cdot 2,9 \cdot 20 = 62 \text{ spire ,}$$

$$N_{S_3} = 1,05 \cdot 2,9 \cdot 4 = 12 \text{ spire .}$$

Le correnti e quindi i diametri degli avvolgimenti secondari, per una densità di 2 A/mm<sup>2</sup>, sono dati da:

$$I_{S_1} = \frac{30}{300} = 0,1 \text{ A} \quad d_{S_1} = 0,8 \sqrt{0,1} = 0,253 \text{ mm ,}$$

$$I_{S_2} = \frac{40}{20} = 2 \text{ A} \quad d_{S_2} = 0,8 \sqrt{2} = 1,13 \text{ mm ,}$$

$$I_{S_3} = \frac{11}{4} = 2,75 \text{ A} \quad d_{S_3} = 0,8 \sqrt{2,75} = 1,326 \text{ mm .}$$

Ammettendo un rendimento  $\eta$  di 0,8 e un  $\cos \varphi$  di 0,9, la potenza primaria  $A_1$  si calcola con l'espressione:

$$A_1 = \frac{A_2}{\eta \cdot \cos \varphi} = \frac{81}{0,8 \cdot 0,9} = 112,5 \text{ VA .}$$

Le correnti primarie e i diametri da assegnare ai tratti di avvolgimento primario, sono dati da:

$$I_{p1} = \frac{112,5}{110} = 1,02 \text{ A} \quad dp_1 = 0,8 \sqrt{1,02} = 0,8 \text{ mm},$$

$$I_{p2} = \frac{112,5}{125} = 0,9 \text{ A} \quad dp_2 = 0,8 \sqrt{0,9} = 0,752 \text{ mm},$$

$$I_{p3} = \frac{112,5}{160} = 0,7 \text{ A} \quad dp_3 = 0,8 \sqrt{0,7} = 0,664 \text{ mm},$$

$$I_{p4} = \frac{112,5}{220} = 0,51 \text{ A} \quad dp_4 = 0,8 \sqrt{0,51} = 0,568 \text{ mm}.$$

In commercio è impossibile trovare i diametri che risultano dai calcoli per cui si dovranno adottare i conduttori di diametro immediatamente superiore.

Per il primario possono essere adottati i seguenti diametri:

$$dp_1 \text{ e } dp_2 = 0,8 \text{ mm}, \quad dp_3 = 0,7 \text{ mm}, \quad dp_4 = 0,6 \text{ mm},$$

e per il secondario:

$$ds_1 = 0,3 \text{ mm}, \quad ds_2 = 1,2 \text{ mm}, \quad ds_3 = 1,4 \text{ mm}.$$

L'ingombro teorico dell'intero avvolgimento si ha sommando l'ingombro dei singoli tratti.

Considerando che 383 spire dell'avvolgimento primario sono costituite da conduttori del diametro di 0,8 mm, che 484 - 383 spire sono formate da conduttori di 0,7 mm, e che 638 - 484 spire sono costituite da conduttori del diametro di 0,6 mm, l'ingombro netto dell'avvolgimento primario è dato da:

$$A_1 = 383 \cdot 0,8^2 + 101 \cdot 0,7^2 + 154 \cdot 0,6^2 = 350 \text{ mm}^2.$$

L'ingombro dei tre avvolgimenti secondari è dato da:

$$A_2 = 914 \cdot 0,3^2 + 62 \cdot 1,2^2 + 12 \cdot 1,4^2 = 195 \text{ mm}^2.$$

L'ingombro netto complessivo è allora:

$$An = 350 + 195 = 545 \text{ mm}^2.$$

L'ingombro lordo degli avvolgimenti primari e secondari risulta:

$$At = 2,4 An = 2,4 \cdot 545 = 1.308 \text{ mm}^2.$$

Si può adottare pertanto un lamierino a mantello del commercio avente la finestra di 22,5 × 56 mm, alto 77 mm e largo 83 mm e avente la colonna centrale di 18 mm.

Il numero  $N$  dei lamierini occorrenti si trova dividendo la sezione netta  $Sn$  del nucleo precedentemente calcolata per l'altezza  $h$  moltiplicata per lo spessore  $s$  del lamierino:

$$N = \frac{Sn}{h \cdot s} = \frac{1.565}{77 \cdot 0,3} = 68 \text{ lamierini}.$$

Calcolata la sezione della colonna centrale, si procede all'avvolgimento delle bobine primarie e secondarie.

### 9.3. GENERATORI ELETTRICI

Abbiamo detto che i generatori elettrici sono macchine rotanti che trasformano l'energia meccanica in energia elettrica.

Se questa è resa sotto forma di corrente alternata il generatore prende il nome di *alternatore*, se invece è resa sotto forma di corrente continua il generatore si chiama *dinamo*.

Il principio di funzionamento dei generatori elettrici è basato sul fenomeno dell'induzione elettromagnetica e perciò ogni generatore deve essere costituito da due parti fondamentali:

- a) *l'induttore*, che è quella parte destinata alla produzione del flusso magnetico costante;
- b) *l'indotto*, che è quella parte, dotata di conduttori nei quali, per l'intersezione con il flusso magnetico, si producono le f.e.m. e quindi le correnti indotte.

Evidentemente una parte è fissa e prende il nome di *statore*, l'altra deve essere mobile e prende il nome di *rotore*.

Teoricamente è indifferente far ruotare il sistema indotto o il sistema induttore, anche se poi nella pratica è preferibile l'uno o l'altro modo. I generatori elettrici per poter produrre l'energia elettrica devono allora attingere a due fonti di energia e cioè:

- a) *all'energia meccanica*, per mantenere in movimento il rotore e che deve essere uguale, prescindendo dalle perdite, all'energia elettrica che si vuol produrre;
- b) *all'energia elettrica*, a corrente continua che serve a produrre il flusso induttore.

#### 1) Gli alternatori

Gli alternatori hanno solitamente l'indotto fisso (statore) e l'induttore mobile (rotore).

Il sistema indotto è formato da parecchie matasse collegate fra loro in modi opportuni a seconda del sistema di corrente che si vuol ottenere (monofase o trifase), disposte in apposite scanalature o cave lungo la periferia interna di una corona circolare costituente il nucleo magnetico e formata da lamine di ferro dolce isolate tra loro per ridurre al minimo le correnti parassite (fig. 9.8).

Il sistema induttore può avere diverse strutture a seconda della velocità della *motrice prima* e cioè della macchina che fornisce l'energia meccanica necessaria alla produzione dell'energia elettrica.

Comunque è sempre costituito da un cilindro di acciaio dolce presentante sulla periferia esterna due o più *poli magnetici induttori*, costituiti normalmente da elettromagneti alimentati da una corrente continua (corrente di eccitazione)

prelevata da una sorgente esterna (eccitatrice), ed avente negli avvolgimenti verso tale da creare alternativamente delle polarità di nome opposto.

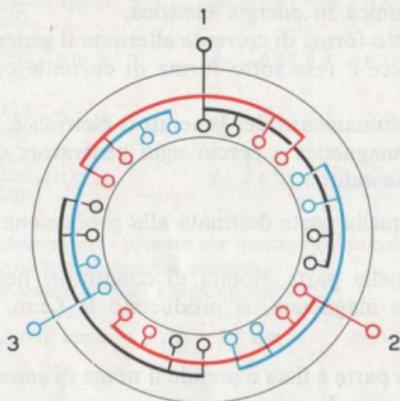


Fig. 9.8 - Indotto di un alternatore trifase.

L'induttore deve portare allora sull'albero due anelli isolati connessi con gli estremi degli avvolgimenti degli elettromagneti, su cui appoggiano le spazzole collegate con l'eccitatrice.

Le differenze strutturali degli alternatori dipendono dal numero dei giri che il rotore deve compiere.

Infatti uno dei dati fondamentali relativi al funzionamento di un alternatore è la *frequenza* che si vuol ottenere.

È evidente che se l'induttore è dotato di due soli poli, induce nelle matasse una f.e.m. avente una frequenza uguale al numero dei giri al secondo  $n$  dell'induttore stesso:

$$f = pn,$$

dove  $p$  è il numero delle coppie di poli.

Volendo esprimere la velocità in giri al minuto primo  $N$  e chiamando con la lettera  $P$  il numero dei poli, la frequenza viene calcolata con l'espressione:

$$f = \frac{NP}{120} \quad \text{da cui} \quad N = \frac{120f}{P}. \quad (9.10)$$

Un alternatore dunque per produrre una determinata frequenza  $f$  deve compiere un numero di giri  $N$  inversamente proporzionale al numero dei poli  $P$ .

Per ottenere quindi la frequenza industriale unificata di  $50 \text{ Hz}$ , il rotore deve compiere 3.000 giri al minuto primo se è a due poli, 1.500 se è a quattro poli,

500 se è a sei poli, ecc., per cui il numero dei poli e quindi la struttura della macchina deve essere studiata in base alla velocità della motrice prima.

Se la motrice prima è una turbina a vapore (gli alternatori in tal caso prendono il nome di turboalternatori), che raggiunge forti velocità angolari, la struttura del rotore deve essere particolarmente robusta e il suo diametro limitato.

In tal caso viene adottato un *induttore liscio* a due o a quattro poli incassati, come rappresentato in figura 9.9.

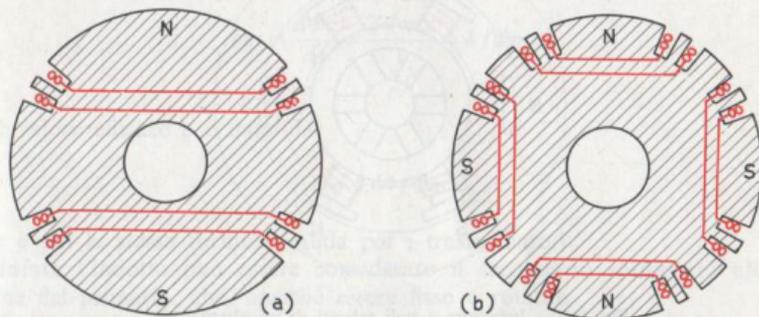


Fig. 9.9 - Induttore liscio a due (a) e a quattro (b) poli per alternatore.

Il nucleo è cioè scanalato per poter incassare gli avvolgimenti induttori, ossia le bobine di eccitazione o di campo che, percorse da corrente continua, producono il flusso magnetico induttore e cioè i poli induttori N e S.

Le scanalature vengono poi chiuse da biette e riempite allo scopo di tenere serrate le bobine perché resistano alla forza centrifuga e di ottenere una superficie esterna completamente liscia onde ridurre al minimo la resistenza dell'aria durante la velocissima rotazione dell'induttore.

Inoltre l'induttore (e di conseguenza anche l'indotto), affinché non risulti eccessiva la sua velocità periferica e affinché le sollecitazioni derivanti dalla forza centrifuga rimangano contenute entro i limiti di sicurezza, deve essere di piccolo diametro (50-60 cm).

Cosicché, per ottenere potenze elettriche rilevanti, l'alternatore deve essere piuttosto lungo (anche parecchi metri).

Se la motrice è lenta, come nel caso delle turbine idrauliche, viene adottato un induttore provvisto di un maggior numero di poli (da 8 per turbine Pelton, a 32 ÷ 36 per turbine più lente).

I poli sono in tal caso *salienti* e cioè sono fissati radialmente sulla periferia esterna di una corona di acciaio dolce fissata al perno a mezzo di robuste razze (fig. 9.10).

I poli terminano con le così dette *espansioni polari*, quasi sempre costituite da lamierini di ferro dolce e aventi un profilo opportunamente studiato onde

ottenere una f.e.m. indotta di forma il più vicina possibile a quella sinusoidale.

In tal caso l'induttore deve avere grande diametro allo scopo di ottenere una discreta velocità periferica, pur essendo limitata la velocità angolare, per cui l'alternatore si presenta di grande diametro e di limitata lunghezza.

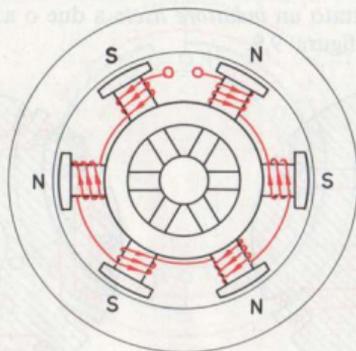


Fig. 9.10 - Induttore a poli salienti di un alternatore.

Per piccole potenze l'alternatore può essere azionato da motori Diesel, da motori a scoppio od anche da motori elettrici.

Abbiamo detto che l'eccitazione dell'alternatore è ottenuta inviando nelle matasse di campo una corrente continua generalmente fornita da una dinamo, che solitamente è montata sullo stesso asse dell'alternatore.

Le bobine di campo sono sempre collegate in serie tra loro cosicché, essendo percorse dalla stessa corrente, provocano la stessa f.m.m. e quindi flussi uguali nei vari circuiti magnetici, che devono ovviamente presentare tutti la stessa riluttanza.

Il funzionamento dell'alternatore è lo stesso di quello visto a proposito di una spira rotante in un campo magnetico costante.

Nell'alternatore le spire sono fisse e ruota il campo magnetico.

Consideriamo una qualsiasi spira dell'indotto.

Nel passaggio di fronte ad essa di un polo Nord e del successivo polo Sud, il flusso che si concatena con la stessa spira varia da  $+\Phi m x$  a  $-\Phi m x$ , ossia di  $2\Phi m x$ .

Se l'induttore ha  $P$  poli e fa  $n$  giri al secondo, il tempo impiegato a compiere un giro è  $t = \frac{1}{n}$  e il tempo impiegato dal flusso a compiere la variazione  $2\Phi m x$ , è:

$$t = \frac{1}{nP}.$$

Sostituendo al posto di  $P$  il suo valore ricavato dalla (9.10) si ha:

$$t = \frac{1}{n \cdot \frac{2f}{n}} = \frac{1}{2f}.$$

Il valore medio  $em$  della f.e.m. indotta nella spira è (vedi paragrafo 7.10.):

$$em = \frac{\Delta\Phi c}{\Delta t} = \frac{2 \Phi_{mx}}{\frac{1}{2f}} = 4f\Phi_{mx},$$

e il valore efficace  $e$  è dato da:

$$e = 4,44 f\Phi_{mx},$$

che è poi la stessa formula valida per i trasformatori.

Infatti l'indotto può essere considerato il secondario sottoposto all'induzione del primario, che, anziché essere fisso è rotante.

Se l'avvolgimento dell'indotto è costituito da  $N$  spire in serie, la f.e.m. totale sarebbe data da:

$$E = 4,44 Nf\Phi_{mx}, \quad (9.11)$$

senonché i conduttori disposti in cave adiacenti non producono f.e.m. in fase, ma piuttosto sfasate fra loro, per cui la f.e.m. totale dovendo risultare la somma geometrica delle singole f.e.m., è inferiore a quella che si avrebbe facendo la somma aritmetica. Per questo la (9.11) va moltiplicata per un coefficiente  $Ka$  minore di uno, detto *fattore di avvolgimento*.

Inoltre anche la forma della f.e.m. indotta si discosta da quella sinusoidale, per cui il fattore di forma non vale più 1,11 e viene indicato con  $Kf$ . Si ha allora:

$$E = 4 Ka Kf Nf\Phi_{mx} = 4 KNf\Phi_{mx},$$

dove  $K = Ka \cdot Kf$  prende il nome di *fattore di Kapp*, ed ha valore variabile da 0,92 a 0,96 per le macchine monofase e da 1 a 1,1 per le migliori macchine trifasi.

Osserviamo infine che quando l'alternatore è chiuso in un circuito utilizzatore, la corrente nell'indotto produce i noti fenomeni magnetoelettrici, che determinano una coppia frenante sull'induttore, per cui maggiore è il carico e maggiore è l'energia meccanica che il rotore richiede per compiere lo stesso numero di giri. E ciò in perfetta armonia con il principio della conservazione dell'energia.

## 2) Le dinamo

Le dinamo, contrariamente agli alternatori, hanno l'indotto rotante (rotore) e l'induttore fisso (statore).

L'induttore è costituito da una carcassa o giogo di acciaio dolce di forma anulare, sulla cui periferia interna sono fissati i poli di ferro fucinati o talvolta lamellati. Questi terminano con le espansioni polari foggiate in modo da delimitare uno spazio cilindrico nel quale ruota l'indotto (fig. 9.11).

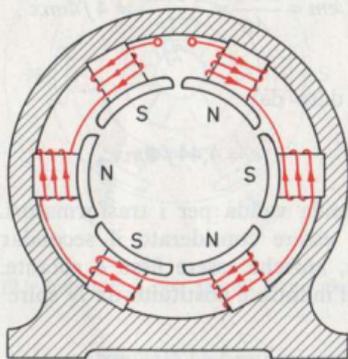


Fig. 9.11 - Induttore a 6 poli di una dinamo.

Tra le espansioni polari e l'indotto il traferro è piccolissimo, sicché le linee di forza magnetiche vengono ad attraversarlo quasi radialmente ed uniformemente.

I poli sono eccitati mediante bobine di campo percorse da una corrente continua di eccitazione, in senso tale da determinare alternativamente polarità di nome opposto.

Le bobine sono sempre collegate in serie tra loro, affinché, percorse dalla stessa intensità di corrente, producano flussi polari identici.

Il sistema indotto è costituito da un pacco cilindrico di lamierini di ferro dolce, isolati fra loro per ostacolare le correnti parassite che si formano durante la rotazione, essendo ogni sezione dell'indotto sottoposta a continue inversioni di flusso.

Gli avvolgimenti indotti sono costituiti da conduttori collegati in serie tra loro in modo da formare un avvolgimento chiuso e vengono fissati in scanalature o cave ricavate longitudinalmente e cioè parallelamente all'asse di rotazione, nel pacco indotto. In tal modo i conduttori possono intersecare perpendicolarmente, durante la rotazione dell'indotto, le linee di flusso magnetico.

Se ora, mediante una motrice, l'indotto viene posto in rotazione, in ogni conduttore attivo dell'avvolgimento si induce una f.e.m. alternata, perché esso passa alternativamente davanti a un polo Nord e ad un polo Sud.

La dinamo funziona dunque come un alternatore, senonché, essendo l'avvolgimento chiuso su se stesso, la somma delle f.e.m. indotte in ciascun conduttore è nulla. Infatti in ciascun istante si ha che il numero dei conduttori sotto un polo  $N$  è uguale al numero dei conduttori sotto un polo  $S$ , e perciò nell'intero avvolgimento le f.e.m. dirette in un senso uguagliano, in ciascun istante, le f.e.m. dirette in senso opposto. In tali condizioni dunque la dinamo non produce alcuna corrente perché la risultante delle f.e.m. indotte nell'avvolgimento è nulla.

Se consideriamo infatti il piano perpendicolare alle linee di forza e quindi all'asse polare di una dinamo a due poli (fig. 9.12) detto *piano neutro* o *piano di commutazione*, possiamo immediatamente accertare, con la consueta regola della mano destra, che tutti i conduttori posti sotto il polo Nord sono sede di f.e.m. dirette nello stesso senso, ma opposte alle f.e.m. indotte in tutti i conduttori posti sotto il polo Sud.

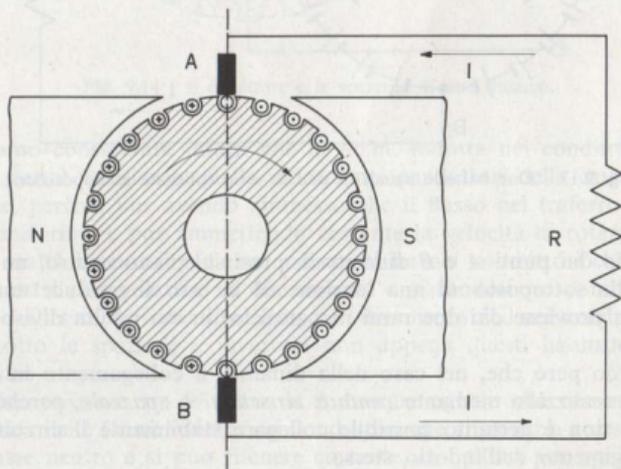


Fig. 9.12 - Schema di una dinamo a due poli.

Si hanno cioè due f.e.m. risultanti uguali ed opposte.

Essendo i conduttori collegati in serie chiusa, possiamo paragonare ciascun conduttore ad una pila e l'avvolgimento indotto ad un circuito chiuso, comprendente due batterie uguali di pile in serie, collegate tra loro in opposizione (fig. 9.13).

Anche in questo caso si hanno due f.e.m. risultanti uguali ed opposte, per cui nel circuito non si ha circolazione di corrente.

Tra i punti *A* e *B* di collegamento delle due batterie in opposizione esiste però una f.e.m. data dalla somma delle f.e.m. di ciascuna pila collegata in serie, per cui derivando da *A* e da *B* un carico *R*, in questo vi è circolazione di corrente proveniente dai due rami del parallelo.

La stessa cosa avviene nell'indotto della dinamo.

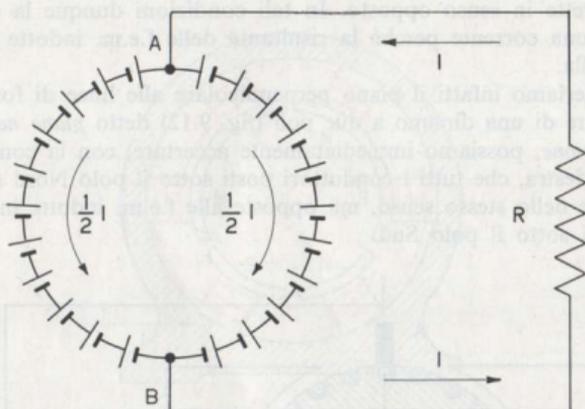


Fig. 9.13 - Due batterie uguali di pile in serie collegate in opposizione.

Derivando dai punti *A* e *B* diametrali, presi sul piano neutro, un carico *R*, questo risulta sottoposto ad una tensione ed in esso si produce una corrente elettrica che proviene dai due rami in parallelo, in cui risulta diviso l'avvolgimento indotto.

Osserviamo però che, nel caso della dinamo, il collegamento in *A* e in *B*, deve essere realizzato mediante *contatti striscianti* o *spazzole*, perché l'indotto è rotante e non è pertanto possibile collegare stabilmente il circuito esterno con l'avvolgimento dell'indotto stesso.

Praticamente le spazzole non appoggiano direttamente sui conduttori, che tra l'altro dovrebbero sporgere dalle cave e dovrebbero essere senza rivestimento isolante almeno nei tratti in corrispondenza alle spazzole, ma appoggiano su uno speciale *commutatore* o *collettore* a segmenti metallici isolati montati su un manicotto isolante sull'albero della dinamo (fig. 9.14).

A ciascun segmento o lamella fa capo la fine di una spirale o di una matasina e l'inizio della successiva.

*Il collettore e le spazzole sono dunque parti integranti della dinamo.*

Il valore della f.e.m. tra i punti  $A$  e  $B$  è, per le pile, la somma aritmetica delle f.e.m. delle pile in serie.

Per le dinamo il valore della f.e.m. tra le spazzole è invece la somma geometrica delle f.e.m. indotte nei conduttori utili che si trovano sotto uno stesso polo.

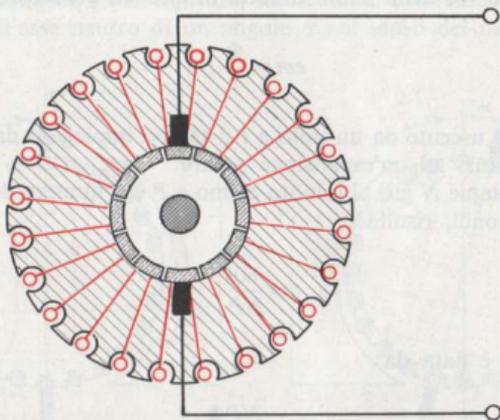


Fig. 9.14 - Il collettore e le spazzole di una dinamo.

Dobbiamo considerare infatti che la f.e.m. indotta nei conduttori posti in una cava non è identica a quella indotta nei conduttori della cava precedente o seguente, perché, pur avendo ammesso che il flusso nel traferro è quasi radiale ed uniforme, e pur ammettendo costante la velocità di rotazione dell'indotto, in realtà la massima f.e.m. indotta si ha nei conduttori che si trovano a passare per l'asse polare e va diminuendo e sfasandosi nei conduttori che si avvicinano all'asse di commutazione, per divenire nulla nei conduttori che si trovano sotto le spazzole e invertirsi non appena questi hanno oltrepassato l'asse neutro.

La f.e.m. esistente tra le spazzole è dunque uguale alla somma vettoriale o geometrica delle f.e.m. indotte nei conduttori che si trovano a destra o a sinistra dell'asse neutro e si può ritenere costante, in quanto per ogni conduttore che avanza nel senso del moto, un altro conduttore viene ad occupare il posto lasciato libero e per ogni conduttore che oltrepassa il piano di commutazione dal polo  $N$  al polo  $S$ , un altro conduttore passa dal polo  $S$  al polo  $N$ , avendosi così in ogni istante uno stesso numero di conduttori da parte e parte dell'asse neutro e simmetricamente disposti.

Per avere una f.e.m. veramente costante, l'indotto dovrebbe però essere a spire serrate, per cui in pratica, essendo le spire dell'avvolgimento distanziate dallo spessore dei denti dell'indotto, la f.e.m. risulta più o meno ondulata.

Al limite, se l'indotto fosse costituito da una sola spira o da una sola matasina disposta su un piano, la f.e.m. che si manifesta tra le spazzole, pur essendo unidirezionale, varierebbe da zero ad un massimo e poi a zero come avviene per le grandezze alternate raddrizzate.

Il valore medio  $em$  della f.e.m. indotta in ciascun conduttore è dato da:

$$em = \frac{\Phi}{t},$$

dove  $\Phi$  è il flusso uscente da un polo e  $t$  il tempo impiegato da un conduttore per passare dinanzi ad un'espansione polare.

Se l'indotto compie  $N$  giri al minuto primo e  $P$  è il numero dei poli, il tempo  $t$  espresso in secondi, risulta:

$$t = \frac{60}{NP},$$

per cui la f.e.m. è data da:

$$em = \frac{NP\Phi}{60}.$$

Se  $Z$  è il numero dei conduttori attivi collegati in serie si ha:

$$Em = \frac{ZNP\Phi}{60}.$$

Se poi l'avvolgimento è costituito da  $A$  rami in parallelo, la f.e.m. complessiva risulta:

$$Em = \frac{ZNP\Phi}{60 A}. \quad (9.12)$$

Poiché per ogni dinamo  $Z$ ,  $P$ ,  $A$ , sono costanti, ponendo:

$$K = \frac{ZP}{60 A},$$

si ha:

$$Em = KN\Phi, \quad (9.13)$$

dalla quale si deduce che la f.e.m. prodotta da una dinamo dipende direttamente dalla velocità di rotazione e dal flusso induttore.

Quando la dinamo è collegata ad un carico  $R$ , la corrente che questo assorbe e che proviene, come abbiamo detto, dai rami del parallelo in cui è suddiviso l'avvolgimento indotto, produce nel circuito magnetico un flusso, detto flusso di reazione, a  $90^\circ$  sul flusso induttore.

Questo, componendosi con il primo, subisce una distorsione con conseguente spostamento dell'asse neutro di un angolo  $\alpha$  nel senso del moto (fig. 9.15).

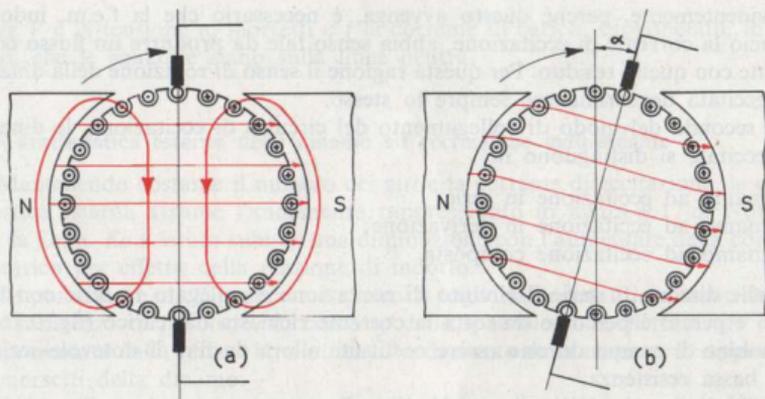


Fig. 9.15 - Il flusso induttore e il flusso indotto (a) si compongono in un flusso distorto (b).

Le spazzole pertanto devono essere spostate del medesimo angolo  $\alpha$ , detto *angolo di calaggio*.

Inoltre, come per gli alternatori, la corrente che percorre gli avvolgimenti dell'indotto produce i fenomeni magnetoelettrici, che determinano una coppia frenante sullo stesso indotto, per cui maggiore è la corrente, e quindi la potenza che la dinamo è chiamata ad erogare, e maggiore è l'energia meccanica che il rotore richiede per mantenere una velocità costante, e cioè per mantenere costante, a parità di eccitazione, la f.e.m. indotta.

L'eccitazione delle dinamo, e cioè l'alimentazione delle bobine di campo dei poli induttori, deve essere fatta, come abbiamo detto, con corrente continua.

Mentre per gli alternatori l'eccitazione è necessariamente sempre indipendente e cioè prodotta da una sorgente indipendente dall'alternatore stesso, per le dinamo è possibile usufruire della stessa corrente continua che esse generano per alimentare le bobine di campo.

Si hanno così:

- a) dinamo ad eccitazione indipendente;
- b) dinamo autoeccitate.

L'autoeccitazione è possibile perché i nuclei indotti conservano sempre un magnetismo residuo che permette di ottenere immediatamente una f.e.m. indotta non appena la dinamo viene messa in moto.

Se il circuito di eccitazione è chiuso, si ha in esso circolazione di corrente che fa crescere il flusso residuo e quindi la f.e.m. indotta, che a sua volta aumenta la corrente di eccitazione e così di seguito fino a raggiungere in brevissimo tempo la saturazione dei nuclei magnetici e cioè la condizione di regime della dinamo.

Evidentemente, perché questo avvenga, è necessario che la f.e.m. indotta, e perciò la corrente di eccitazione, abbia senso tale da produrre un flusso coincidente con quello residuo. Per questa ragione il senso di rotazione della dinamo autoeccitata deve rimanere sempre lo stesso.

A seconda del modo di collegamento del circuito di eccitazione, le dinamo autoeccitate si distinguono in:

- a) dinamo ad eccitazione in serie;
- b) dinamo ad eccitazione in derivazione;
- c) dinamo ad eccitazione composta.

Nelle dinamo in serie il circuito di eccitazione è collegato in serie con l'indotto e perciò è percorso da tutta la corrente richiesta dal carico (fig. 9.16-a). Le bobine di campo devono essere costituite allora da filo di notevole sezione e di bassa resistenza.

Nelle dinamo in derivazione, le bobine di campo sono derivate direttamente dall'indotto per cui risultano in parallelo con il circuito esterno e perciò sono costituite da molte spire di filo sottile e devono avere una resistenza elevata perché sottoposte all'intera tensione di esercizio della dinamo (fig. 9.16-b).

Le dinamo composte portano per ciascun polo due bobine di campo; l'una di poche spire di filo grosso e l'altra di molte spire di filo sottile.

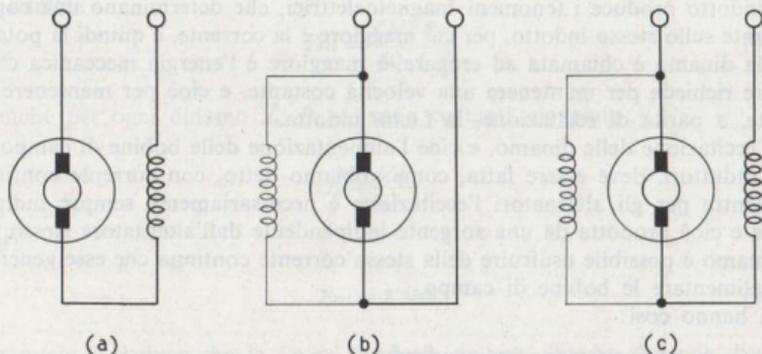


Fig. 9.16 - Dinamo autoeccitate in serie (a) in derivazione (b) e composte (c).

La prima fa parte del circuito di eccitazione in serie, la seconda del circuito di eccitazione in derivazione (fig. 9.16-c).

Al fine di individuare i campi di impiego delle dinamo ad eccitazione indipendente ed autoeccitate, è utile considerare almeno le loro *caratteristiche esterne*, esprimenti la relazione:

$$V = (f)I,$$

dove  $V$  è la tensione ai morsetti e  $I$  la corrente di carico, supponendo, in ogni caso, che le spazzole siano sulla linea neutra.

### a) Caratteristica esterna delle dinamo ad eccitazione indipendente

Mantenendo costante il numero dei giri e la corrente di eccitazione, la caratteristica esterna assume l'andamento rappresentato in figura 9.17-a. Notiamo che la f.e.m.  $E_0$  a vuoto subisce una diminuzione con l'aumentare della corrente di carico per effetto della reazione di indotto.

Se poi alla f.e.m.  $E$  generata a carico si toglie la caduta di tensione dovuta alla resistenza di indotto e di contatto delle spazzole sul collettore,  $\Delta V = RI$ , rappresentata dalla retta  $\Delta V$ , si ottiene l'andamento della tensione  $V$  disponibile ai morsetti della dinamo.

Riducendo a zero la resistenza di carico, la tensione  $V$  si annulla e la caratteristica taglia l'asse delle ascisse in un punto che definisce la *corrente di corto circuito* che, evidentemente, essendo molto maggiore di quella che la dinamo può erogare in condizioni normali di funzionamento, è da evitare in modo assoluto.

Le dinamo ad eccitazione indipendente sono particolarmente adatte a realizzare un funzionamento a tensione indipendente dal carico.

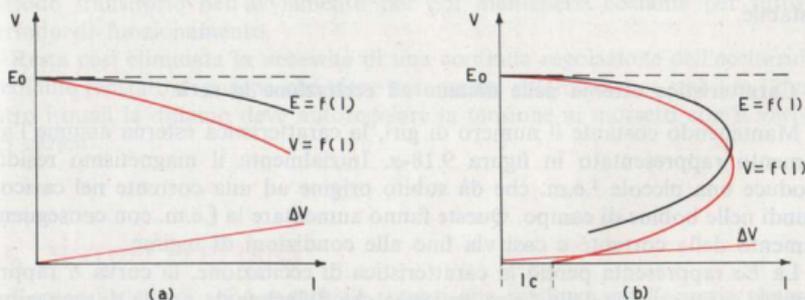


Fig. 9.17 - Caratteristiche esterne della dinamo ad eccitazione indipendente (a) e ad eccitazione derivata (b).

Infatti, variando il carico entro certi limiti, la tensione ai morsetti può essere mantenuta costante se corrispondentemente si fa variare la f.e.m. regolando la corrente di eccitazione mediante apposito reostato, detto *reostato di campo*. Allo stesso modo si può variare entro ampi limiti la tensione ai morsetti, a carico costante, conservando un funzionamento stabile.

#### b) Caratteristica esterna della dinamo ad eccitazione derivata

Mantenendo costante il numero dei giri, la caratteristica esterna assume l'andamento rappresentato in figura 9.17-*b*.

Nel tratto superiore essa non differisce di molto da quella della dinamo ad eccitazione indipendente, è solamente più inclinata in quanto via via che aumenta il carico, diminuisce la tensione, e perciò decresce la corrente di eccitazione e quindi la f.e.m. generata.

Ad un certo momento la caratteristica discende però bruscamente e ripiega verso l'origine degli assi. Ciò significa che a partire da un certo valore di corrente (detto valore critico), la tensione ai morsetti non riesce a sostenere la corrente di eccitazione, per cui sia la corrente nel carico che la tensione ai morsetti decrescono entrambe, con conseguente instabilità di funzionamento.

Per tensione nulla (corto circuito), la corrente di eccitazione è nulla, e nel carico la corrente è relativamente piccola perché sostenuta solo dalla f.e.m. dovuta al magnetismo residuo.

La dinamo viene fatta lavorare solo nel tratto superiore della caratteristica, ossia nel tratto stabile. Perciò è adatta per un funzionamento a tensione costante potendosi facilmente compensare le cadute di tensione regolando il reostato di campo e quindi la corrente di eccitazione.

Per contro la dinamo ad eccitazione derivata si presta male quando si vuole regolare la tensione entro ampi limiti, perché il punto di funzionamento si porterebbe oltre il ginocchio della caratteristica e quindi nel tratto di funzionamento instabile.

#### c) Caratteristica esterna delle dinamo ad eccitazione in serie

Mantenendo costante il numero di giri, la caratteristica esterna assume l'andamento rappresentato in figura 9.18-*a*. Inizialmente il magnetismo residuo produce una piccola f.e.m. che dà subito origine ad una corrente nel carico e quindi nelle bobine di campo. Queste fanno aumentare la f.e.m. con conseguente aumento della corrente e così via fino alle condizioni di regime.

La  $E_0$  rappresenta perciò la caratteristica di eccitazione, la curva  $E$  rappresenta la caratteristica della f.e.m. generata che differisce da quella di eccitazione per effetto della reazione di indotto; la caratteristica esterna  $V$  differisce da quella della  $E$  per effetto delle cadute di tensione nell'indotto e nelle bobine di campo.

Dall'andamento della caratteristica esterna risulta evidente che la dinamo ad eccitazione in serie non si presta per un funzionamento a tensione costante ed è perciò usata raramente, ossia solo nei casi in cui il carico, fortemente variabile, non richiede tensioni costanti.

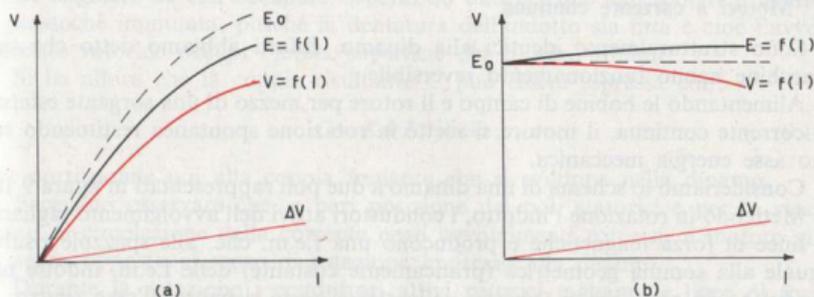


Fig. 9.18 - Caratteristica esterna della dinamo ad eccitazione in serie (a) e ad eccitazione composta (b).

#### d) Caratteristica esterna delle dinamo ad eccitazione composta

Per un numero di giri costante, la caratteristica esterna assume l'andamento di figura 9.18-b.

L'eccitazione serie serve solo a compensare la caduta di tensione interna con un aumento della f.e.m. indotta provocata dall'aumento della corrente di carico. L'effetto predominante è dell'eccitazione derivata, regolando la quale si può ottenere una tensione pressoché costante per qualunque carico.

Le dinamo ad eccitazione composta vengono perciò impiegate quando il carico è continuamente variabile, oppure quando è fortemente variabile nel periodo transitorio dell'avviamento per poi mantenersi costante per tutto il periodo di funzionamento.

Resta così eliminata la necessità di una continua regolazione dell'eccitazione mediante reostato di campo che viene manovrato solamente per stabilire i limiti entro i quali la dinamo deve autoregolare la tensione ai morsetti con il variare del carico.

## 9.4. MOTORI ELETTRICI

I motori elettrici sono macchine rotanti che trasformano l'energia elettrica in energia meccanica. Il loro principio di funzionamento è basato sui fenomeni dell'induzione elettromagnetica e sui fenomeni magnetoelettrici.

I motori elettrici si dividono in due categorie principali a secondo di come sono alimentati e cioè: a *corrente continua* o a *corrente alternata*.

Questi ultimi si dividono a loro volta in motori *sincroni* e in motori *asincroni*.

### 1) Motori a corrente continua

Sono strutturalmente identici alla dinamo. Infatti abbiamo detto che tali macchine hanno funzionamento reversibile.

Alimentando le bobine di campo e il rotore per mezzo di una sorgente esterna di corrente continua, il motore si mette in rotazione spontanea restituendo sul suo asse energia meccanica.

Consideriamo lo schema di una dinamo a due poli rappresentati in figura 9.12.

Mettendo in rotazione l'indotto, i conduttori attivi dell'avvolgimento tagliano le linee di forza magnetiche e producono una f.e.m. che, alle spazzole risulta uguale alla somma geometrica (praticamente costante) delle f.e.m. indotte nei conduttori in serie che si trovano dalla stessa parte rispetto all'asse neutro.

La direzione della f.e.m. risultante, e quindi della corrente, dipende dal senso di rotazione dell'indotto.

La corrente del circuito esterno proviene dai rami del parallelo in cui risulta suddiviso l'avvolgimento rispetto alla posizione delle spazzole.

Ciò significa che i conduttori alla destra del piano neutro sono percorsi da corrente in senso opposto a quella che percorre i conduttori alla sinistra dello stesso piano neutro.

Abbiamo accennato anche al fenomeno magnetoelettrico e cioè alla reazione tra il flusso prodotto dalle correnti indotte e il flusso induttore e di conseguenza al formarsi di una coppia frenante e cioè di una coppia che, per la legge di Lenz, si oppone al moto impresso alla dinamo.

Se ora, anziché applicare all'albero una motrice prima che mette in rotazione l'indotto, alimentiamo mediante una sorgente di corrente continua non solo le bobine di campo, ma anche l'indotto attraverso le spazzole, la corrente si suddivide nei rami in parallelo dell'avvolgimento percorrendoli, come detto prima, in senso opposto.

Per il fenomeno magnetoelettrico ciascun conduttore riceve, nel senso determinato dalla regola di Fleming della mano sinistra, una spinta trasversale al flusso (vedi paragrafo 7.8.).

$$F = B I l ,$$

avente una componente  $f = F \cos \alpha$  perpendicolare al raggio, essendo  $\alpha$  l'angolo formato dalla direzione del moto con la forza  $F$  normale al flusso.

Si produce cioè una coppia motrice che dipende dalle componenti tangenziali e si osserva subito che tale coppia è massima per i conduttori che si trovano sull'asse polare ed è nulla per i conduttori che si trovano sotto le spazzole e cioè sull'asse neutro.

La coppia complessiva è però da ritenersi costante se consideriamo che la somma vettoriale delle forze tangenziali agenti sui conduttori percorsi da corrente nello stesso senso è pressoché costante, perché, in ogni istante, si può ritenere che il numero dei conduttori sotto ciascun polo è costante e che la posizione angolare da essi occupata rispetto ad uno dei due assi (polari o neutro) è pressoché immutata, purché la dentatura dell'indotto sia fitta e cioè l'avvolgimento rotorico occupi l'intera superficie del cilindro rotante.

Si ha allora che la coppia risultante  $C$  può essere espressa con:

$$C = K\Phi I \text{ joule ,} \quad (9.14)$$

che corrisponde poi alla coppia frenante che si sviluppa nella dinamo.

Facciamo osservare che, a pari posizione dei poli statorici e per lo stesso senso di circolazione della corrente negli avvolgimenti rotorici, il motore gira in senso opposto al senso di rotazione impresso alla dinamo.

Durante la rotazione i conduttori attivi rotorici tagliano le linee di forza del campo magnetico e perciò diventano sede di una f.e.m. indotta, come se si trattasse di conduttori attivi di una dinamo.

L'avvolgimento rotorico sviluppa cioè durante la rotazione, una f.e.m. totale che vale, come per le dinamo:

$$E = KN\Phi = \frac{ZPN\Phi}{60 A} . \quad (9.15)$$

Applicando la regola di Fleming della mano destra, si constata che tale f.e.m. fa circolare una corrente in senso opposto a quella di alimentazione e quindi la  $E$  ha verso opposto alla tensione applicata  $V$ . È cioè una forza controelettrica (f.c.e.m.).

Il motore è dunque un carico attivo e per esso vale la legge di Ohm relativa ai carichi attivi.

$$V = R_o \cdot I + E , \quad (9.16)$$

dove  $R_o$  è la resistenza complessiva degli avvolgimenti rotorici e di contatto fra le spazzole ed il collettore. Tale resistenza si fa sempre piccola onde limitare le perdite per effetto Joule e la caduta di tensione interna del rotore.

Moltiplicando ambo i membri della (9.16) per  $I$  si ha:

$$V \cdot I = R_o I^2 + E \cdot I ,$$

dove  $VI$  è la potenza elettrica assorbita dal motore,  $R_o I^2$  la potenza dissipata in calore e  $EI$  è la potenza elettrica che si trasforma in potenza meccanica.

Di quest'ultima potenza una piccola parte dovrà servire alle perdite di potenza per attriti, per ventilazione e nel ferro del rotore, mentre tutta l'altra parte verrà sviluppata all'albero del motore.

Il motore dunque assorbe dalla rete una corrente:

$$I = \frac{V - E}{R_o},$$

che varia solo in funzione della f.e.m.  $E$ , essendo la tensione  $V$  di alimentazione e la resistenza interna  $R_o$  costanti.

Da quanto esposto si deduce che se il motore gira a vuoto, perché non collegato ad alcuna macchina operatrice, esso deve compiere, per un certo flusso  $\Phi$  induttore, un numero  $N$  di giri al minuto primo, tale da provocare una f.c.e.m.  $E$ , e quindi una potenza meccanica, sufficiente a compensare le perdite rotiche del motore stesso.

Se invece viene caricato, esso deve sviluppare anche la potenza meccanica richiesta dalla macchina operatrice. Deve cioè sviluppare una maggiore coppia e quindi assorbire dalla rete una maggiore corrente e cioè una maggiore potenza.

Infatti, il motore più è caricato e più viene frenato con conseguente diminuzione del numero di giri  $N$  e della f.c.e.m.  $E$ . Aumenta allora la corrente e quindi la potenza elettrica assorbita. Il motore cioè proporziona automaticamente il suo assorbimento di potenza elettrica alla potenza meccanica che è chiamato a sviluppare. È cioè una macchina *autoregolatrice*.

Per individuare però il campo di impiego dei motori a corrente continua occorre distinguere i motori ad eccitazione derivata da quelli ad eccitazione in serie e considerare di ciascuno la caratteristica meccanica che esprime la funzione:

$$N = (f)C,$$

ossia il modo con cui varia il numero  $N$  dei giri in funzione della coppia motrice  $C$ .

Per i motori in derivazione, fermo restando il valore della tensione di alimentazione e perciò della corrente di eccitazione, la caratteristica meccanica assume l'andamento di figura 9.19-*a*.

Infatti dalle note relazioni:

$$N = \frac{E}{K\Phi} = \frac{V - R_o I}{K\Phi} \quad \text{e} \quad C = K\Phi I,$$

si deduce che, poiché il flusso induttore  $\Phi$  rimane costante, se il motore rallenta di poco diminuisce leggermente la f.c.e.m. ed aumenta di molto la corrente  $I$ . Perciò la coppia motrice aumenta sensibilmente mentre il numero dei giri diminuisce di poco per il fatto che la caduta interna  $IR_o$ , nelle normali condizioni di funzionamento, varia di poco, ossia dall'1% al 5% della  $V$ .

Pertanto, dato che la velocità varia pochissimo con il variar del carico, i motori in derivazione hanno un funzionamento stabile e vengono impiegati perciò

anche nei casi in cui la coppia resistente è fortemente variabile; al limite, se il motore funzionasse a vuoto, il suo numero di giri rimane entro limiti pienamente tollerabili.

La caratteristica meccanica dei motori ad eccitazione in serie, fermo restando il valore della tensione di alimentazione, assume invece l'andamento di figura 9.19-*b*.

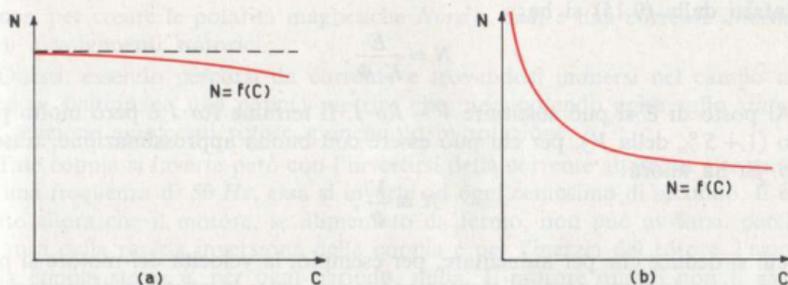


Fig. 9.19 - Caratteristiche meccaniche dei motori ad eccitazione derivata (a) e ad eccitazione in serie (b).

Infatti, perché in un motore aumenti anche di poco la coppia motrice, deve aumentare la corrente assorbita che, nei motori in serie, fa aumentare l'eccitazione e quindi il flusso induttore. Ma perché aumenti la corrente deve diminuire la f.c.e.m. prodotta da un flusso magnetico che è invece in aumento. Il motore dovrà compiere allora un numero sensibilmente minore di giri, vale a dire che la sua velocità deve diminuire notevolmente con l'aumentare del carico. Per contro, un motore in serie che funziona a vuoto, dovendo assorbire una corrente piccolissima deve accelerare fortemente per sviluppare tutta la f.c.e.m. richiesta con il debole flusso rimasto: esso assume quindi una velocità tanto elevata da compromettere la struttura meccanica del rotore.

Il motore in serie trova perciò larga applicazione in tutti i casi in cui, come quello della trazione elettrica (treni, filobus, tram, carrelli trasportatori, ecc.) è necessaria una velocità fortemente variabile con il carico, mentre non è impiegabile nei casi in cui la coppia resistente può annullarsi o scendere al di sotto di determinati valori.

I motori a corrente continua sviluppano una grande coppia di spunto. Infatti, a rotore fermo, la f.c.e.m. è nulla, per cui il motore assorbe la sua massima corrente dovuta al rapporto tra la tensione applicata a  $V$  e la resistenza interna  $R_0$ . La coppia, essendo una funzione diretta della corrente, è pure massima.

Per limitare la corrente di spunto o di avviamento entro un valore tollerabile, si dispone in serie con il rotore un reostato di avviamento che viene gradatamente escluso via via che il motore accelera e sviluppa la f.c.e.m.  $E$  progressivamente crescente.

La velocità del motore a corrente continua è facilmente regolabile entro ampi limiti, agendo o sulla tensione di alimentazione o sulla corrente di eccitazione e cioè sul flusso induttore.

Infatti dalla (9.15) si ha:

$$N = \frac{E}{K \cdot \Phi}.$$

Al posto di  $E$  si può sostituire  $V - R_o \cdot I$ . Il termine  $R_o \cdot I$  è però molto piccolo ( $1 \div 5\%$  della  $V$ ), per cui può essere con buona approssimazione, trascurato. Si ha allora:

$$N \cong \frac{V}{\Phi},$$

da cui si deduce che per aumentare, per esempio, la velocità del motore si può o aumentare la tensione di alimentazione o diminuire la corrente di eccitazione delle bobine di campo.

Per invertire il senso di rotazione del motore bisogna invertire o le polarità dello statore oppure quelle del rotore. È superfluo dire che invertendo sia le polarità rotoriche che statoriche, la coppia motrice si sviluppa sempre nello stesso senso.

I sistemi di eccitazione dei motori sono gli stessi visti per le dinamo.

Osserviamo infine che la f.c.e.m. dà origine ad una corrente nel rotore che produce un flusso magnetico di reazione a  $90^\circ$  sul flusso induttore. Si ha, come per le dinamo, un flusso risultante distorto che però, per il motore, sposta l'asse neutro di un angolo  $\alpha$ , detto ancora *angolo di calaggio*, in senso opposto al moto. Pertanto anche le spazzole devono essere spostate dello stesso angolo in senso opposto al moto del rotore.

## 2) Motori sincroni

Come la dinamo, anche l'alternatore è una macchina a funzionamento reversibile in quanto genera energia elettrica, sotto forma di corrente alternata, quando è mantenuta in rotazione, ma può al contrario sviluppare energia meccanica, quando l'indotto viene alimentato in corrente alternata. In tal caso la macchina funziona da motore avente come caratteristica fondamentale quella di mantenere, in ogni caso, una velocità costante, rigorosamente legata alla frequenza  $f$  della corrente di alimentazione, secondo l'espressione valida per gli alternatori:

$$N = \frac{120 f}{P},$$

dove  $N$  è il numero dei giri al minuto primo e  $P$  il numero dei poli. Per questo la macchina prende il nome di *motore sincrono*.

Premesso che nel motore non si hanno in realtà un circuito indotto e un circuito induttore, ma solo due circuiti alimentati e reagenti reciprocamente (effetto magnetoelettrico), le parti fissa e rotante vengono designate rispettivamente con il nome di *statore* e di *rotore*.

Supponiamo ora di inviare una corrente continua nelle bobine di campo del rotore, per creare le polarità magnetiche *Nord* e *Sud*, e una corrente alternata negli avvolgimenti statorici.

Questi, essendo percorsi da corrente e trovandosi immersi nel campo magnetico, sviluppano una coppia motrice che, non potendo agire sullo statore, per reazione agisce sul rotore, ponendolo in rotazione.

Tale coppia si inverte però con l'invertirsi della corrente alternata e se questa ha una frequenza di  $50\text{ Hz}$ , essa si inverte ad ogni centesimo di secondo. È evidente allora che il motore, se alimentato da fermo, non può avviarsi, perché, a causa della rapida inversione della coppia e per l'inerzia del rotore, l'azione della coppia stessa è, per ogni periodo, nulla. Il motore quindi non si avvia.

Occorre, mediante una coppia motrice esterna, imprimere alla ruota polare una velocità tale che la forza tangenziale che si sviluppa su un conduttore possa invertirsi nello stesso tempo che impiega il rotore a sostituire, rispetto alla posizione del conduttore stesso, un polo con un polo di nome contrario.

Solo se sarà soddisfatta questa esigenza, il motore potrà mantenersi in moto nel senso di rotazione impressogli.

Il motore sincrono deve quindi essere avviato con un motore di lancio.

Per quanto riguarda poi il modo con cui deve essere intesa la condizione di sincronismo, notiamo che i motori sincroni devono essere avviati a vuoto e il loro funzionamento risente notevolmente delle brusche variazioni di carico, per cui essi tendono a mantenere il sincronismo solo quando le variazioni di carico non sono troppo rapide.

I motori sincroni trifasi possono essere avviati come motori asincroni, che vedremo al punto 3, ma risultano più complessi negli avvolgimenti statorici e negli organi sussidiari di collegamento.

L'importanza industriale dei motori sincroni è perciò limitatissima, avendosi motori più pratici e robusti, quali sono i motori asincroni.

L'applicazione del motore sincrono è cioè limitata a quei casi in cui necessita sfruttare più che la sua potenza meccanica, una sua particolare condizione di funzionamento.

Infatti i motori sincroni possono assorbire dalla rete di alimentazione una corrente più o meno intensa, in fase, oppure in ritardo, oppure in anticipo sulla tensione, con la semplice regolazione della corrente di eccitazione e precisamente la corrente rifasa ed anticipa con l'aumentare dell'eccitazione stessa.

Questa proprietà permette di utilizzare i motori sincroni come rifasatori e cioè come condensatori rotanti negli impianti industriali a basso fattore di potenza.

### 3) Motori asincroni

La più importante e la più diffusa categoria di motori industriali è rappresentata dai *motori asincroni*.

Caratteristica fondamentale di tali motori è quella di non richiedere l'alimentazione del rotore, ma di sfruttare le correnti che vi nascono per induzione elettromagnetica, come avviene nel secondario dei trasformatori, quando il primario, che nei motori è costituito dagli avvolgimenti statorici, è alimentato con una corrente alternata.

Per questo sono detti anche *motori ad induzione*.

Da qui i grandi pregi di semplicità costruttiva, di solidità e di economia di questi motori, che non abbisognano né di anelli, né di collettori con spazzole striscianti, come per gli altri motori accennati precedentemente.

Il principio di funzionamento dei motori asincroni è basato sul *campo magnetico rotante*, detto anche campo rotante Ferraris studiato dallo scienziato italiano Galileo Ferraris.

Si definisce *campo rotante un campo magnetico di intensità costante che ruota con velocità uniforme intorno ad un asse ad esso perpendicolare*.

Un campo siffatto potrebbe essere generato dalla rotazione di un magnete permanente, ma più propriamente il campo rotante Ferraris viene generato per mezzo di avvolgimenti fissi, eccitati con correnti alternate opportunamente sfasate.

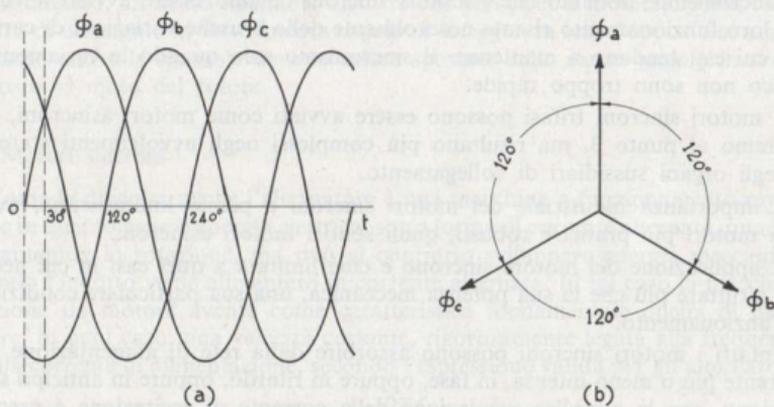


Fig. 9.20 - I flussi magnetici statorici di un motore asincrono trifase.

Per comprendere come sia possibile ottenere un campo magnetico rotante mediante campi magnetici alternati prodotti da correnti alternate sfasate tra loro, consideriamo un sistema trifase equilibrato e simmetrico.

Le tre correnti uguali di intensità, inviate in tre avvolgimenti di egual numero di spire, e spostati nello spazio di  $120^\circ$  l'uno dall'altro generano tre flussi identici sfasati reciprocamente di  $120^\circ$  nel tempo e nello spazio (fig. 9.20), rappresentabili da tre vettori pure a  $120^\circ$  l'uno dall'altro.

Più propriamente ciascun flusso è rappresentabile con un vettore avente direzione fissa (quella dell'asse dell'avvolgimento) e modulo variabile con legge sinusoidali in funzione del tempo. A tale vettore si dà il nome di *vettore alternativo*.

Vogliamo dimostrare che la risultante dei tre flussi magnetici è un flusso di intensità costante che ruota con velocità uniforme intorno all'asse passante per il punto di intersezione dei tre vettori e nel senso ciclico delle tre fasi A, B e C.

Consideriamo i valori istantanei delle tre correnti e quindi dei tre flussi magnetici a partire dall'istante zero corrispondente all'inizio della fase A. Se con  $\Phi$  indichiamo il valore massimo di ciascun flusso, si ha per la fase A:

$$\Phi_a = \Phi \sin 0^\circ = \text{zero},$$

per la fase B, in ritardo di  $120^\circ$  su A:

$$\Phi_b = \Phi \sin (-120^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Phi,$$

per la fase C, in ritardo di  $240^\circ$  su A:

$$\Phi_c = \Phi \sin (-240^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi.$$

Si ottiene il grafico di figura 9.21-a.

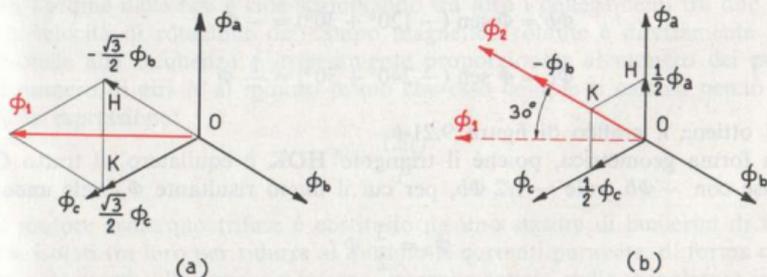


Fig. 9.21 - Il campo magnetico rotante generato da un sistema trifase.

In forma trigonometrica, considerando che il triangolo HOK è equilatero, la somma  $\Phi_1$  dei tre flussi (essendo  $\Phi_a = \text{zero}$ ) è data da:

$$\Phi_1 = 2 \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi \cos 30^\circ = \frac{3}{2} \Phi .$$

Quindi il flusso risultante dalla somma dei tre flussi è uguale a 1,5 volte il valore del flusso massimo e, come si può osservare dalla costruzione grafica, viene a trovarsi nello spazio a  $90^\circ$  in anticipo sull'asse dell'avvolgimento A.

In forma simbolica, per calcolare la somma  $\Phi_1$  dei tre vettori, occorre individuare dapprima le coordinate cartesiane di ciascun flusso.

$$\Phi_a = \text{zero} ,$$

$$\Phi_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi (\cos 150^\circ + j \sin 150^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) ,$$

$$\Phi_c = \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi (\cos 210^\circ + j \sin 210^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) ,$$

per cui:

$$\Phi = \Phi_a + \Phi_b = \frac{\sqrt{3}}{2} \Phi \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = -\frac{3}{2} \Phi + j0 ,$$

da cui si deduce che il flusso risultante è un vettore che ha per modulo il valore 1,5 volte il flusso massimo e per argomento  $180^\circ$ . Infatti viene a trovarsi sull'asse reale negativo, vale a dire a  $90^\circ$  in anticipo sull'asse dell'avvolgimento A, come già dimostrato.

Se ora consideriamo l'istante corrispondente a  $30^\circ$  dall'inizio della fase A, i tre flussi hanno i seguenti valori istantanei:

$$\Phi_a = \Phi \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \Phi ,$$

$$\Phi_b = \Phi \sin (-120^\circ + 30^\circ) = -\Phi ,$$

$$\Phi_c = \Phi \sin (-240^\circ + 30^\circ) = \frac{1}{2} \Phi .$$

Si ottiene il grafico di figura 9.21-b.

In forma geometrica, poiché il triangolo HOK è equilatero, il tratto OK, in fase con  $-\Phi_b$ , vale  $-1/2 \Phi_b$ , per cui il flusso risultante  $\Phi_2$  vale ancora:

$$\Phi_2 = \frac{3}{2} \Phi ,$$

ma risulta ruotato di  $30^\circ$  rispetto al precedente nel verso ciclico delle tre fasi.

In forma simbolica, considerando che le coordinate cartesiane dei tre vettori sono:

$$\Phi_a = \frac{1}{2} \Phi (\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ) = j \frac{1}{2} \Phi,$$

$$\Phi_b = \Phi (\cos 150^\circ + j \sin 150^\circ) = \Phi \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right),$$

$$\Phi_c = \frac{1}{2} \Phi (\cos 210^\circ + j \sin 210^\circ) = \frac{1}{2} \Phi \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right),$$

la somma  $\Phi_2$  dei tre flussi è un numero complesso che vale:

$$\Phi_2 = j \frac{1}{2} \Phi + \Phi \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} + j \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \Phi \left( -\frac{\sqrt{3}}{2} - j \frac{1}{2} \right) = \Phi \left( -\frac{3\sqrt{3}}{4} + j \frac{3}{4} \right),$$

che ha per modulo  $3/2 \Phi$  e per argomento  $150^\circ$ . Da ciò si deduce che il flusso risultante è ancora 1,5 volte il flusso massimo, ma ha ruotato rispetto al precedente di  $30^\circ$  nel verso ciclico delle tre fasi.

Allo stesso risultato si perviene considerando altri istanti successivi del periodo: si avrà solo un diverso orientamento istantaneo del campo magnetico risultante.

Si conclude quindi che il campo risultante di tre campi sinusoidali spostati reciprocamente di  $120^\circ$ , è un campo magnetico costante, rotante nel senso ciclico e uguale 1,5 volte l'intensità massima del campo di ogni fase.

L'intensità del campo rotante è legata al sistema e alla forma delle correnti adottate.

In pratica i campi componenti non hanno mai forma perfettamente sinusoidale per cui il campo risultante varia di intensità da istante a istante.

Per i sistemi trifasi il suo valore oscilla da 1,5 a 2 volte l'intensità dei campi componenti.

Il senso di rotazione del campo magnetico rotante può venir invertito, invertendo l'ordine delle fasi e cioè scambiando tra loro i collegamenti tra due fasi.

La velocità di rotazione del campo magnetico rotante è direttamente proporzionale alla frequenza e inversamente proporzionale al numero dei poli.

Il numero di giri  $N$  al minuto primo che esso compie si calcola perciò con la nota espressione:

$$N = \frac{120f}{P}.$$

Il motore asincrono trifase è costituito da uno statore di lamierini di ferro dolce, isolati tra loro per ridurre al minimo le correnti parassite, di forma cilindrica e portante sulla periferia interna, in senso assiale, delle scanalature in cui vengono alloggiati i tre avvolgimenti statorici.

Questi sono spostati nello spazio secondo angoli e disposizioni opportuni allo scopo di ottenere il numero di poli desiderati, e fanno capo a sei morsetti distinti, due per ogni fase, posti all'esterno dello statore, per poter effettuare il collegamento a stella o il collegamento a triangolo (fig. 9.22) e quindi adattare il motore a due distinte tensioni di rete, l'una 1,73 volte maggiore dell'altra.

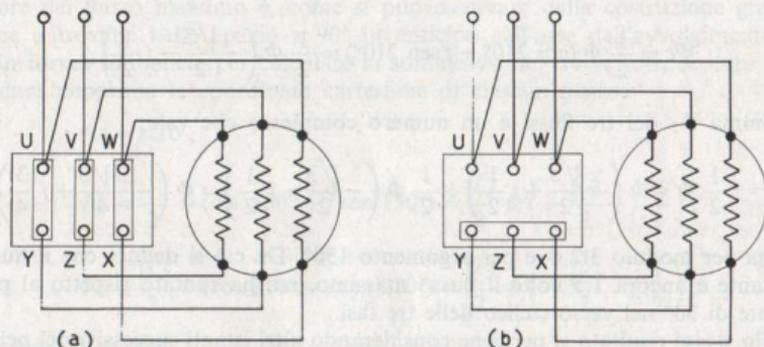


Fig. 9.22 - Collegamento a triangolo (a) e a stella (b) di un motore asincrono.

Lo statore, alimentato dalla corrente alternata trifase, è dunque la parte del motore destinata a produrre il campo magnetico rotante.

Il rotore può essere di due tipi: a gabbia ed avvolto.

In entrambi i casi l'avvolgimento è sempre chiuso su se stesso.

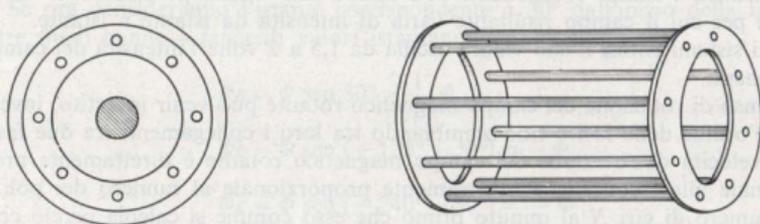


Fig. 9.23 - Il rotore a gabbia di un motore asincrono.

Il rotore a gabbia è costituito da un cilindro di lamierini di ferro entro il quale sono disposte, verso la superficie esterna, delle barrette di rame chiuse in corto circuito sulle facce frontali a mezzo di due anelli anch'essi di rame (fig. 9.23).

Vediamo ora per quale fenomeno un rotore a gabbia viene trascinato in rotazione dal campo rotante.

Quando lo statore viene alimentato dalla corrente trifase, il campo rotante da questo generato, taglia con velocità  $N$ , detta *velocità di sincronismo*, le barrette della gabbia, inducendo in ciascuna di esse una f.e.m. indotta e quindi una intensa corrente, data l'impedenza minima della gabbia.

Le f.e.m., e quindi le correnti indotte, sono uguali fra loro ma spostate l'una rispetto l'altra di un angolo  $\alpha = 360^\circ/Z$ , dove  $Z$  è il numero delle barrette.

Tali correnti determinano a loro volta un campo indotto rotante con la stessa velocità  $N$  e nello stesso senso del campo rotante induttore.

Dalla reazione tra i due campi nasce la coppia motrice che trascina in rotazione la gabbia e quindi il rotore.

Infatti se consideriamo l'istante in cui il campo rotante si trova nella posizione  $NS$  (fig. 9.24), nei conduttori sotto il polo  $N$  si induce una corrente che, secondo la regola di Fleming della mano destra per le correnti reali od elettroniche, è entrante (rappresentata con la crocetta), mentre sotto il polo  $S$  induce una corrente uscente (rappresentata con il puntino).

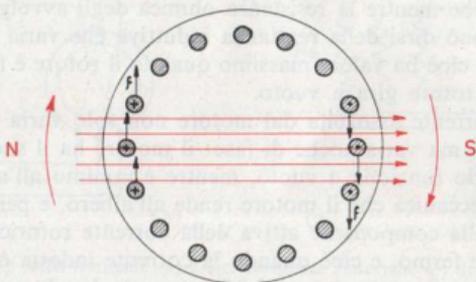


Fig. 9.24 - Coppia motrice di un rotore a gabbia.

Le barrette percorse da corrente e immerse nel flusso magnetico risultano allora sottoposte alle forze magnetoelettriche  $F$  che, per la regola di Fleming della mano sinistra, sono dirette nel senso di rotazione del campo induttore.

Il rotore quindi, sottoposto ad una coppia spostantesi con il campo rotante, è sollecitato a ruotare nello stesso verso del campo induttore.

Iniziata la rotazione e via via che il rotore assume una velocità sempre maggiore, la velocità relativa tra campo rotante e rotore va diminuendo e perciò diminuiscono le f.e.m. e le correnti indotte nella gabbia.

Se il rotore arrivasse alla velocità di sincronismo, nella gabbia non si avrebbe più alcuna corrente e quindi la coppia motrice si annullerebbe.

Pertanto il rotore non potrà mai raggiungere la velocità di sincronismo, ma dovrà compiere un numero di giri sempre inferiore a quello del campo statorico.

Di qui la ragione per la quale questi tipi di motori prendono il nome di *motori asincroni*.

La differenza tra la velocità di sincronismo  $N$  del campo induttore e la velocità di asincronismo  $Na$  del rotore, si chiama *scorrimento  $s$  del motore*.

Generalmente  $s$  viene espresso in percento:

$$s = \frac{N - Na}{N} \%,$$

e varia mediamente da 1 % a 5 % circa, passando dal funzionamento a vuoto a quello di pieno carico.

La frequenza  $f_2$  delle correnti rotoriche è uguale alla frequenza  $f_1$  delle correnti statoriche, se il rotore è fermo, ma quando il motore è avviato e compie un numero di giri, per cui il suo scorrimento è  $s$ , la frequenza rotorica è legata alla velocità relativa del campo statorico rispetto al rotore e vale:

$$f_2 = sf_1.$$

Ne consegue che mentre la resistenza ohmica degli avvolgimenti è costante, non altrettanto può dirsi della reattanza induttiva che varia in ragione diretta della frequenza e cioè ha valore massimo quando il rotore è fermo e valore minimo quando il rotore gira a vuoto.

Pertanto la corrente assorbita dal motore non solo varia di intensità con il variare del carico ma varia anche di fase: il motore ha il suo massimo fattore di potenza quando funziona a vuoto, mentre è minimo all'avviamento.

La potenza meccanica che il motore rende all'albero, e perciò la coppia motrice, dipende dalla componente attiva della corrente rotorica, per cui si ha il caso che a rotore fermo, e cioè quando la corrente indotta è massima, la coppia motrice è minima, proprio perché la corrente ha il massimo sfasamento.

Da quanto esposto si deduce che il motore asincrono è autoregolatore perché proporziona il suo assorbimento dalla rete di alimentazione all'energia meccanica che è chiamato a rendere.

Infatti quando il motore viene caricato ovviamente rallenta, e di conseguenza, aumenta lo scorrimento e quindi le correnti indotte nel rotore.

Lo statore deve assorbire dalla rete una maggiore corrente di compensazione, come avviene in un normale trasformatore.

È dimostrato che la coppia è proporzionale al quadrato del flusso totale nel traferro e cioè al quadrato della tensione di alimentazione, al numero dei giri del campo rotante e dipende dallo scorrimento, dalla resistenza e dalla reattanza rotoriche.

È importante osservare che quando il motore viene avviato e precisamente nell'istante in cui è ancora fermo, esso è come bloccato da un grande carico. Lo scorrimento è massimo e cioè del 100 % e perciò massime sono le f.e.m. e quindi le correnti indotte nel rotore. Si dice che in tal caso il motore è *in corto circuito* e assorbe dalla linea la massima corrente, detta *corrente di spunto* o di

avviamento che, per i motori di grande potenza, può arrivare a valori pericolosi sia per lo stesso motore che per la rete di alimentazione.

Occorre allora limitare la corrente di avviamento mediante diversi artifici intesi a far partire il motore a tensione ridotta.

Si può allora:

- a) inserire tra la linea e lo statore un autotrasformatore a rapporto gradualmente variabile che fornisce al motore una tensione ridotta all'avviamento, per innalzarla gradatamente fino alla tensione di rete, via via che il motore accelera fino a raggiungere la velocità di regime;

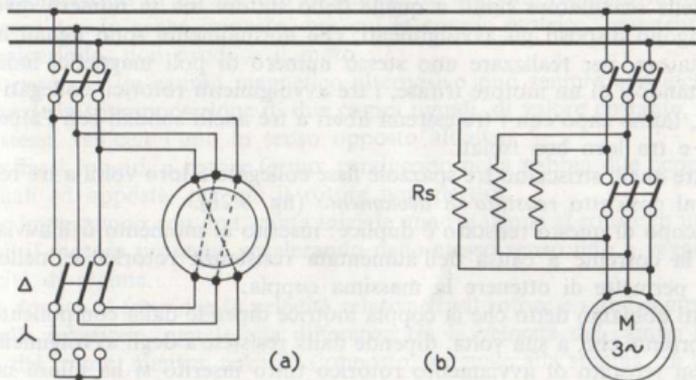


Fig. 9.25 - Avviamento stella-triangolo (a) e con resistenze statoriche (b) di un motore a gabbia.

- b) inserire un commutatore stella-triangolo, che collega le fasi dello statore a stella al momento dell'avviamento del motore e successivamente a triangolo in modo che ogni fase dello statore risulti inizialmente sottoposta ad una tensione di 1,73 volte minore di quella di esercizio (fig. 9.25-a);
- c) inserire per ogni fase una resistenza statorica; le resistenze agiscono come autotrasformatori ma provocano sensibili perdite per effetto Joule (fig. 9.25-b).

Per ottenere una minore corrente e una maggiore coppia di spunto senza ricorrere ai sistemi di avviamento accenati, sono stati costruiti motori con rotore a doppia gabbia. Una di queste gabbie, di grande resistenza (sbarre ed anelli di piccola sezione) è posta in prossimità della superficie del rotore ed ha perciò una piccola reattanza di dispersione; l'altra di piccola resistenza (sbarre grosse in cave allungate e profonde) è posta più internamente ed ha quindi una grande reattanza di dispersione.

All'avviamento, data l'elevata frequenza delle correnti rotoriche, la coppia dovuta alla gabbia esterna è prevalente e determina lo spunto con una corrente

limitata dalla elevata resistenza, mentre la gabbia interna, a causa della sua elevata reattanza, risulta percorsa da correnti di limitata intensità. In prossimità del sincronismo, per effetto della piccola frequenza rotorica, diminuisce la reattanza della gabbia interna e la corrente in essa circolante aumenta e partecipa utilmente alla produzione della coppia motrice, mentre diventa trascurabile la coppia dovuta alla gabbia esterna che ora risulta percorsa da una minore corrente.

Oltre ai motori con rotore a gabbia, vi sono, abbiamo detto, i motori con rotore avvolto.

Il rotore avvolto è costituito di un cilindro di lamierini di ferro dolce, portante delle scanalature simili a quelle dello statore ma in numero diverso, in cui vengono disposti gli avvolgimenti, che normalmente sono uguali a quello dello statore, per realizzare uno stesso numero di poli magnetici indotti.

Trattandosi di un motore trifase, i tre avvolgimenti rotorici, collegati sempre a stella, fanno capo con i tre estremi liberi a tre anelli solidali con l'albero e da questo e tra loro ben isolati.

Sui tre anelli strisciano tre spazzole fisse collegate a loro volta a tre resistenze e cioè al cosiddetto *reostato di avviamento* (fig. 9.26).

Lo scopo di questo reostato è duplice: inserito al momento dell'avviamento, riduce la corrente a causa dell'aumentata resistenza rotorica e, nello stesso tempo, permette di ottenere la massima coppia.

Infatti abbiamo detto che la coppia motrice dipende dalla componente attiva della corrente che, a sua volta, dipende dalla resistenza degli avvolgimenti rotorici. Con reostato di avviamento rotorico tutto inserito si ha allora una corrente rotorica ridotta, ma con una componente attiva maggiore e quindi una coppia di spunto elevata. Con reostato disinserito, la corrente aumenta ma diminuisce la sua componente attiva e quindi diminuisce la coppia.

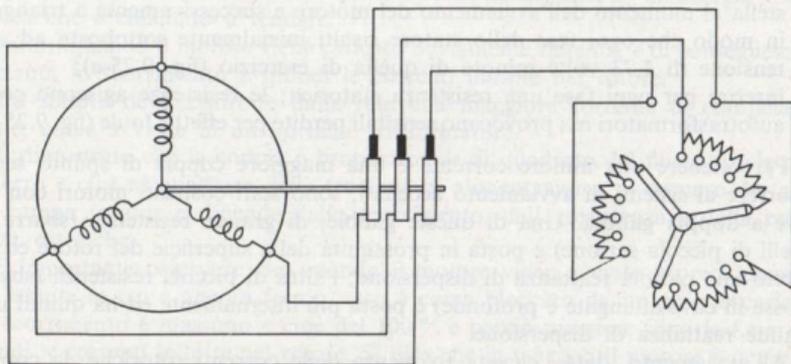


Fig. 9.26 - Motore asincrono avvolto con reostato rotorico di avviamento.

Iniziata la rotazione, e via via che il motore accelera, il reostato viene gradatamente escluso. Raggiunta la velocità di regime, un particolare dispositivo mette in corto circuito i tre anelli: il reostato risulta completamente disinsirito e gli avvolgimenti rotorici chiusi su se stessi.

Consideriamo ora il motore asincrono monofase.

Gli avvolgimenti statorici alimentati da una corrente monofase generano un campo magnetico alternativo e non rotante, per cui quanto detto per i motori trifasi sembrerebbe non applicabile ai motori monofasi.

Nel rotore fermo di un motore monofase, le correnti vengono indotte ora in un senso ora in senso opposto, per cui la coppia motrice, invertendosi ad ogni semiperiodo, non produce il moto.

Si ha però che un campo magnetico alternativo può sempre considerarsi la risultante della sovrapposizione di due campi uguali, di valore costante, rotanti con la stessa velocità l'uno in senso opposto all'altro.

I due flussi rotanti, a rotore fermo, producono nella gabbia due coppie motrici uguali ed opposte, per cui il rotore non partirà.

Ma se imprimiamo con una spinta iniziale una rotazione al rotore in un verso qualsiasi, il motore prosegue accelerando nello stesso senso fino a raggiungere la velocità di regime.

Ciò è dovuto al fatto che la velocità relativa tra il rotore e i due campi è, nel verso della rotazione, uguale alla differenza tra la velocità del campo rotante e quella del rotore, mentre, nel senso opposto, è uguale alla somma tra la velocità del campo rotante e quella del rotore.

Nella gabbia nascono così due correnti opposte non più uguali tra loro. La prima, e cioè quella generata dal campo rotante nel senso del moto del rotore, è meno intensa della seconda, ma più in fase con la tensione avendo una minor frequenza, e la seconda è più intensa ma più sfasata avendo una frequenza maggiore.

Le due coppie non sono più uguali: la prima è maggiore della seconda e cresce con l'aumentare della velocità rotorica, mentre la seconda diminuisce e viene a rappresentare una coppia frenante, per cui i motori monofasi hanno uno scorrimento maggiore di quello dei motori trifasi.

Occorrerebbe disporre però di un motore di lancio, come per i motori sincroni.

L'avviamento invece può essere ottenuto con un sistema assai semplice e cioè creando nella macchina un vero campo rotante che può anche venire eliminato a regime di giri raggiunto.

Tale campo viene ottenuto disponendo sullo statore un circuito ausiliario, detto *circuito di avviamento*, spostato di  $90^\circ$  rispetto all'avvolgimento principale e alimentato da una corrente sfasata di un certo angolo (possibilmente di  $90^\circ$ ) rispetto a quella del circuito principale.

Per ottenere il necessario sfasamento tra le due correnti, si dispongono in serie od in parallelo con l'avvolgimento ausiliario delle resistenze o delle capacità (fig. 9.27).

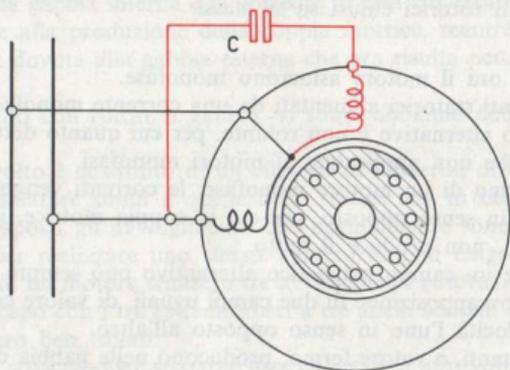


Fig. 9.27 - Motore asincrono monofase con condensatore.

Anche il campo magnetico alternativo prodotto dall'avvolgimento ausiliario può pensarsi scomposto in due campi uguali rotanti in senso opposto.

Nel traferro si hanno così quattro campi rotanti, che essendo sfasati tra loro (al limite in quadratura) danno origine ad un campo magnetico risultante, rotante in un senso o nell'altro a seconda di come sono disposti i due avvolgimenti statorici.

Per i motori di piccolissima potenza (giradischi, piccoli ventilatori, ecc.), il campo rotante può ottenersi con i *poli schermati*, come indicato in figura 9.28.

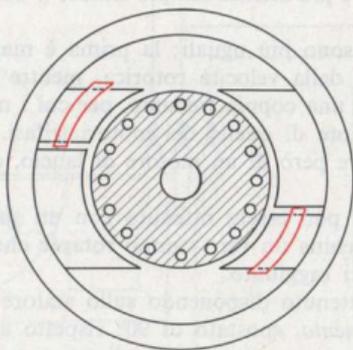


Fig. 9.28 - Schema di motorino monofase a poli schermati.

I poli sono eccitati con un normale avvolgimento percorso da corrente alterna e portano alle estremità simmetriche un anello di rame che fascia una parte di ciascun polo.

La f.e.m., e quindi l'intensa corrente che si genera in ciascun anello, produce un flusso trasverso e cioè sfasato rispetto al flusso principale. Per quanto detto prima si ottiene, in tal modo, un campo risultante rotante che trascina in rotazione la gabbia rotorica.

La velocità dei motori asincroni dipende dalla velocità del campo rotante e cioè dalla frequenza e dal numero dei poli, per cui la sua regolazione non è molto agevole.

Il metodo più comune di regolazione consiste nel variare il numero dei poli del motore. Se si dispongono nelle cave dello statore due avvolgimenti (uno, per esempio, a due poli e l'altro a quattro poli), si può variare la velocità del campo rotante e quindi del motore, collegando alla rete di alimentazione, mediante un opportuno commutatore, o l'uno o l'altro avvolgimento.

Ovviamente la velocità non può essere regolata gradatamente, ma passa dalla metà al doppio, dimezzando il numero dei poli statorici.

In tal caso occorre che il rotore sia del tipo a gabbia, per potersi automaticamente adattare al numero dei poli.

## Capitolo Decimo

### La risonanza e le oscillazioni elettriche

Un circuito ohmico-induttivo-capacitivo può comportarsi, (v. parag. 8.5.) da circuito ohmico-induttivo quando l'effetto dell'induttanza prevale sull'effetto della capacità, da circuito ohmico-capacitivo quando l'effetto della capacità prevale sull'effetto dell'induttanza e da circuito puramente ohmico quando gli effetti capacitivo ed induttivo si annullano vicendevolmente.

In quest'ultimo caso il circuito si dice *risonante* e i fenomeni che ne derivano prendono il nome di *risonanza*.

In particolari condizioni, un circuito diviene spontaneamente risonante ed è sede di *oscillazioni elettriche libere*, ossia di una trasformazione alterna e spontanea dell'energia impressa inizialmente da energia elettrostatica in energia elettromagnetica e viceversa.

Il circuito si dice allora *oscillante*.

In un dato circuito la risonanza si ottiene, come vedremo appresso, ad una frequenza ben determinata, detta *frequenza di risonanza*, che corrisponde all'incirca alla frequenza delle oscillazioni libere di un circuito oscillante che abbia la stessa induttanza e la stessa capacità.

I circuiti risonanti assumono grande importanza per il fatto che, opportunamente accoppiati tra loro, possono trasmettere facilmente dall'uno all'altro tensioni e correnti aventi solo tale frequenza ed impedirne più o meno efficacemente il passaggio se hanno frequenze diverse da quella di risonanza.

I circuiti oscillanti sono invece importanti proprio per il fatto di generare oscillazioni di tensioni e di correnti aventi frequenze desiderate. I fenomeni della risonanza e delle oscillazioni elettriche, pur potendosi ottenere con opportuni valori delle capacità e delle induttanze a qualsiasi frequenza, si sfruttano prevalentemente nelle alte frequenze.

#### 10.1. CIRCUITI RISONANTI IN SERIE

Consideriamo un circuito composto di una resistenza  $R$ , di una induttanza  $L$  e di una capacità  $C$ , collegate in serie tra loro, e alimentate da un generatore

$G$ , che supponiamo a tensione efficace  $V$  costante e a frequenza  $f$  variabile (fig. 10.1).

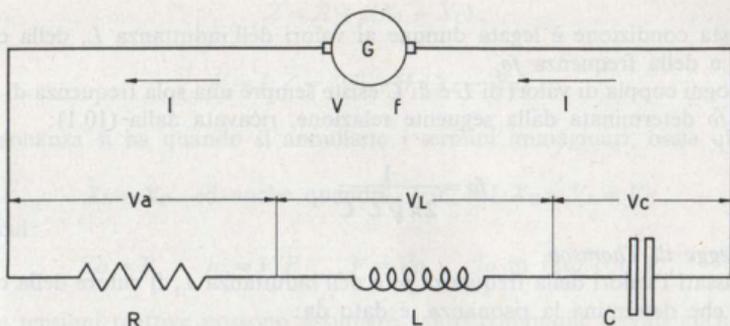


Fig. 10.1 - Circuito RCL in serie.

Al variare della frequenza da zero al valore infinito, la reattanza induttiva  $X_L$  varia proporzionalmente da zero all'infinito, mentre la reattanza capacitiva  $X_C$  varia secondo una iperbole e cioè ha valore infinito per frequenza uguale a zero e tende a zero per frequenza tendente all'infinito, come rappresentato in figura 10.2.

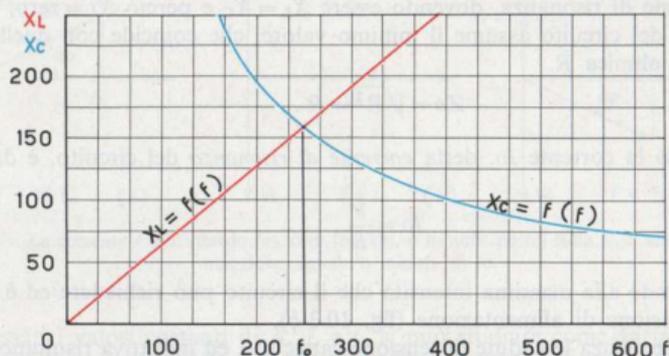


Fig. 10.2 - Variazione di  $X_L$  e di  $X_C$  in funzione di  $f$ .

Le condizioni di risonanza del circuito sono determinate dal punto di incrocio delle due caratteristiche, in corrispondenza del quale le due reattanze assumono il medesimo valore ( $X_L = X_C$ ) per una determinata frequenza  $f_0$ , detta appunto *frequenza di risonanza*. Perciò vale l'uguaglianza:

$$2\pi foL = \frac{1}{2\pi foC} \quad (10.1)$$

Questa condizione è legata dunque ai valori dell'induttanza  $L$ , della capacità  $C$  e della frequenza  $fo$ .

Per ogni coppia di valori di  $L$  e di  $C$  esiste sempre una sola frequenza di risonanza  $fo$  determinata dalla seguente relazione, ricavata dalla (10.1):

$$fo = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}} \quad (10.2)$$

detta *legge di Thomson*.

Prefissati i valori della frequenza  $fo$  e dell'induttanza  $L$ , il valore della capacità  $C$  che determina la risonanza, è dato da:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 fo^2 L} \quad (10.3)$$

Viceversa, prefissato il valore di  $C$ , l'induttanza  $L$  è data da:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 fo^2 C} \quad (10.4)$$

In regime di risonanza, dovendo essere  $X_L = X_C$  e perciò  $X_t = \text{zero}$ , l'impedenza  $Z_o$  del circuito assume il minimo valore, che coincide con quello della resistenza ohmica  $R$ .

$$Z_o = \sqrt{R^2} = R \quad (10.5)$$

Pertanto la corrente  $I_o$ , detta *corrente di risonanza* del circuito, è data da:

$$I_o = \frac{V}{R} \quad (10.6)$$

e corrisponde alla massima intensità che il circuito può richiedere ed è in fase con la tensione di alimentazione (fig. 10.3-b).

Di conseguenza le cadute di tensione capacitiva ed induttiva risultano uguali ed opposte, assumono anch'esse il loro massimo valore e, proprio per il fatto che esse si fanno reciprocamente equilibrio, nel circuito si verifica il *fenomeno di risonanza fra le tensioni reattive*  $V_C$  e  $V_L$ .

Il circuito richiede allora ai suoi capi la sola tensione attiva necessaria a vincere la caduta ohmica  $V_a$ .

Le condizioni di risonanza di un circuito serie si possono dedurre immediatamente dalle espressioni simboliche.

Ponendo:

$$\bar{Z} = R + j(X_L - X_C),$$

e

$$\bar{V} = I \cdot \bar{Z} = I \cdot R + jI \cdot (X_L - X_C),$$

la risonanza si ha quando si annullano i termini immaginari, ossia quando:

$$X_L = X_C \text{ ed anche quando } I \cdot X_L = I \cdot X_C = V_L = V_C,$$

per cui:

$$Z_o = R \quad I_o = V/R \quad V = V_a \quad I_o \text{ in fase con } V,$$

Le tensioni reattive possono assumere valori comunque elevati anche se la tensione applicata al circuito è piccola: in particolare se la resistenza ohmica è trascurabile, la tensione di alimentazione potrà essere piccolissima, anche per una corrente di notevole intensità. Questa provoca allora nelle reattanze  $X_C$  e  $X_L$ , prese sufficientemente grandi, le cadute di tensione  $V_C$  e  $V_L$  molto elevate e perciò notevolmente maggiori della tensione applicata.

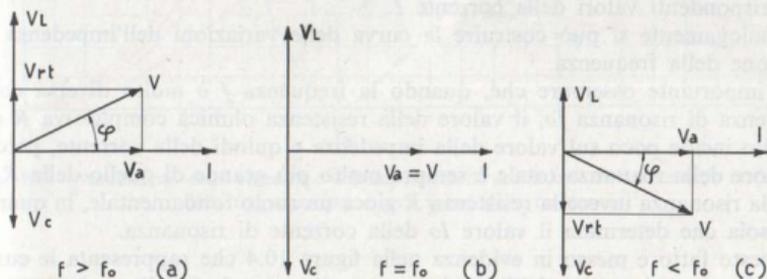


Fig. 10.3 - La corrente  $I$  è in ritardo (a), o in fase (b), o in anticipo (c) sulla  $V$ , a seconda che  $f$  è maggiore, uguale o minore di  $f_o$ .

Prefissati i valori costanti di  $R$ ,  $L$  e  $C$  si può studiare come varia il regime elettrico del circuito al variare della frequenza, mantenendo costante il valore efficace  $V$  della tensione di alimentazione.

Variando la frequenza in più o in meno rispetto a  $f_o$ , l'impedenza aumenta e la corrente diminuisce.

Infatti:

a) per  $f < f_o$ : diminuendo la frequenza al disotto del valore della frequenza di risonanza, diminuisce la reattanza induttiva  $X_L$  ed aumenta la reattanza

capacitiva  $X_C$  per cui l'impedenza  $Z$  aumenta e proporzionalmente diminuisce la corrente nel circuito.

Per essere  $X_L < X_C$ , il circuito assume il carattere di un circuito ohmico capacitivo: la caduta capacitiva è maggiore della caduta induttiva e la corrente risulta sfasata in anticipo di un angolo  $\varphi$  sulla tensione (fig. 10.3-c).

Al limite, per una frequenza nulla, la reattanza induttiva è nulla, la reattanza capacitiva assume il valore infinito, per cui l'impedenza è infinita e la corrente nulla.

b) per  $f > f_0$ : aumentando la frequenza oltre il valore della frequenza di risonanza, aumenta la reattanza induttiva e diminuisce la reattanza capacitiva.

L'impedenza aumenta e proporzionalmente la corrente diminuisce e passa in ritardo sulla tensione, perché il circuito diventa ohmico-induttivo. La caduta induttiva di tensione è maggiore di quella capacitiva (fig. 10.3-a).

Per una frequenza tendente all'infinito, la reattanza induttiva tende all'infinito e quella capacitiva tende a zero, per cui l'impedenza tende all'infinito e la corrente tende a zero.

Le variazioni della corrente assorbita in funzione della frequenza, sono rappresentabili da una curva, detta *curva di risonanza*, ottenuta portando sulle ascisse di un sistema di assi cartesiani i valori della frequenza  $f$  e sulle ordinate i corrispondenti valori della corrente  $I$ .

Analogamente si può costruire la curva delle variazioni dell'impedenza in funzione della frequenza.

È importante osservare che, quando la frequenza  $f$  è molto diversa dalla frequenza di risonanza  $f_0$ , il valore della resistenza ohmica complessiva  $R$  del circuito incide poco sul valore della impedenza e quindi della corrente, perché il valore della reattanza totale è sempre molto più grande di quello della  $R$ .

Alla risonanza invece la resistenza  $R$  gioca un ruolo fondamentale, in quanto è la sola che determina il valore  $I_0$  della corrente di risonanza.

Questo fatto è messo in evidenza nella figura 10.4 che rappresenta le curve di risonanza e le curve dell'impedenza per diversi valori della resistenza del circuito. La linea tratteggiata dimostra che quando la resistenza  $R$  è nulla la corrente di risonanza  $I_0$  tende all'infinito e l'impedenza  $Z_0$  del circuito tende a zero.

Si osservi che all'aumentare della resistenza  $R$  le curve di risonanza non solo si abbassano proporzionalmente, ma si appiattiscono.

Un circuito che alla risonanza presenta una curva con l'apice molto appuntito, si dice che è molto *selettivo*, perché favorisce solo la corrente corrispondente alla frequenza di risonanza  $f_0$  o ad una strettissima gamma di frequenze intorno al valore di  $f_0$ .

Se diversamente la curva è molto piatta all'apice, il circuito è poco selettivo, in quanto favorisce la corrente corrispondente ad una vasta gamma di frequenze intorno al valore di  $f_0$ .

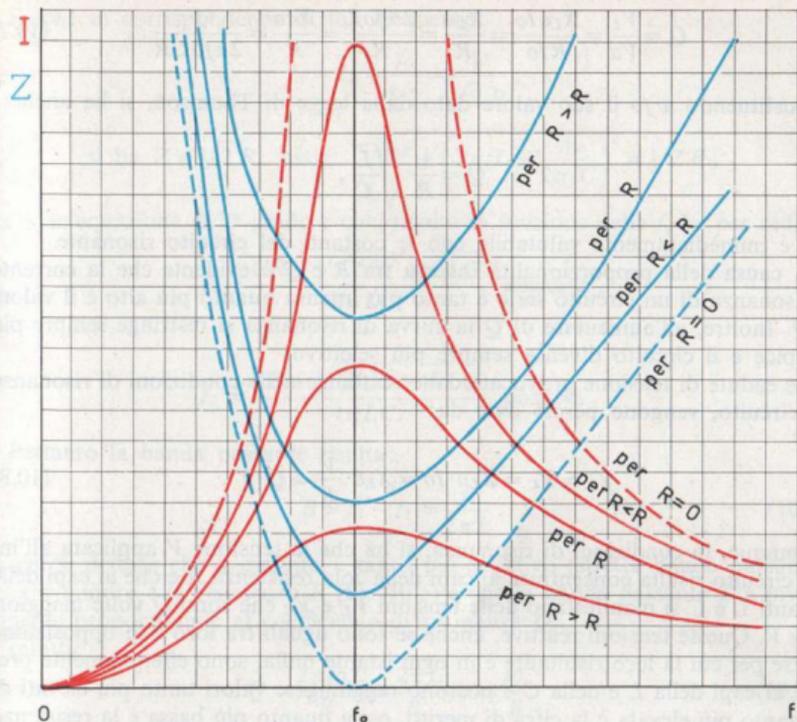


Fig. 10.4 - Andamento della corrente e dell'impedenza di un circuito risonante serie in funzione della frequenza per diversi valori della resistenza.

La selettività del circuito è dunque legata al valore della resistenza  $R$ , come pure le perdite di energia dovute all'effetto Joule.

La valutazione delle proprietà selettive e quindi dell'andamento della curva di risonanza di un circuito serie, è caratterizzata da due elementi fondamentali: il *coefficiente di risonanza*, detto anche *fattore* o *cifra di merito* o di *bontà* del circuito, e la *banda passante*.

Il **coefficiente di risonanza**, che si indica con la lettera  $Q$ , è il rapporto tra la tensione  $V_L$  (o  $V_C$ ) che si manifesta ai capi della  $L$  (o della  $C$ ) in condizioni di risonanza, e la tensione  $V_a$  (che è anche la tensione di alimentazione) che si manifesta ai capi della resistenza complessiva  $R$  del circuito misurata alla frequenza di risonanza  $f_0$ :

$$Q = \frac{V_L}{V_a} = \frac{X_{Lo} I_o}{R I_o} = \frac{X_{Lo}}{R} = \frac{2\pi f_o L}{R} = \frac{X_{Co}}{R} = \frac{1}{2\pi f_o C R}. \quad (10.7)$$

Sostituendo a  $f_o$  il suo valore dato dalla legge di Thomson, si ha anche:

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}},$$

che è immediatamente valutabile con le costanti del circuito risonante.

A causa della proporzionalità inversa tra  $R$  e  $Q$  è evidente che la corrente di risonanza di un circuito serie è tanto più intensa quanto più alto è il valore di  $Q$ . Inoltre, all'aumentare di  $Q$  la curva di risonanza si restringe sempre più all'apice e il circuito diventa sempre più selettivo.

Le cadute di tensione provocate dalle reattanze nelle condizioni di risonanza del circuito, vengono perciò date da:

$$V_L = V_C = X_{Lo} \cdot I_o = X_{Lo} \frac{V}{R} = Q \cdot V. \quad (10.8)$$

Dunque, in condizioni di risonanza, si ha che la tensione  $V$  applicata all'intero circuito risulta concentrata ai capi della sola resistenza  $R$  e che ai capi delle costanti  $L$  e  $C$  si manifestano delle tensioni  $V_L$  e  $V_C$  che sono  $Q$  volte maggiori della  $V$ . Queste tensioni reattive, anche se sono uguali tra loro e in opposizione di fase per cui la loro risultante è in ogni istante nulla, sono effettivamente presenti ai capi della  $L$  e della  $C$  e possono raggiungere valori tanto più elevati di  $V$  quanto più elevata è la cifra di merito, ossia quanto più bassa è la resistenza ohmica.

Questo fatto deve essere valutato ai fini dell'isolamento da dare al condensatore e all'induttanza onde evitare scariche disruptive. Ciò giustifica il termine di *coefficiente di sovratensione* con il quale viene indicata talvolta la cifra di merito.

**La banda passante**, che si indica con la lettera  $B$ , è la gamma di frequenze compresa tra  $f_1 < f_o$  e  $f_2 > f_o$  in corrispondenza delle quali la corrente nel circuito assume il valore  $I_o/\sqrt{2}$ , ossia  $0,707 I_o$  (fig. 10.5).

La scelta di tale attenuazione limite di corrente è giustificata dal fatto che essa non produce, agli effetti pratici, una distorsione apprezzabile.

La banda passante è perciò definita da:

$$B = f_2 - f_1,$$

dove  $f_2$  e  $f_1$  sono dette rispettivamente *frequenze di taglio inferiore e superiore*.

Poiché in corrispondenza di tali frequenze:

$$I_1 = I_2 = \frac{I_0}{\sqrt{2}} = \frac{V}{\sqrt{2} R},$$

si ha  $Z = \sqrt{2} R$  ossia  $\sqrt{R^2 + \left(2\pi fL - \frac{1}{2\pi fC}\right)^2} = \sqrt{2} R,$

che è un'equazione di 2° grado e che, risolta in funzione della  $f$ , ha per radici:

$$f_1 = \frac{CR - \sqrt{C^2 R^2 + 4LC}}{4\pi LC} \quad \text{negativa,}$$

$$f_2 = \frac{CR + \sqrt{C^2 R^2 + 4LC}}{4\pi LC} \quad \text{positiva.}$$

Pertanto la banda passante risulta:

$$B = f_2 - f_1 = \frac{R}{2\pi L}, \quad (10.9)$$

da cui si deduce che il circuito è tanto più selettivo (stretta banda passante) quanto minore è la resistenza  $R$  (fig. 10.5) e che la banda passante  $B$  è inversamente proporzionale al coefficiente di risonanza  $Q$ .

Infatti:

$$Q = \frac{2\pi f_0 L}{R} = \frac{2\pi L}{R} f_0 = \frac{f_0}{B}. \quad (10.10)$$

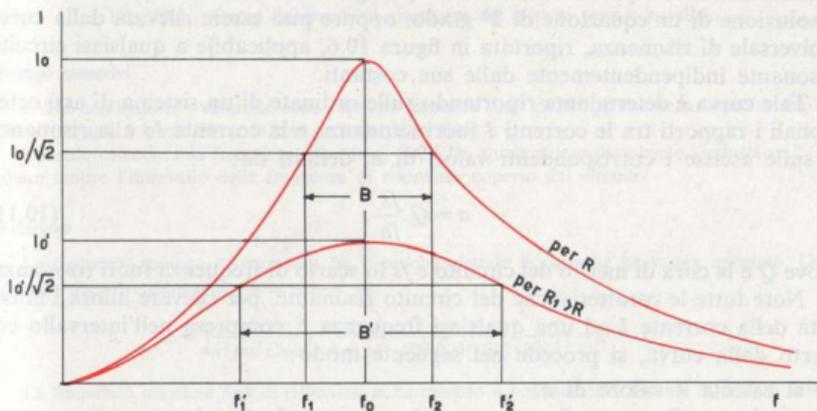


Fig. 10.5 - Bande passanti in un circuito risonante serie al variare della  $R$  o della  $Q$ .

Osserviamo che se l'intensità della corrente  $I$  fluente nel circuito in corrispondenza di  $f_1$  e di  $f_2$  vale  $I_0/\sqrt{2}$ , le frequenze  $f_1$  e  $f_2$  differiscono da  $f_0$  di una quantità pari a  $1/2Q$  volte  $f_0$ . Infatti, se la curva di risonanza ha andamento simmetrico almeno fino ai valori di  $f_1$  e  $f_2$ , si può scrivere:

$$f_1 = f_0 - \frac{1}{2} B = f_0 - \frac{f_0}{2Q},$$

e

$$f_2 = f_0 + \frac{1}{2} B = f_0 + \frac{f_0}{2Q}.$$

È anche importante osservare che, mentre alla risonanza la corrente  $I_0$  è in fase con la tensione  $V$  di alimentazione, fuori risonanza, e precisamente in corrispondenza di  $f_1$ , la corrente  $I$  fluente nel circuito anticipa su  $V$  di  $45^\circ$ , mentre in corrispondenza di  $f_2$  ritarda di  $45^\circ$ . Infatti, essendo:

$$Z = \sqrt{2} R \quad \text{si ha} \quad \cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{2} R} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a cui corrisponde l'angolo di  $45^\circ$ . Però mentre per  $f_1$  il circuito è prevalentemente capacitivo, per  $f_2$  è prevalentemente induttivo. Pertanto, si deve affermare che la corrente fluente nel circuito si sposta di fase rispetto alla  $V$  da  $+45^\circ$  a  $-45^\circ$  via via che la frequenza della  $V$  di alimentazione si sposta lungo l'intera banda passante da  $f_1$  a  $f_2$ .

L'intensità di corrente fuori risonanza, e cioè per una frequenza  $f$  diversa da  $f_0$ , può essere calcolata seguendo il procedimento analitico relativo ai circuiti ohmici-induttivi-capacitivi studiato al paragrafo 8.5., ma comporterebbe una risoluzione di un'equazione di 2° grado, oppure può essere rilevata dalla curva universale di risonanza, riportata in figura 10.6, applicabile a qualsiasi circuito risonante indipendentemente dalle sue costanti.

Tale curva è determinata riportando sulle ordinate di un sistema di assi ortogonali i rapporti tra le correnti  $I$  fuori risonanza e la corrente  $I_0$  alla risonanza e sulle ascisse i corrispondenti valori di  $a$ , definiti da:

$$a = Q \frac{fs}{f_0}, \quad (10.11)$$

dove  $Q$  è la cifra di merito del circuito e  $fs$  lo scarto di frequenza fuori risonanza.

Note tutte le caratteristiche del circuito risonante, per rilevare allora l'intensità della corrente  $I$  ad una qualsiasi frequenza  $f$ , compresa nell'intervallo coperto dalla curva, si procede nel seguente modo:

- a) si calcola il valore di  $a$ ;
- b) si rileva sulla curva il rapporto  $I/I_0$  corrispondente ad  $a$ ;
- c) si calcola l'intensità della corrente  $I$  moltiplicando per  $I_0$  il rapporto  $I/I_0$ .

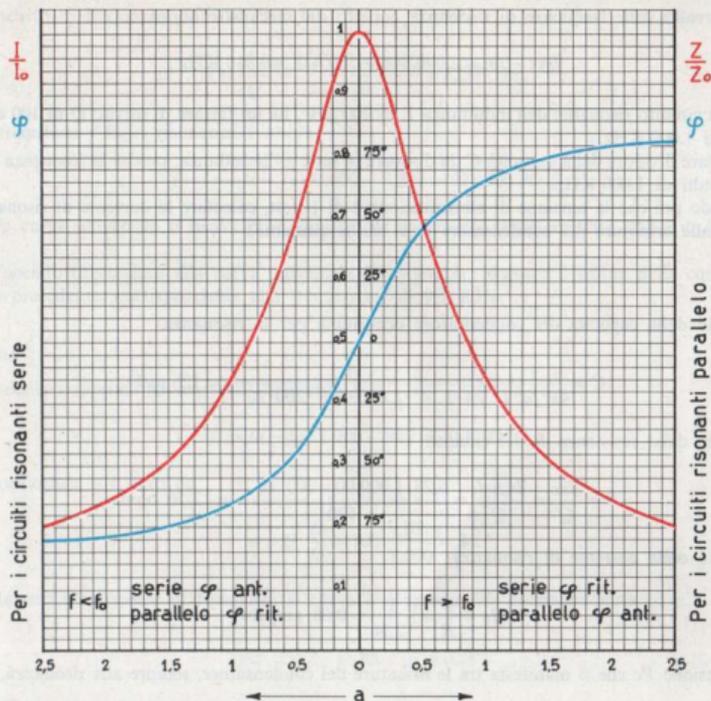


Fig. 10.6 - Curve universali di risonanza dei circuiti serie e parallelo.

### Esempi numerici

1. Un condensatore variabile della capacità massima  $C_{mx}$  di  $500 \mu\text{F}$  e della capacità minima  $C_m$  di  $30 \mu\text{F}$  è posto in serie con un'induttanza fissa.

Volendo ottenere una frequenza minima di  $500 \text{ KHz}$ , quale valore deve avere l'induttanza? Calcolare inoltre l'intervallo delle frequenze di risonanza coperto dal circuito.

### Soluzione

La frequenza minima di risonanza  $f_m$  si ottiene quando la capacità ha valore massimo. Dalla formula della frequenza di risonanza, si ha:

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_m^2 C_{mx}} = \frac{1}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 500.000^2 \cdot 500 \cdot 10^{-12}} = 203 \mu\text{Hr} .$$

La frequenza massima  $f_{mx}$  di risonanza si ha quando il condensatore assume il minimo valore:

$$f_{mx} = \frac{1}{2\pi \sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{6,28 \sqrt{30 \cdot 10^{-12} \cdot 203 \cdot 10^{-6}}} = 2.040.816 \text{ Hz} .$$

L'intervallo delle frequenze di risonanza coperto dal circuito è allora:

$$f_{mx} - f_m = 2.040,816 - 500 = 1.540,816 \text{ KHz.}$$

2. Un circuito risonante dell'induttanza  $L$  di  $200 \mu\text{Hr}$ , ha un fattore di merito  $Q$  di 100 alla frequenza di 1.000 KHz.

Calcolare il valore della capacità  $C$  da disporre in serie all'induttanza, perché la frequenza di risonanza risulti di 1.000 KHz.

Sapendo poi che la tensione di alimentazione è di 1 volt, calcolare la corrente di risonanza, la tensione alle armature del condensatore e la banda passante.

*Soluzione*

Calcolo della capacità del condensatore occorrente per la risonanza:

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_o^2 L} = \frac{1}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 1.000.000^2 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 126 \mu\mu\text{F.}$$

Calcolo della resistenza  $R$  del circuito:

$$R = \frac{X_{LO}}{Q} = \frac{2\pi f_o L}{Q} = \frac{6,28 \cdot 1.000.000 \cdot 200 \cdot 10^{-6}}{100} = 12,56 \text{ ohm.}$$

Calcolo della corrente di risonanza:

$$I_o = \frac{V}{R} = \frac{1}{12,56} = 0,08 \text{ ampere.}$$

La tensione  $V_c$  che si manifesta tra le armature del condensatore, sempre alla risonanza, è data da:

$$V_c = Q \cdot V = 100 \cdot 1 = 100 \text{ volt.}$$

Calcolo della banda passante:

$$B = \frac{f_o}{Q} = \frac{1.000.000}{100} = 10.000 \text{ Hz,}$$

oppure:

$$B = \frac{R}{2\pi L} = \frac{12,56}{6,28 \cdot 200 \cdot 10^{-6}} = 10.000 \text{ Hz.}$$

3. Facendo riferimento alla curva universale di risonanza e ai dati dell'esercizio precedente, determinare la frequenza fuori risonanza che riduca a metà l'intensità della corrente di risonanza e l'angolo di sfasamento sulla tensione.

*Soluzione*

Dalla curva universale di risonanza, si rileva che quando la corrente è ridotta a 0,5, il valore di  $a$  risulta di 0,85.

Lo scarto di frequenza  $f_s$  è dato da:

$$f_s = \frac{a \cdot f_0}{Q} = \frac{0,85 \cdot 1.000.000}{100} = 8.500 \text{ Hz} .$$

La frequenza  $f$  fuori risonanza è allora:

$$f = f_0 - f_s = 1.000.000 - 8.500 = 991.500 \text{ Hz} .$$

Dalla curva universale si ricava pure l'angolo di sfasamento della corrente, che è di  $60^\circ$  circa.

4. Facendo riferimento alla curva universale di risonanza, ricavare il valore della corrente del circuito precedente, corrispondente alla frequenza  $f$  di 980 KHz.

*Soluzione*

Si calcola dapprima lo scarto di frequenza  $f_s$ :

$$f_s = f_0 - f = 1.000 - 980 = 20 \text{ KHz} .$$

Il coefficiente  $a$  è dato da:

$$a = Q \frac{f_s}{f_0} = 100 \frac{20}{1.000} = 2 .$$

Dalla curva universale di risonanza si rileva il rapporto  $I/I_0$  corrispondente ad  $a$ .

$$\text{per } a = 2 \text{ si ha } \frac{I}{I_0} = 0,24 .$$

La corrente  $I$ , essendo  $I_0 = 0,08$ , è data da:

$$I = \frac{I}{I_0} \cdot I_0 = 0,24 \cdot 0,08 = 0,0192 \text{ ampere} .$$

## 10.2. CIRCUITI RISONANTI IN PARALLELO

Consideriamo il circuito di figura 10.7, costituito da una capacità  $C$  e da una induttanza  $L$  collegate tra loro in parallelo. Le resistenze  $R_c$  e  $R_L$  stanno ad indicare rispettivamente le resistenze ohmiche del ramo capacitivo e del ramo induttivo.

Anche per i circuiti in parallelo, come per i circuiti in serie, le condizioni di risonanza si ottengono quando gli effetti dell'induttanza e della capacità si compensano e cioè quando il circuito assume i caratteri di un circuito puramente ohmico.

Posto:

$$Z_L = \sqrt{R_L^2 + X_L^2} \quad \text{e} \quad Z_c = \sqrt{R_c^2 + X_c^2} ,$$

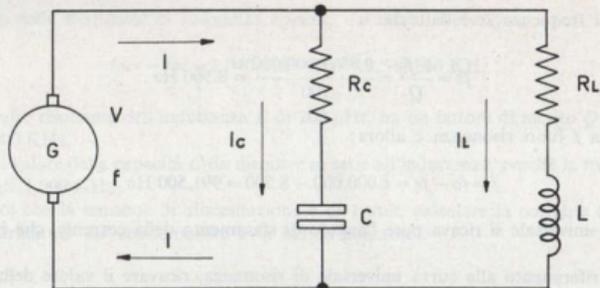


Fig. 10.7 - Circuito LC in parallelo.

la corrente assorbita dal ramo induttivo è data da:

$$I_L = \frac{V}{Z_L},$$

ed è sfasata in ritardo sulla  $V$  (fig. 10.8) di un angolo  $\varphi_L$  definito da:

$$\cos \varphi_L = \frac{R_L}{Z_L} \quad \text{oppure} \quad \sin \varphi_L = \frac{X_L}{Z_L},$$

per cui la sua componente attiva  $I_{aL}$  vale:

$$I_{aL} = I_L \cos \varphi_L,$$

e la sua componente reattiva  $I_{rL}$  vale:

$$I_{rL} = I_L \sin \varphi_L.$$

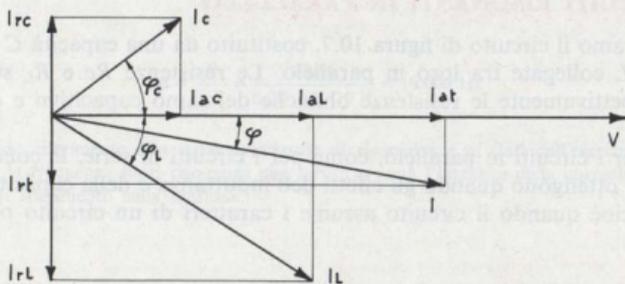


Fig. 10.8 - Diagramma vettoriale del circuito parallelo.

Analogamente, la corrente assorbita dal ramo capacitivo è data da:

$$I_c = \frac{V}{Z_c},$$

ed è sfasata in anticipo sulla  $V$  di un angolo  $\varphi_c$  definito da:

$$\cos \varphi_c = \frac{R_c}{Z_c} \quad \text{oppure} \quad \sin \varphi_c = \frac{X_c}{Z_c},$$

per cui la sua componente attiva  $I_{ac}$  vale:

$$I_{ac} = I_c \cos \varphi_c,$$

e la sua componente reattiva  $I_{rc}$  vale:

$$I_{rc} = I_c \sin \varphi_c.$$

La corrente totale  $I$  assorbita dall'intero circuito risulta perciò:

$$I = \sqrt{(I_{aL} + I_{ac})^2 + (I_{rL} - I_{rc})^2}.$$

Ricordando inoltre che i due rami, capacitivo ed induttivo, presentano rispettivamente le conduttanze  $G_c$  e  $G_L$  definite da:

$$G_c = \frac{R_c}{Z_c^2} \quad \text{e} \quad G_L = \frac{R_L}{Z_L^2},$$

e le suscettanze  $B_c$  e  $B_L$  date da:

$$B_c = \frac{X_c}{Z_c^2} \quad \text{e} \quad B_L = \frac{X_L}{Z_L^2},$$

per cui l'ammettenza totale  $Y$  del circuito risulta:

$$Y = \sqrt{(G_c + G_L)^2 + (B_c - B_L)^2},$$

la corrente totale  $I$  assorbita dall'intero circuito vale:

$$I = VY.$$

In forma simbolica, si può dunque scrivere:

$$\bar{Y} = G_c + G_L + j(B_c - B_L), \quad (10.12)$$

$$\bar{I} = V \cdot \bar{Y} = V(G_c + G_L) + jV(B_c - B_L) = I_{ac} + I_{aL} + j(I_{rc} - I_{rL}). \quad (10.13)$$

Affinché il circuito entri in risonanza ed assuma perciò i caratteri di un circuito puramente ohmico, la corrente totale  $I$  assorbita dal circuito deve risultare in fase con la tensione applicata  $V$ . Questa condizione si verifica solo quando i termini immaginari della (10.12) e della (10.13) si annullano, ossia quando le componenti reattive  $I_{rL}$  e  $I_{rc}$  delle correnti fluenti nei due rami sono tra loro uguali in valore assoluto e così pure le suscettanze  $B_L$  e  $B_c$ .

Alla risonanza si ha dunque:

$$I_{rL} = I_{rc} \quad \text{e} \quad B_L = B_c,$$

e la corrente totale  $I_o$  assorbita dal circuito coincide con la componente attiva totale, ossia con la somma delle componenti attive  $I_{aL}$  e  $I_{ac}$  delle correnti fluenti nei due rami:

$$I_o = I_{aL} + I_{ac}, \quad (10.14)$$

mentre l'ammettenza totale  $Y_o$  coincide con la conduttanza totale del circuito, ossia con la somma delle conduttanze  $G_c$  e  $G_L$ :

$$Y_o = G_L + G_c. \quad (10.15)$$

Dalla (10.14) e dalla (10.15) si deduce che, alla risonanza, il circuito assorbe la minima corrente in quanto presenta la minima ammettenza, ossia l'impedenza massima  $Z_o$ .

Tale impedenza che, in valore assoluto, viene definita da:

$$Z_o = \frac{1}{Y_o} = \frac{1}{G_L + G_c} = \frac{1}{\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{Rc}{Rc^2 + Xc^2}}, \quad (10.16)$$

viene normalmente calcolata con espressioni semplificate che comportano errori trascurabili purché le resistenze  $R_L$  e  $Rc$  siano sufficientemente piccole. In tal caso, nella (10.16), si possono trascurare i termini  $R_L^2$  e  $Rc^2$ , e si può ritenere, con buona approssimazione,  $X_L = Xc$ . Perciò si ha:

$$Z_o = \frac{X_{Lo}^2}{R_L + Rc} = \frac{X_{Lo} \cdot X_{co}}{R_s} = \frac{2\pi fL}{2\pi fCR_s} = \frac{L}{CR_s}. \quad (10.17)$$

Dunque, se in un circuito risonante parallelo le resistenze dei due rami fossero piccole, anche la corrente di alimentazione  $I_o$  avrebbe piccola intensità, mentre le correnti reattive che reciprocamente si fanno equilibrio nella maglia chiusa formata dall'induttanza e dalla capacità, avrebbero intensità rilevanti. Nel circuito si verifica il fenomeno di risonanza fra le correnti reattive  $I_{rL}$  e  $I_{rc}$ .

Al limite, se le resistenze ohmiche fossero nulle, l'intensità della corrente di alimentazione diverrebbe nulla, mentre le correnti reattive tenderebbero all'infinito.

In queste condizioni si ha che il circuito principale che alimenta i due rami del parallelo, non è percorso da corrente, come se fosse interrotto, mentre i due rami derivati risultano ugualmente percorsi da correnti uguali ed opposte di intensità elevatissima.

Per questo il circuito risonante in parallelo viene detto anche *circuito tampone* o *circuito antirisonante*.

Il fatto, apparentemente strano, di avere una oscillazione di corrente tra condensatore e induttanza, che tende a mantenersi anche senza corrente di alimentazione, è dovuta alla f.e.m. di autoinduzione che si genera nell'induttanza, e che provvede da sola a fornire la corrente di carica del condensatore che, a sua volta, la restituisce sottoforma di corrente di scarica all'induttanza.

In questa sorge una nuova f.e.m. che provvede a caricare il condensatore in senso opposto e così di seguito.

Il fenomeno dell'oscillazione verrà ripreso nello studio dei circuiti oscillanti.

Il regime di risonanza fra le correnti si verifica dunque quando  $B_c = B_L$  e cioè quando:

$$\frac{X_c}{Rc^2 + Xc^2} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2},$$

ossia quando:

$$\frac{\frac{1}{2\pi f_0 C}}{Rc^2 + \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C^2}} = \frac{2\pi f_0 L}{R_L^2 + 4\pi^2 f_0^2 L^2}.$$

Da questa uguaglianza si ricava il valore della frequenza di risonanza  $f_0$ :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{CR_L^2 - L}{CRc^2 - L}}. \quad (10.18)$$

Si osservi che la frequenza di risonanza dipende in modo piuttosto complesso oltre che dai valori di  $L$  e di  $C$ , anche dalle resistenze  $Rc$  e  $R_L$  dei due rami del parallelo.

Se le due resistenze fossero uguali fra loro, oppure fossero trascurabili, come avviene spesso nella pratica, la frequenza di risonanza dipenderebbe unicamente da  $L$  e da  $C$  e perciò rimarrebbe determinata ancora dalla legge di Thomson:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

valida per i circuiti risonanti in serie.

Prefissati i valori di  $C$ , di  $L$ , di  $R_c$  e di  $R_L$ , si può studiare il modo con cui varia la corrente di alimentazione e l'impedenza complessiva del circuito al variare della frequenza, mantenendo costante il valore della tensione applicata.

Abbiamo detto che alla frequenza di risonanza l'impedenza del circuito è massima e la corrente di alimentazione è minima.

Per  $f < f_0$ , si ha  $X_L < X_C$ : la corrente reattiva induttiva è maggiore di quella capacitiva, per cui il circuito è ohmico-induttivo.

L'impedenza diminuisce e la corrente aumenta.

Quando la frequenza si riduce a zero, la reattanza  $X_L$  è nulla e la reattanza  $X_C$  è infinita. L'impedenza del circuito assume il minimo valore e cioè quello di  $R_L$ , mentre la corrente è massima e corrisponde a  $V/R_L$ .

Per  $f > f_0$ , si ha  $X_L > X_C$ : la corrente reattiva capacitiva è maggiore di quella induttiva, per cui il circuito risulta ohmico-capacitivo.

L'impedenza diminuisce e la corrente aumenta.

Se la frequenza tende all'infinito,  $X_L$  tende all'infinito e  $X_C$  a zero. L'impedenza diventa uguale a  $R_c$  e la corrente assume il valore di  $V/R_c$ .

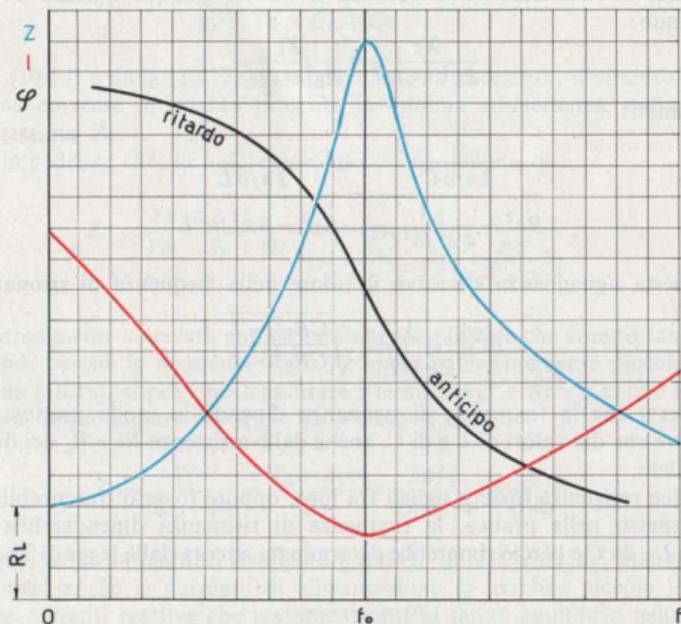


Fig. 10.9 - Andamento dell'impedenza, della corrente e della fase in un circuito antirisonante in funzione della frequenza.

Le curve relative alla variazione della corrente di alimentazione  $I$  e dell'impedenza  $Z$  del circuito antirisonante, in funzione della frequenza, sono rappresentate in figura 10.9.

L'intensità della corrente fuori risonanza o la frequenza corrispondente ad una corrente diversa da quella di risonanza, possono essere rilevate dalla curva universale di risonanza riportata in figura 10.6, considerando che le ordinate rappresentano il rapporto tra l'impedenza fuori risonanza e l'impedenza alla risonanza del circuito antirisonante; in tal caso gli angoli di sfasamento segnati in anticipo vanno considerati in ritardo.

La valutazione delle proprietà selettive e quindi dell'andamento delle curve di risonanza di un circuito parallelo, è caratterizzata, come per i circuiti serie, dal coefficiente di risonanza o cifra di merito  $Q$  e dalla banda passante  $B$ .

Il coefficiente di risonanza  $Q$  è però definito, in questo caso, dal rapporto tra la corrente reattiva  $I_{rL}$  (o  $I_{rC}$ ) assorbita dalla  $X_L$  (o  $X_C$ ) in condizioni di risonanza e la corrente attiva totale  $I_{at}$  assorbita dalle resistenze  $R_L$  e  $R_C$  (che coincide con la  $I_o$  assorbita dalla impedenza  $Z_o$  del circuito). Proprio per quest'ultima considerazione, il circuito risonante parallelo di figura 10.7 può essere rappresentato con il circuito equivalente di figura 10.10-a, dove  $R_p = Z_o$  e perciò:

$$I_o = \frac{V}{R_p} \quad I_{rL} = \frac{V}{X_L} \quad I_{rC} = \frac{V}{X_C}$$

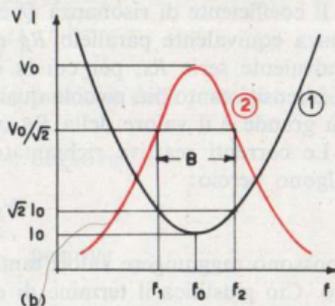
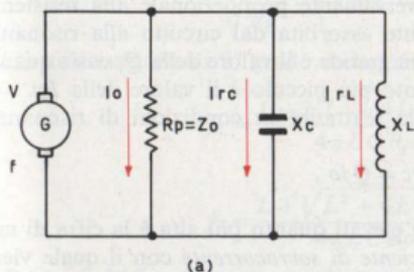


Fig. 10.10 - Circuito equivalente del circuito risonante parallelo di fig. 10.7 (a) e banda passante (b).

Il coefficiente di risonanza è allora definito da:

$$Q = \frac{I_{rL}}{I_o} = \frac{\frac{V}{X_L}}{\frac{V}{R_p}} = \frac{R_p}{X_L} = \frac{R_p}{2\pi f_o C R_p} = 2\pi f_o C R_p \quad (10.19)$$

Essendo però:

$$R_p = Z_0 = \frac{X_L^2}{R_s} \quad \text{dove} \quad R_s = R_L + R_c,$$

si ha anche:

$$Q = \frac{\frac{X_L^2}{R_s}}{X_L} = \frac{X_L}{R_s} = \frac{2\pi f_0 L}{R_s} = \frac{1}{2\pi f_0 C R_s}. \quad (10.20)$$

Sostituendo nella (10.19) e nella (10.20) al posto di  $f_0$  il suo valore dato dalla legge di Thomson, si ha anche rispettivamente:

$$Q = R_p \sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{e} \quad Q = \frac{1}{R_s} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (10.21)$$

da cui si deduce l'equivalenza fra la resistenza virtuale in serie  $R_s$  e la resistenza virtuale in parallelo  $R_p$ :

$$R_p = \frac{L}{C R_s}, \quad (10.22)$$

che coincide con la (10.17).

Il coefficiente di risonanza  $Q$  è dunque direttamente proporzionale alla resistenza equivalente parallelo  $R_p$  ed inversamente proporzionale alla resistenza equivalente serie  $R_s$ , per cui la corrente assorbita dal circuito alla risonanza ha intensità tanto più piccola quanto più grande è il valore della  $Q$ , ossia quanto più grande è il valore della  $R_p$  o quanto più piccolo è il valore della  $R_s$ .

Le correnti reattive richiamate dalle reattanze in condizioni di risonanza, valgono perciò:

$$I_{rL} = I_{rc} = Q I_0,$$

e possono raggiungere valori tanto più elevati quanto più alta è la cifra di merito. Ciò giustifica il termine di *coefficiente di sovracorrente* con il quale viene talvolta denominato il coefficiente di risonanza del circuito parallelo.

La **banda passante B** di un circuito risonante parallelo, agli effetti della curva di risonanza della corrente  $I$  assorbita dal circuito a tensione costante in funzione della frequenza, è in realtà la banda meno favorita. Infatti dal grafico di figura 10.10-*b* si può osservare che proprio in corrispondenza della banda compresa tra  $f_1$  e  $f_2$ , la corrente (curva 1) ha intensità inferiore a quella corrispondente a tutte le altre frequenze inferiori e superiori alla medesima banda, che perciò viene detta *banda soppressa*.

Supponendo però di mantenere costante la corrente erogata dal generatore, la tensione ai capi del circuito varierebbe, in funzione della frequenza, secondo l'andamento dell'impedenza  $Z$  e assumerebbe la forma della curva 2, dalla quale si usa dedurre la banda passante.

Comunque, se si considera lineare la corrente fino a quando la sua intensità non aumenta oltre il valore  $\sqrt{2} I_0$ , a cui corrispondono le due frequenze  $f_1$  e  $f_2$ , dette rispettivamente frequenze di taglio superiore e inferiore, si ha:

$$I_1 = I_2 = \sqrt{2} I_0 = \frac{\sqrt{2} V}{Z_0} = \frac{\sqrt{2} V}{R_p}$$

Oppure, se si considera lineare la tensione fino al valore  $V_0/\sqrt{2}$ , a cui corrispondono le medesime frequenze di taglio, si ha:

$$V_1 = V_2 = \frac{V_0}{\sqrt{2}} = \frac{I Z_0}{\sqrt{2}} = \frac{I R_p}{\sqrt{2}}$$

In entrambi i casi, sia per la banda soppressa che per la banda passante, l'impedenza del circuito, in corrispondenza delle frequenze di taglio, è data da:

$$Z = \frac{R_p}{\sqrt{2}}$$

ossia, con riferimento al circuito equivalente di figura 10.10-a,

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R_p^2} + \left(2\pi f C - \frac{1}{2\pi f L}\right)^2}} = \frac{R_p}{\sqrt{2}}$$

che è un'equazione di 2° grado e che, risolta in funzione della  $f$ , ha per radici:

$$f_1 = \frac{L - \sqrt{L^2 + 4LCRp^2}}{4\pi LCRp} \quad \text{negativa,}$$

e

$$f_2 = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4LCRp^2}}{4\pi LCRp} \quad \text{positiva.}$$

Pertanto la banda passante risulta:

$$B = f_2 - f_1 = \frac{1}{2\pi CRp} \quad (10.23)$$

Sostituendo al posto della resistenza equivalente il suo valore dato dalla (10.22) si ha:

$$B = \frac{R_s}{2\pi L}, \quad (10.24)$$

che coincide con l'espressione della banda passante dei circuiti serie.

Confrontando poi la (10.23) e la (10.24) rispettivamente con le espressioni (10.19) e (10.20) relative alla  $Q$ , si ha ancora:

$$B = \frac{f_0}{Q},$$

da cui si deduce che la banda passante è tanto più stretta, e il circuito tanto più selettivo, quanto più elevato è il valore di  $Q$ , ossia quanto minore è la resistenza serie  $R_s$  o quanto maggiore è la resistenza equivalente  $R_p$ .

Volendo quindi allargare la banda passante di un circuito risonante parallelo, risulta più agevole disporre in derivazione al circuito stesso una resistenza che, combinandosi con la  $R_p$  equivalente, ne diminuisce il valore a piacimento.

Osserviamo infine che mentre alla risonanza la corrente  $I_0$  è in fase con la tensione  $V$  di alimentazione, fuori risonanza, e precisamente in corrispondenza di  $f_1$ , la corrente  $I$  ritarda su  $V$  di  $45^\circ$ , mentre in corrispondenza di  $f_2$  anticipa di  $45^\circ$ .

Infatti essendo:

$$Z = \frac{R_p}{\sqrt{2}} \quad \text{ossia} \quad Y = \sqrt{2} G,$$

si ha:

$$\cos \varphi = \frac{G}{\sqrt{2} G} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

a cui corrisponde l'angolo di  $45^\circ$ .

Da quanto fin qui esposto sulle principali caratteristiche dei circuiti risonanti, possiamo dedurre che i due circuiti, serie e parallelo, assumono, in regime di risonanza, proprietà opposte, o meglio, duali. Infatti:

a) Nel circuito serie, la compensazione si ha fra le reattanze  $X_L$  e  $X_C$  e cioè fra le relative tensioni  $V_L$  e  $V_C$ .

Per resistenze trascurabili, l'impedenza serie tende a zero e la corrente di risonanza tende all'infinito.

Fuori risonanza, per  $f < f_0$  la corrente diminuisce e passa in anticipo sulla tensione, per  $f > f_0$  la corrente diminuisce e passa in ritardo sulla  $V$ .

Diminuendo la resistenza in serie, il coefficiente di risonanza  $Q$  aumenta e la banda passante  $B$  si restringe.

b) Nel circuito parallelo, la compensazione si ha fra le suscettanze  $B_L$  e  $B_C$  e cioè fra le relative correnti reattive.

Per resistenze trascurabili, l'impedenza parallelo tende all'infinito e la corrente di alimentazione tende a zero.

Fuori risonanza: per  $f < f_0$  la corrente aumenta e passa in ritardo sulla tensione, per  $f > f_0$  la corrente aumenta e passa in anticipo sulla  $V$ .

Diminuendo la resistenza in parallelo, il coefficiente di risonanza  $Q$  diminuisce e la banda passante  $B$  si allarga.

#### Esempio numerico

Un circuito antirisonante presenta alla frequenza di risonanza  $f_0$  di 2 MHz, l'impedenza  $Z_0$  di 50 Kohm. Sapendo che la cifra di merito  $Q$  del circuito è di 50, calcolare il valore delle costanti  $R_s$ ,  $C$  e  $L$  e la banda passante  $B$ .

#### Soluzione

L'impedenza  $Z_0$  è data, per la (10.19), da:

$$Z_0 = R_p = 2\pi f_0 L Q,$$

da cui si ricava l'induttanza  $L$  del circuito:

$$L = \frac{Z_0}{2\pi f_0 Q} = \frac{50 \cdot 10^3}{6,28 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 50} = 79,6 \mu\text{Hr}.$$

La resistenza  $R_s$  del circuito può essere calcolata con la (10.20):

$$R_s = \frac{2\pi f_0 L}{Q} = \frac{6,28 \cdot 2 \cdot 10^6 \cdot 79,6 \cdot 10^{-6}}{50} = 20 \text{ ohm}.$$

Per la (10.17) l'impedenza  $Z_0$  vale anche:

$$Z_0 = \frac{L}{R_s C},$$

da cui:

$$C = \frac{L}{R_s Z_0} = \frac{79,6 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 50 \cdot 10^3} = 79,6 \text{ pF}.$$

La banda passante  $B$  può essere calcolata in tre modi:

$$B = \frac{f_0}{Q} = \frac{2 \cdot 10^6}{50} = 40 \text{ KHz},$$

$$B = \frac{R_s}{2\pi L} = \frac{20}{6,28 \cdot 79,5 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ KHz},$$

$$B = \frac{1}{2\pi C R_p} = \frac{1}{6,28 \cdot 79,6 \cdot 10^{-12} \cdot 50 \cdot 10^3} = 40 \text{ KHz}.$$

### 10.3. CIRCUITI OSCILLANTI

Tutti i circuiti percorsi da corrente alternata possono definirsi circuiti oscillanti. Infatti la corrente, durante un semiperiodo fluisce in un senso e durante

il semiperiodo successivo fluisce in senso opposto, per cui, in un circuito metallico, gli elettroni si possono immaginare oscillanti intorno alla loro posizione e cioè dotati di un movimento oscillatorio.

Tali oscillazioni elettriche possono compiersi con qualsiasi frequenza e cioè con la frequenza del generatore che alimenta il circuito: per questo vengono dette *oscillazioni forzate*.

Infatti sono direttamente comandate dal generatore che fornisce al circuito l'energia occorrente per il fenomeno oscillatorio e che ne determina la frequenza, per cui questa risulta indipendente dalle caratteristiche del circuito stesso, ma esclusivamente legata al ritmo del generatore elettrico.

Quindi tutte le correnti alternate prodotte dagli alternatori sono oscillazioni elettriche forzate e sono paragonabili alle oscillazioni forzate di un pendolo rigidamente collegato ad un'asta condotta in movimento alternativo da un qualsiasi meccanismo.

In pratica però vengono definiti oscillanti i circuiti che sono sede di *oscillazioni libere* e cioè di oscillazioni che si manifestano spontaneamente in virtù delle attitudini specifiche e delle caratteristiche proprie del circuito, il quale, per aver ricevuto inizialmente un'energia elettrica, mantiene, anche se abbandonato a se stesso, le oscillazioni impressegli con una frequenza che, in questo caso, dipende solo dagli elementi del sistema che entra in oscillazione.

Un esempio meccanico di oscillazioni libere si ha percuotendo un diapason o una corda vibrante: essi si pongono in oscillazione libera e la mantengono a causa dell'impulso iniziale che hanno ricevuto, e vibrano con una frequenza che dipende dalla loro configurazione geometrica e dalle loro caratteristiche meccaniche.

Abbiamo visto al paragrafo precedente che un circuito con capacità e induttanza in parallelo, privo di resistenza ohmica, se portato alla risonanza, non assorbe più alcuna corrente dal generatore, come se fosse interrotto, mentre nei due rami derivati oscilla ugualmente un'intensa corrente con la frequenza di risonanza  $f_0$ .

In queste condizioni, anche se il generatore venisse staccato, la oscillazione di corrente si manterrebbe a causa sia dell'energia iniziale impressa al circuito che della proprietà caratteristica del circuito stesso di poter funzionare come un autogeneratore di corrente.

Cerchiamo ora di approfondire il fenomeno.

### 1) Circuito oscillante ideale

Consideriamo dapprima un circuito ideale di resistenza nulla, costituito da una capacità  $C$  e da una induttanza  $L$ , e da un generatore che serve solo a conferire la prima carica iniziale al condensatore (fig. 10.11).

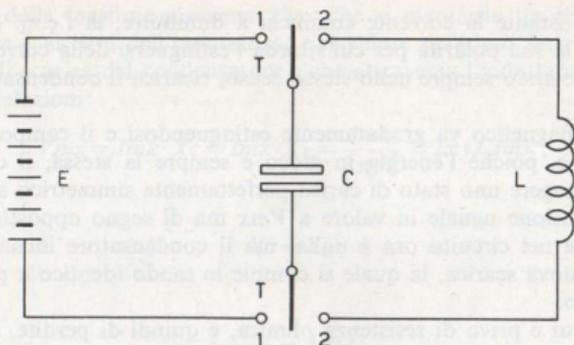


Fig. 10.11 - Il circuito oscillante ideale.

Si supponga di chiudere il commutatore  $T$  in posizione 1: il condensatore si carica e quindi tra le sue armature si forma un campo elettrico nel quale si accumula allo stato potenziale una energia data da:

$$W = \frac{1}{2} CVm_x^2,$$

dove  $Vm_x$  è la tensione massima che si stabilisce tra le armature e che risulta uguale alla f.e.m.  $E$  del generatore.

Si porti ora il commutatore  $T$  in posizione 2: il condensatore si scarica attraverso l'induttanza, che viene attraversata da un impulso di corrente.

A questa corrente si contrappone immediatamente la f.e.m. di autoinduzione che impedisce la scarica istantanea, per cui la corrente stessa aumenta con relativa lentezza da zero al valore massimo, mentre la tensione del condensatore dal valore  $Vm_x$  scende a zero.

Mentre il campo elettrico tra le armature del condensatore va gradatamente estinguendosi, si costituisce attorno all'induttanza un campo magnetico crescente, nel quale si va accumulando, sottoforma di energia intrinseca della corrente, l'energia elettrostatica che si libera dal campo elettrico. Se, come abbiamo presupposto, il circuito è privo di resistenza, l'energia elettrostatica si trasforma integralmente nel campo magnetico e vale:

$$W = \frac{1}{2} LIm_x^2,$$

dove  $Im_x$  è la massima corrente di scarica del condensatore che attraversa il solenoide.

Da questo istante la corrente comincia a diminuire, la f.e.m. di autoinduzione inverte la sua polarità per cui ritarda l'estinguersi della corrente. Questa, pertanto, circolando sempre nello stesso senso, ricarica il condensatore in senso opposto.

Il campo magnetico va gradatamente estinguendosi e il campo elettrico va costituendosi e, poiché l'energia in gioco è sempre la stessa, il condensatore viene a raggiungere uno stato di carica perfettamente simmetrico al precedente e cioè una tensione uguale in valore a  $V_{mx}$  ma di segno opposto.

La corrente nel circuito ora è nulla, ma il condensatore inizia immediatamente una nuova scarica, la quale si compie in modo identico a prima, ma in senso opposto.

Se il circuito è privo di resistenza ohmica, e quindi di perdite, si verifica in esso una trasformazione alterna e spontanea della energia impressa inizialmente al condensatore, da energia elettrostatica in energia elettromagnetica e viceversa, e cioè un susseguirsi indefinito di oscillazioni di corrente dette *oscillazioni libere persistenti*.

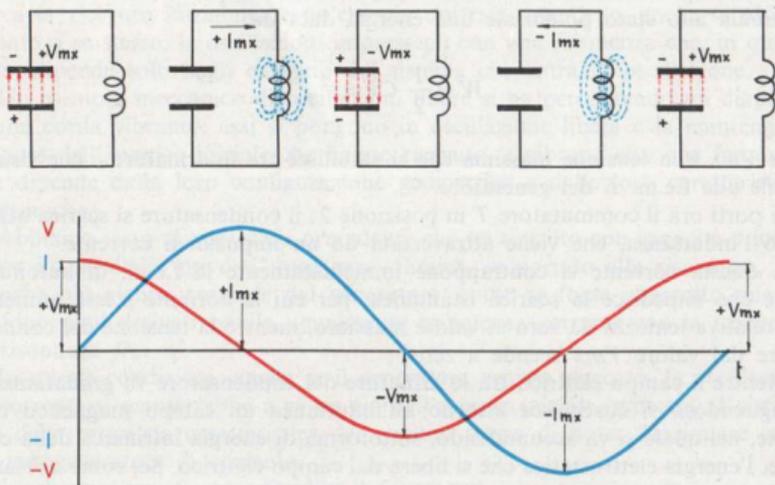


Fig. 10.12 - Oscillazioni elettriche libere persistenti.

La tensione e la corrente variano entrambe con legge sinusoidale e sono l'una rispetto all'altra sfasata di  $90^\circ$ , come rappresentato in figura 10.12, dove è pure rappresentata schematicamente la trasformazione del campo elettrico in campo magnetico e viceversa durante un intero periodo.

Il valore della tensione massima  $V_{mx}$  che si manifesta tra le armature del condensatore e ai capi dell'induttanza, e il valore massimo  $I_{mx}$  della corrente di carica e di scarica del condensatore e che attraversa l'induttanza, sono legati dalle note relazioni:

$$V_{mx} = I_{mx} \cdot X_C = I_{mx} \cdot X_L = \frac{I_{mx}}{2\pi f C} = 2\pi f L I_{mx}, \quad (10.25)$$

da cui:

$$X_C = X_L,$$

ossia:

$$\frac{1}{2\pi f C} = 2\pi f L,$$

dalla quale si ricava il valore della frequenza  $f$  delle oscillazioni libere, detta ancora frequenza di risonanza  $f_0$ :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad (10.26)$$

che può ritenersi valida anche per i circuiti oscillanti aventi una piccola resistenza.

Sostituendo nella (10.25) al posto di  $2\pi f$  il suo valore ricavato dalla (10.26), si ha:

$$V_{mx} = \frac{I_{mx}\sqrt{LC}}{C} = \frac{I_{mx}L}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_{mx}. \quad (10.27)$$

Il termine  $\sqrt{\frac{L}{C}}$  viene chiamato *impedenza fittizia del circuito oscillante*, perché ha le dimensioni di una impedenza e perciò viene misurata in ohm.

La frequenza delle oscillazioni è dunque indipendente dall'ampiezza e dal sistema dell'energia iniziale che ha dato origine alle oscillazioni stesse, ma dipende unicamente dalle costanti del circuito.

Diminuendo l'induttanza o la capacità, la frequenza aumenta e può raggiungere valori elevatissimi se  $L$  e  $C$  vengono ridotti a valori molto piccoli.

Si comprende allora come i circuiti oscillanti possano costituire dei *sistemi autogeneratori di frequenze elevatissime*.

## 2) Circuito oscillante reale

In pratica è impossibile avere un circuito ideale e cioè un circuito privo di resistenza e quindi privo di perdite d'energia dovute all'effetto Joule, all'isteresi magnetica ed elettrica.

Se consideriamo allora un circuito comprendente la capacità  $C$ , la induttanza  $L$  e la resistenza  $R$  (fig. 10.13), intendendo con  $R$  la resistenza complessiva dovuta ai conduttori di collegamento e del solenoide e a tutte le perdite che si verificano nel circuito, il fenomeno oscillatorio si modifica grandemente.

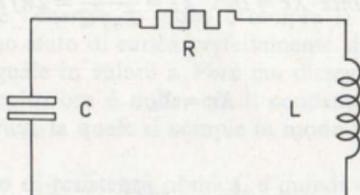


Fig. 10.13 - Circuito oscillante reale.

Innanzitutto non è più:

$$\frac{1}{2} CVmx^2 = \frac{1}{2} LImx^2,$$

in quanto durante la trasformazione dell'energia da elettrostatica in elettromagnetica e viceversa, e quindi ad ogni oscillazione, una parte dell'energia inizialmente impressa al circuito viene dissipata in calore nella resistenza  $R$  e la rimanente si trasferisce nel campo magnetico o nel campo elettrico a seconda della fase dell'oscillazione.

Ne consegue che quando il condensatore si scarica, dell'energia che si libera dal campo elettrico solo una parte si trasferisce nel campo magnetico sotto forma di energia intrinseca della corrente, per cui la corrente raggiunge un valore minore di quello che essa avrebbe raggiunto in un circuito ideale.

Dal momento in cui la corrente comincia a diminuire, dell'energia del campo magnetico solo una parte si trasferisce nel campo elettrico per cui la tensione che si stabilisce tra le armature del condensatore è minore della tensione iniziale.

Il fenomeno si ripete ad ogni periodo con le stesse vicende, sicché la corrente e la tensione vanno gradatamente decrescendo fino ad annullarsi quando l'energia accumulata inizialmente dal condensatore si è dissipata completamente in calore.

Il fenomeno oscillatorio va allora smorzandosi e pertanto il circuito, per la presenza della resistenza  $R$ , produce *oscillazioni libere smorzate*.

In figura 10.14 è rappresentato l'andamento della tensione  $V$  e della corrente  $I$  in un circuito reale in funzione del tempo, ossia l'andamento delle oscillazioni libere smorzate.

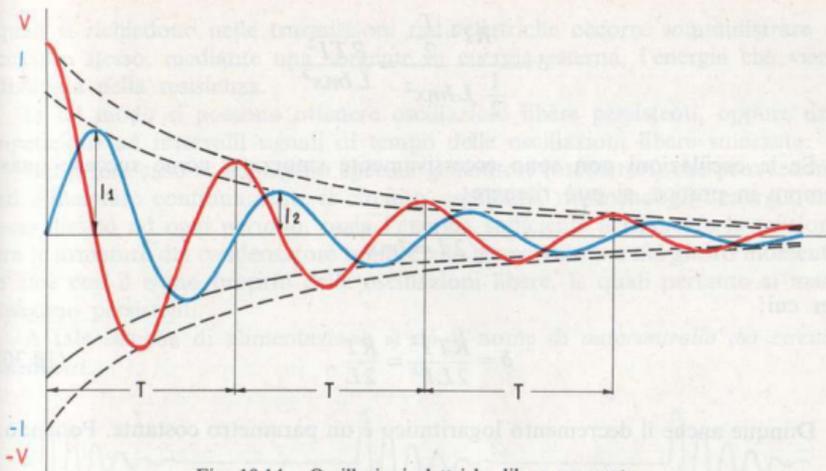


Fig. 10.14 - Oscillazioni elettriche libere smorzate.

Lo studio completo dei fenomeni oscillatori di un circuito reale richiederebbe la risoluzione di equazioni differenziali di secondo ordine. Ci limiteremo pertanto ad una esposizione semplificata delle caratteristiche fondamentali delle oscillazioni libere smorzate.

a) *Smorzamento delle oscillazioni.* Le oscillazioni smorzate godono della proprietà di decrescere in progressione geometrica, ossia di mantenere costante il rapporto fra le ampiezze successive dello stesso segno. Quindi decrescono secondo il profilo di una curva logaritmica (fig. 10.14).

Il valore costante di tale rapporto prende il nome di *decremento della oscillazione* e si indica con la lettera  $\Delta$ .

$$\Delta = \frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_3} = \frac{I_3}{I_4} = \dots, \quad (10.28)$$

ed è indice delle resistenze passive, e quindi delle perdite di energia, che provocano lo smorzamento delle oscillazioni.

In pratica viene più frequentemente usato il *decremento logaritmico*  $\delta$  rappresentato dal logaritmo naturale del decremento  $\Delta$  delle oscillazioni:

$$\delta = \ln \Delta = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln \frac{I_2}{I_3} = \ln \frac{I_3}{I_4} = \dots. \quad (10.29)$$

Il decremento logaritmico è definito dal rapporto tra l'energia dissipata dal circuito in un semiperiodo e l'energia scambiata tra induttanza e capacità nello stesso tempo.

$$\delta = \frac{RI^2 \frac{T}{2}}{\frac{1}{2} LImx^2} = \frac{RTI^2}{LImx^2}.$$

Se le oscillazioni non sono eccessivamente smorzate, come succede quasi sempre in pratica, si può ritenere:

$$\sqrt{2} I = Imx,$$

per cui:

$$\delta = \frac{RTI^2}{2LI^2} = \frac{RT}{2L}. \quad (10.30)$$

Dunque anche il decremento logaritmico è un parametro costante. Ponendo:

$$\frac{R}{2L} = \beta,$$

si ha:

$$\delta = \beta T, \quad (10.31)$$

dove il termine costante  $\beta$  prende il nome di *fattore di smorzamento*.

Sostituendo nella (10.29) al posto di  $\delta$  il valore ora determinato, si ha:

$$\beta T = \ln \Delta,$$

e quindi:

$$\Delta = e^{\beta T}, \quad (10.32)$$

dove  $e$  rappresenta la base dei logaritmi neperiani ( $e = 2,718$ ).

Perciò il decremento della oscillazione può essere espresso anche nel seguente modo:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{I_2}{I_3} = \frac{I_3}{I_4} = \dots e^{\beta T}, \quad (10.33)$$

da cui si deduce che lo smorzamento delle oscillazioni segue un profilo logaritmico od esponenziale.

Un buon circuito oscillante presenta un piccolo decremento di oscillazione compreso tra 1,1 e 1,2 e un decremento logaritmico non superiore a 0,1.

Da quanto esposto risulta evidente che per poter utilizzare un circuito oscillante reale come generatore di oscillazioni elettriche persistenti ad alta frequenza,

quali si richiedono nelle trasmissioni radioelettriche occorre somministrare al circuito stesso, mediante una sorgente di energia esterna, l'energia che viene dissipata nella resistenza.

In tal modo si possono ottenere oscillazioni libere persistenti, oppure una ripetizione ad intervalli uguali di tempo delle oscillazioni libere smorzate.

Nel primo caso si impiegano speciali generatori (oscillatori) che provvedono ad alimentare continuamente il circuito oscillante, rifornendogli l'energia che esso dissipa ad ogni periodo, ossia l'energia sufficiente a riportare la tensione tra le armature del condensatore sempre allo stesso valore e nel giusto momento e cioè con il ritmo proprio delle oscillazioni libere, le quali pertanto si mantengono persistenti.

A tale sistema di alimentazione si dà il nome di *autocontrollo dei circuiti oscillanti*.

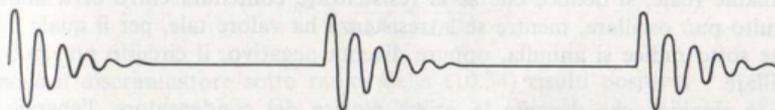


Fig. 10.15 - Treno di oscillazioni elettriche smorzate.

Nel secondo caso si usa un *generatore di oscillazioni smorzate ripetute* e cioè un alimentatore che provvede a rifornire l'energia di ricarica del condensatore ad intervalli di tempo regolari maggiori della durata delle scariche oscillanti.

Si ottiene così un rapido susseguirsi di gruppi di oscillazioni smorzate intervallate, al quale si dà il nome di *treno di oscillazioni*, avente l'andamento rappresentato in figura 10.15.

b) *Frequenza delle oscillazioni smorzate*. In un circuito oscillante reale, la frequenza  $f$  delle oscillazioni libere smorzate è costante ed è indipendente dalla loro ampiezza. È dimostrato infatti che:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}, \quad (10.34)$$

da cui si deduce che in un circuito avente un fattore di smorzamento  $\beta$ , la frequenza delle oscillazioni risulta inferiore alla frequenza  $f_0$  che si avrebbe, a parità di induttanza e di capacità, in un circuito oscillante ideale. Infatti si può scrivere anche:

$$f = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2 LC} - \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2} = \sqrt{f_0^2 - \left(\frac{\beta}{2\pi}\right)^2}.$$

Supponendo però che la resistenza  $R$  del circuito sia molto piccola, come spesso si verifica in pratica, nella (10.34) il quadrato del fattore di smorzamento

$\beta$  tenderebbe a zero e la frequenza  $f$  delle oscillazioni tenderebbe alla frequenza ideale  $f_0$ .

Nei calcoli pratici, noto il fattore di smorzamento  $\beta$  e il decremento logaritmico  $\delta$ , la frequenza  $f$  viene immediatamente definita dalla (10.31):

$$\delta = \beta T = \frac{\beta}{f},$$

da cui:

$$f = \frac{\beta}{\delta}, \quad (10.35)$$

ossia dal rapporto tra il fattore di smorzamento e il decremento logaritmico.

c) *Resistenza critica.* Dalla (10.34), che determina la frequenza del circuito oscillante reale, si deduce che se la resistenza è contenuta entro certi limiti, il circuito può oscillare, mentre se la resistenza ha valore tale, per il quale il termine sotto radice si annulla, oppure diventa negativo, il circuito non può più oscillare.

Ciò significa che durante la prima scarica del condensatore, l'energia del campo elettrico anziché trasformarsi parte in calore e parte in energia elettromagnetica, viene completamente dissipata nella resistenza  $R$ . Si dice allora che nel circuito si verifica una *scarica aperiodica*, ossia senza periodo, e quindi una scarica che non può dare inizio alla successione delle oscillazioni. L'andamento della tensione e della corrente di una scarica aperiodica è rappresentato in figura 10.16.

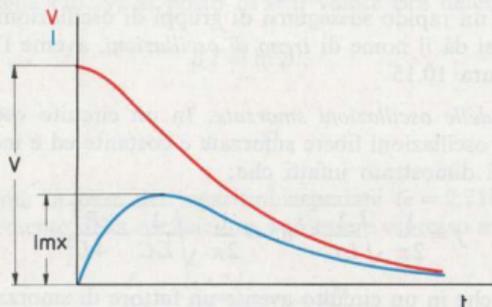


Fig. 10.16 - Andamento della tensione e della corrente di una scarica aperiodica.

Il valore limite  $R_c$  della resistenza che evita al circuito reale di entrare in oscillazione è evidentemente quello che rende uguali tra loro i due termini sotto radice, e cioè:

$$\frac{1}{LC} = \frac{R_c^2}{4L^2},$$

da cui:

$$Rc = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (10.36)$$

A tale resistenza si dà il nome di *resistenza critica*.

Dunque, un circuito reale, affinché possa divenire sede di oscillazioni libere, deve avere una resistenza virtuale  $R$  inferiore alla resistenza critica  $Rc$ :

$$R < Rc = 2 \sqrt{\frac{L}{C}},$$

oppure deve avere un fattore di smorzamento  $\beta$  tale che:

$$\beta^2 = \frac{R^2}{4L^2} < \frac{1}{LC},$$

affinché il discriminatore sotto radice della (10.34) risulti positivo.

*d) Significati del decremento logaritmico.* Il decremento logaritmico assume due significati ben distinti a seconda che si riferisce alle oscillazioni smorzate oppure alle oscillazioni rese persistenti dalla somministrazione di energia al circuito reale pari a quella dissipata dalla resistenza  $R$ .

Nel primo caso, ossia nelle oscillazioni smorzate, il decremento logaritmico rappresenta, come precedentemente detto, il logaritmo del rapporto tra due ampiezze successive dello stesso segno, che distano perciò tra loro di un periodo.

Se, come già supposto, la resistenza  $R$  del circuito è trascurabile, per cui la frequenza  $f$  delle oscillazioni smorzate può ritenersi all'incirca uguale alla frequenza  $f_0$  del circuito ideale:

$$f \cong f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{da cui} \quad T \cong T_0 = 2\pi\sqrt{LC},$$

il decremento logaritmico  $\delta$ , definito dalla (10.30), si può considerare all'incirca uguale a:

$$\delta = \frac{RT}{2L} \cong \frac{2\pi R\sqrt{LC}}{2L} \cong \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad (10.37)$$

da cui osserviamo che per diminuire il decremento delle oscillazioni smorzate senza modificare la resistenza del circuito e la frequenza delle oscillazioni, basta diminuire la capacità ed aumentare corrispondentemente l'induttanza.

Nel secondo caso, ossia quando le oscillazioni sono mantenute persistenti immettendo nel circuito reale, ad ogni semiperiodo, l'energia esattamente uguale

a quella dissipata nella resistenza nello stesso tempo, il decremento logaritmico  $\delta$  perde il significato datogli precedentemente.

Infatti, dal momento che tutte le ampiezze successive sono tra loro uguali, si ha, per la (10.29):

$$\delta = \ln \frac{I_1}{I_2} = \ln 1 = \text{zero} ,$$

mentre l'espressione (10.37) non si annulla mai, neppure quando le oscillazioni sono persistenti. Il decremento logaritmico acquista dunque, in questo caso, un altro significato: esso misura la quantità di energia che occorre somministrare ad ogni semiperiodo al circuito reale di energia totale unitaria affinché le oscillazioni risultino persistenti.

Infatti, se indichiamo con:

$$W = \frac{1}{2} L I m x^2 ,$$

l'energia totale posseduta dal circuito, e con:

$$W_p = R I^2 \frac{T}{2} ,$$

l'energia dissipata dalla resistenza in un semiperiodo, si ha, per la (10.30):

$$\frac{W_p}{W} = \delta ,$$

da cui:

$$W_p = \delta W . \quad (10.38)$$

Se, come abbiamo detto, riduciamo all'unità l'energia  $W$  posseduta dal circuito, si ha:

$$W_p = \delta ,$$

da cui si deduce anche che l'energia  $W_p$  richiesta è proporzionale all'energia totale  $W$  posseduta inizialmente dal circuito reale.

#### Esempio numerico

Un circuito oscillante reale è costituito da un'induttanza di 1 mHr, da una capacità di 1 nF e da una resistenza di 20 ohm. Supponendo di aver conferito al condensatore una tensione iniziale di 100 volt, calcolare il fattore di smorzamento, la resistenza critica, la frequenza delle oscillazioni, il decremento logaritmico e l'energia da somministrare al circuito ad ogni semiperiodo per ottenere le oscillazioni persistenti.

Calcolo del fattore di smorzamento:

$$\beta = \frac{R}{2L} = \frac{20}{2 \cdot 10^{-3}} = 10^4 .$$

Calcolo della resistenza critica:

$$R_c = 2 \sqrt{\frac{L}{C}} = 2 \sqrt{\frac{10^{-3}}{10^{-9}}} = 2.000 \text{ ohm} .$$

Calcolo della frequenza delle oscillazioni:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \beta^2} = \frac{1}{6,28} \sqrt{\frac{1}{10^{-3} 10^{-9}} - (10^4)^2} = 159.235 \text{ Hz} .$$

Calcolo del decremento logaritmico:

$$\delta = \beta T = 10^4 \frac{1}{159.235} = 0,0628 .$$

Dal momento che la resistenza del circuito è da ritenersi molto piccola in confronto alla resistenza critica, il decremento logaritmico si può calcolare con l'espressione:

$$\delta = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}} = 3,14 \cdot 20 \sqrt{\frac{10^{-9}}{10^{-3}}} = 0,0628 .$$

L'energia massima iniziale conferita al circuito è data da:

$$W = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} 10^{-9} \cdot 100^2 = 5 \cdot 10^{-6} \text{ joule} ,$$

per cui l'energia da somministrare al circuito per ottenere le oscillazioni persistenti, è data da:

$$W_p = \delta W = 0,0628 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 314 \cdot 10^{-9} \text{ joule} .$$

#### 10.4. CIRCUITI OSCILLANTI APERTI

I circuiti oscillanti che abbiamo precedentemente considerati sia in funzione di generatori di oscillazioni elettriche (oscillatori), sia in funzione di circuiti indotti (risuonatori), sono circuiti *chiusi* nei quali l'induttanza e la capacità sono costituite rispettivamente da un solenoide e da un condensatore nettamente distinti.

Esistono però circuiti oscillanti *aperti*, detti anche *a induttanza e a capacità distribuite*, particolarmente adatti ad irradiare o a captare le onde elettromagnetiche, ossia segnali a frequenze molto elevate.

È noto che per ottenere frequenze sempre più elevate è necessario ridurre sempre più i valori dell'induttanza e della capacità, al punto che l'induttanza può essere determinata da una sola spira o da un arco di spira (fig. 10.17) e la capacità dai tratti di conduttore che vanno dal punto centrale 0 dell'arco agli estremi  $A$  e  $B$ .

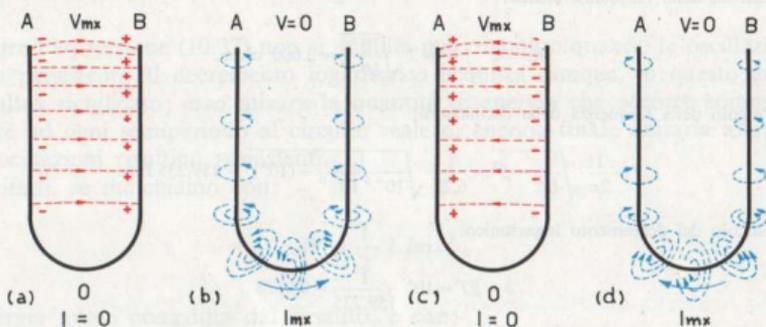


Fig. 10.17 - Circuito oscillante a capacità e induttanza distribuita.

Si ha cioè che l'arco di spira costituisce, ad un tempo, l'induttanza e la capacità del circuito.

Lo scambio di energia tra capacità ed induttanza e quindi il formarsi alternato dei campi elettrici e dei campi magnetici, avviene come in un circuito oscillante con capacità ed induttanze concentrate.

Infatti, riferendoci alla figura 10.17-a, supponiamo di aver collegato per un istante i terminali dell'arco ad un generatore di energia elettrica. Sulle superfici dei due tratti  $OA$  e  $OB$  affiorano cariche elettriche uguali ed opposte. Pertanto lo spazio circostante diviene sede di linee di forza elettriche (campo elettrico) che collegano fra loro le cariche di nome opposto: tra i punti  $A$  e  $B$  si ha la massima tensione  $V_{mx}$  e, in questo istante, la corrente è nulla. L'arco si comporta quindi come un condensatore carico.

Le cariche però tendono a neutralizzarsi e perciò nasce una corrente di scarica, diretta dall'armatura negativa ( $OA$ ) alla positiva ( $OB$ ). Tale corrente è crescente e raggiunge il suo massimo  $I_{mx}$  quando la tensione è nulla.

Il campo elettrico diminuisce e scompare, ma contemporaneamente si va formando il campo magnetico avente la configurazione di figura 10.17-b.

L'energia elettrostatica si è trasformata in energia elettromagnetica.

La corrente incomincia ora a diminuire, determinando l'addensamento di cariche elettriche sui due tratti  $OA$  e  $OB$ , tra i quali si va ricostituendo il campo elettrico in senso opposto a prima (fig. 10.17-c), mentre va scomparendo il campo

magnetico. Tra gli estremi  $A$  e  $B$ , supposta nulla la resistenza del sistema, si manifesta allora la stessa tensione  $V_{mx}$  ma di segno cambiato.

Ne segue una nuova scarica in senso opposto alla precedente ma con le stesse vicende, per cui tra i due tratti  $OA$  e  $OB$  si riforma un campo magnetico come rappresentato in figura 10.17-d.

Nell'arco di spira si generano dunque delle oscillazioni libere, che possono essere persistenti se il sistema è privo di ogni perdita oppure se è alimentato da un dispositivo di autocontrollo, o smorzate se il sistema, comprendente una resistenza, non viene alimentato.

Il fenomeno oscillatorio si manifesta anche se i due tratti di arco vengono aperti fino al raddrizzamento completo, come rappresentato in figura 10.18.

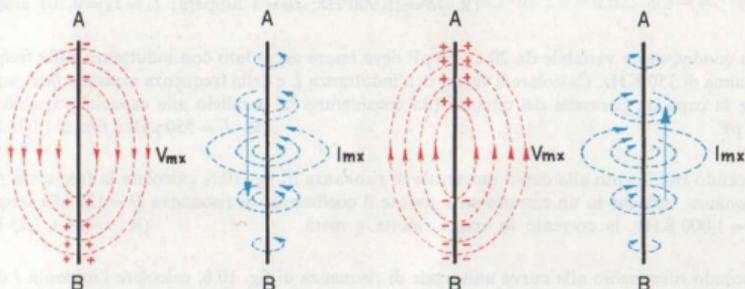


Fig. 10.18 - Circuito oscillante aperto: dipolo.

Il sistema che ne risulta è allora costituito da un conduttore rettilineo isolato nel quale avviene un vero e proprio movimento oscillatorio di elettroni liberi. Tale conduttore prende il nome di *dipolo* e può essere usato in funzione di generatore di oscillazioni od oscillatore (antenne trasmettenti), oppure in funzione di circuito oscillante indotto o risonatore (antenne riceventi).

La frequenza propria di risonanza di un dipolo dipende ovviamente dalla capacità e dall'induttanza distribuite che, a loro volta, dipendono dalla lunghezza e dal diametro, ossia dalle dimensioni, del conduttore che costituisce il dipolo.

Il fenomeno verrà ripreso ed approfondito nello studio delle antenne.

## 10.5. ESERCIZI DA RISOLVERE

1. Un circuito risonante serie ha la resistenza  $R = 5$  ohm e il coefficiente di risonanza  $Q = 100$  alla frequenza di risonanza  $f_0 = 159$  KHz. Calcolare la capacità  $C$  e l'induttanza  $L$  del circuito, nonché la banda passante.  
(R.  $L \cong 500 \mu\text{Hr}$ ;  $C = 2$  nF;  $B = 1.590$  Hz).
2. Un circuito risonante è costituito dall'induttanza  $L = 500 \mu\text{Hr}$  e da un condensatore in serie della capacità  $C = 0,2 \mu\text{F}$ . Sapendo che la cifra di merito è  $Q = 50$  e che la tensione di alimentazione è  $V = 1$  V, calcolare la frequenza di risonanza  $f_0$ , la corrente  $I_0$  alla risonanza e la corrente corrispondente alle frequenze di taglio della banda passante.  
(R.  $f_0 = 15.900$  Hz;  $I_0 = 1$  ampere;  $I_1 = I_2 = 0,707$  ampere).
3. Un condensatore variabile da 20 a 350 pF deve essere accordato con induttanza sulla frequenza minima di 350 KHz. Calcolare il valore dell'induttanza  $L$  e della frequenza massima  $f_{mx}$ , sapendo che la capacità parassita del circuito (da considerarsi in parallelo alla capacità variabile) è di 20 pF.  
(R.  $L = 550 \mu\text{Hr}$ ;  $f_{mx} \cong 1.075$  KHz).
4. Facendo riferimento alla curva universale di risonanza di fig. 10.6, calcolare la frequenza  $f$  fuori risonanza, affinché in un circuito serie avente il coefficiente di risonanza  $Q = 120$  alla frequenza  $f_0 = 1.000$  KHz, la corrente  $I_0$  venga ridotta a metà.  
(R.  $f = f_0 \pm 7,25$  KHz).
5. Facendo riferimento alla curva universale di risonanza di fig. 10.6, calcolare l'intensità  $I$  di corrente che fluirà nel circuito dell'esercizio precedente, quando la frequenza è inferiore a quella di risonanza di 10 KHz.  
(R.  $I = 0,38 I_0$ ).
6. Facendo uso della curva universale di risonanza di fig. 10.6, ricavare la cifra di merito  $Q$  di un circuito serie che sottoposto alla frequenza di 15 KHz inferiore a quella di risonanza  $f_0 = 1.210$  KHz, assorbe una corrente  $I$  metà di quella di risonanza  $I_0$ .  
(R.  $Q = 70$ ).
7. Un circuito antirisonante presenta un'impedenza  $Z_0 = 6$  Kohm alla frequenza di risonanza  $f_0 = 3$  MHz. Calcolare il valore dell'induttanza  $L$ , della capacità  $C$  e della resistenza  $R$  del circuito, sapendo che il suo coefficiente di risonanza è di 12.  
(R.  $R = 41,8$  ohm;  $L = 26,5 \mu\text{Hr}$ ;  $C = 106$  pF).
8. Un circuito risonante parallelo avente l'induttanza  $L = 250 \mu\text{Hr}$ , la capacità  $C = 10$  pF e la resistenza  $R = 25$  ohm, viene alimentato alla frequenza di risonanza da un generatore avente la tensione a vuoto  $E_0 = 50$  volt con resistenza interna  $R_0 = 10^5$  ohm. Calcolare la resistenza equivalente parallelo  $R_p$ , la frequenza di risonanza  $f_0$ , la corrente  $I$  erogata dal generatore, la tensione  $V$  ai capi del circuito risonante e la corrente  $I_0$  di risonanza.  
(R.  $R_p = 10^6$  ohm;  $f_0 = 3.184$  KHz;  $I = 4,545 \cdot 10^{-5}$  A;  $V = 45,45$  volt;  $I_0 = 9 \cdot 10^{-3}$  A).
9. Un circuito antirisonante ha l'impedenza  $Z_0 = 10^6$  ohm e la cifra di merito  $Q = 100$  alla frequenza di risonanza  $f_0 = 10^6$  Hz. Calcolare la capacità  $C$  e l'induttanza  $L$  del circuito e determinare inoltre la resistenza equivalente serie  $R_s$ .  
(R.  $L = 16 \cdot 10^{-4}$  Hr;  $C = 16$  pF;  $R_s = 100$  ohm).

10. Un circuito oscillante reale avente l'induttanza  $L = 1 \text{ mHr}$  è libero di oscillare sulla frequenza  $f_0 = 10^6 \text{ Hz}$ . Sapendo che la sua resistenza equivalente serie è  $R_s = 100 \text{ ohm}$ , calcolare lo smorzamento e il decremento logaritmico.  
(R.  $\beta = 50.000$ ;  $\delta = 0,05$ ).
11. Un circuito oscillante reale avente l'induttanza  $L = 25 \cdot 10^{-5} \text{ Hr}$  viene alimentato alla tensione di 10 volt e assorbe, per mantenere le oscillazioni persistenti, l'energia  $W_p = 2 \cdot 10^{-10} \text{ j}$ . Sapendo che il suo decremento logaritmico è  $\delta = 0,04$ , determinare l'energia  $W$ , la capacità  $C$  e la resistenza serie  $R_s$  del circuito e la frequenza di risonanza  $f_0$ .  
(R.  $W = 5 \cdot 10^{-9} \text{ j}$ ;  $C = 100 \text{ pF}$ ;  $f_0 \cong 10^6 \text{ Hz}$ ;  $R_s = 20 \text{ ohm}$ ).
12. Un circuito oscillante reale avente la capacità  $C = 50 \text{ pF}$  e la resistenza serie  $R_s = 20 \text{ ohm}$ , viene alimentato alla tensione di 10 volt. Sapendo che la sua frequenza di risonanza è  $f_0 = 10^6 \text{ Hz}$ , determinare l'induttanza  $L$  del circuito, il coefficiente di smorzamento  $\beta$ , il decremento logaritmico  $\delta$  e l'energia  $W_p$  necessaria per mantenere persistenti le oscillazioni.  
(R.  $L = 5 \cdot 10^{-4} \text{ Hr}$ ;  $\beta = 2 \cdot 10^4$ ;  $\delta = 0,02$ ;  $W_p = 50 \cdot 10^{-12} \text{ j}$ ).

## Capitolo Undicesimo

### Quadripoli passivi in regime sinusoidale e rettangolare

Nelle applicazioni elettroniche, di sovente, necessita trasferire da un circuito generatore di segnali ad un circuito utilizzatore, la massima potenza del segnale generato e, a volte, in corrispondenza ad una sola e ben definita banda di frequenze e non ad altre, e, in alcuni casi, variandone la forma d'onda.

Allo scopo vengono adottati particolari circuiti da porre tra generatore ed utilizzatore, detti *quadripoli*, che, adattando l'impedenza di uscita del generatore all'impedenza di ingresso dell'utilizzatore, assicurano il massimo trasferimento di potenza, o che, attenuando fortemente alcune frequenze del segnale di ingresso, rendono in uscita una risposta soddisfacente alle sole frequenze desiderate, o che, sfruttando la loro costante di tempo, variano la forma d'onda del segnale da trasferire.

I quadripoli sono circuiti elettrici, più o meno complessi, che presentano due morsetti di ingresso a cui si applica il segnale proveniente dal generatore, e due morsetti di uscita da cui si ricava il segnale da applicare al carico.

I quadripoli che contengono nel loro interno dei generatori si dicono *attivi*, in caso contrario si dicono *passivi*. Inoltre vengono detti *lineari* quando il segnale disponibile alla loro uscita è direttamente proporzionale a quello di ingresso; vengono detti invece *non lineari* quando alle variazioni del segnale di ingresso non corrisponde una proporzionale variazione del segnale di uscita.

Analizzeremo pertanto, in regime sinusoidale, i quadripoli adattatori di impedenza e i filtri elettrici e, in regime rettangolare, i quadripoli formatori d'onda.

#### 11.1. QUADRIPOLE ADATTATORI DI IMPEDENZA

Uno dei problemi fondamentali dell'elettronica è quello di trasferire, come s'è detto, la massima potenza di un segnale elettrico, sia di bassa che di alta frequenza, dal circuito che lo genera (generatore) ad un altro circuito che lo utilizza (utilizzatore).

In corrente continua (v. par. 4.10.), un generatore riesce ad erogare la potenza massima solo quando la sua resistenza interna è uguale alla resistenza

del circuito esterno che esso alimenta. La stessa condizione vale anche per un circuito generatore di segnali. Questo, infatti, può erogare la sua massima potenza solo se la sua impedenza di uscita è uguale, in modulo, all'impedenza di entrata del circuito utilizzatore.

Purtroppo nelle applicazioni pratiche, di sovente, i circuiti generatori di segnali elettrici hanno un'impedenza di uscita alquanto diversa dall'impedenza di entrata dei circuiti utilizzatori. In questi casi, per ottenere il massimo trasferimento di potenza, è necessario ricorrere ad artifici, occorre cioè interporre tra generatore e utilizzatore un *quadripolo di accoppiamento* che faccia da *adattatore di impedenza*.

L'accoppiamento può realizzarsi in forma *diretta* quando il trasferimento di potenza tra i due circuiti avviene con un elemento di impedenza comune ad entrambi; può realizzarsi in forma *indiretta* quando il trasferimento di potenza è stabilito da campi magnetici (o per via induttiva) oppure da campi elettrici (o per via capacitiva).

### 1) Accoppiamento diretto a quadripolo resistivo

Prima di considerare i casi di più largo impiego, analizziamo un semplicissimo quadripolo adattatore, lineare e passivo, costituito da due resistenze ohmiche  $R_1$  e  $R_2$  disposte ad *L*, come rappresentato in figura 11.1.

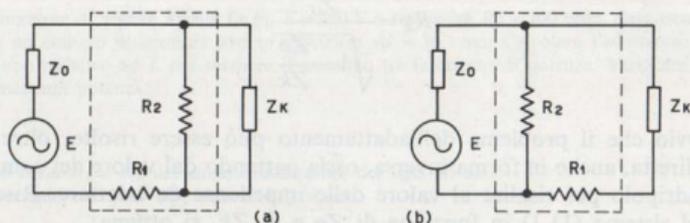


Fig. 11.1 - Quadripolo ad *L*, lineare e passivo, adattatore di impedenza per  $Z_0 > Z_k$  (a) e per  $Z_0 < Z_k$  (b).

Sia  $E$  la f.e.m. del generatore,  $Z_0$  la sua impedenza di uscita (o interna) e  $Z_k$  l'impedenza del carico, diversa da  $Z_0$ . L'adattamento delle due impedenze si ottiene quando l'impedenza di ingresso del quadripolo (vista cioè dal lato del generatore) è uguale al modulo di  $Z_0$ , e quando l'impedenza di uscita dal quadripolo (vista cioè dal lato del carico) è uguale al modulo di  $Z_k$ . Si può allora impostare il sistema:

$$\begin{cases} Z_0 = R_1 + \frac{R_2 \cdot Z_k}{R_2 + Z_k}, \\ Z_k = \frac{R_2(R_1 + Z_0)}{R_1 + R_2 + Z_0}, \end{cases} \quad (11.1)$$

risolvendo il quale, in funzione di  $R_1$  e  $R_2$ , si ottiene:

$$R_1 = \sqrt{Z_0(Z_0 - Z_k)} = Z_0 \sqrt{1 - \frac{Z_k}{Z_0}}, \quad (11.2)$$

$$R_2 = Z_k \sqrt{\frac{Z_0}{Z_0 - Z_k}} = \frac{Z_k}{\sqrt{1 - \frac{Z_k}{Z_0}}}. \quad (11.3)$$

Osserviamo che il termine sotto radice risulta positivo solo se  $Z_0 > Z_k$ ; qualora sia  $Z_0 < Z_k$ , occorre invertire il collegamento ad  $L$  del quadripolo, come rappresentato in figura 11.1-b. In tal caso, impostando di nuovo il sistema risolutivo, si ottiene:

$$R_1 = Z_k \sqrt{1 - \frac{Z_0}{Z_k}},$$

e

$$R_2 = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \frac{Z_0}{Z_k}}}. \quad (11.4)$$

È ovvio che il problema dell'adattamento può essere risolto, oltre che in forma diretta, anche in forma inversa, ossia partendo dal valore dei componenti del quadripolo per risalire al valore delle impedenze da adattare. Risolvendo infatti il sistema (11.1) in funzione di  $Z_0$  e di  $Z_k$ , si ottiene:

$$Z_0 = R_1 \sqrt{1 + \frac{R_2}{R_1}},$$

e

$$Z_k = \frac{R_2}{\sqrt{1 + \frac{R_2}{R_1}}}. \quad (11.5)$$

I quadripoli resistivi hanno però l'inconveniente di provocare sensibili perdite di potenza per effetto joule e quindi una attenuazione del segnale di uscita.

Per questo motivo vengono impiegati più come attenuatori di segnali, ove occorra, che come adattatori di impedenza, e ad ogni modo devono venir calcolati anche in funzione dell'attenuazione che si desidera provocare.

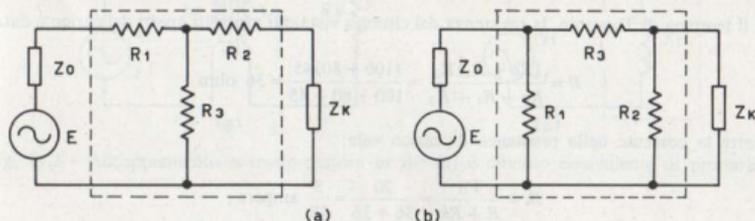


Fig. 11.2 - Quadripoli lineari e passivi a tre resistenze disposte a  $T$  (a) e a  $\pi$  (b).

Altri tipi di quadripoli resistivi, che è superfluo analizzare perché impiegati anch'essi prevalentemente come attenuatori di segnali con funzioni o meno di adattatori di impedenza, sono rappresentati in figura 11.2 e sono costituiti da tre resistenze opportunamente scelte disposte a  $T$  e a  $\pi$ .

Il problema dell'adattamento con attenuazione verrà ripreso nello studio delle antenne.

#### Esempio numerico

Un generatore di segnali avente f.e.m.  $E = 100$  V e resistenza  $R_o = 100$  ohm, deve essere accoppiato con un circuito utilizzatore avente resistenza  $R_k = 36$  ohm. Calcolare l'adattatore di impedenza di tipo resistivo ad  $L$  per ottenere il massimo trasferimento di potenza. Verificare le condizioni di massima potenza.

#### Soluzione

Calcolo della  $R_1$  e  $R_2$  del circuito adattatore del tipo ad  $L$ .

Considerando che  $R_o > R_k$ , dalle (11.2) si ha:

$$R_1 = R_o \sqrt{1 - \frac{R_k}{R_o}} = 100 \sqrt{1 - \frac{36}{100}} = 80 \text{ ohm},$$

$$R_2 = \frac{R_k}{\sqrt{1 - \frac{R_k}{R_o}}} = \frac{36}{\sqrt{1 - \frac{36}{100}}} = 45 \text{ ohm}.$$

Il generatore eroga la sua massima potenza quando la tensione  $V_m$  ai suoi morsetti risulta metà della sua f.e.m.  $E$ :

$$I_1 = \frac{E}{R_o + R_1 + \frac{R_2 \cdot R_k}{R_2 + R_k}} = \frac{100}{100 + 80 + \frac{45 \cdot 36}{45 + 36}} = 0,5 \text{ ampere},$$

$$V_m = E - R_o I_1 = 100 - 100 \cdot 0,5 = 50 \text{ volt}.$$

Il carico assorbe la sua massima potenza quando la sua tensione  $V_k$  è metà della tensione a vuoto  $V_o$  ai capi di  $R_2$ .

$$V_o = \frac{E \cdot R_2}{R_o + R_1 + R_2} = \frac{100 \cdot 45}{100 + 80 + 45} = 20 \text{ volt.}$$

Per il teorema di Thevenin, la resistenza del circuito vista dai morsetti aperti del carico è data da:

$$R = \frac{(R_o + R_1) R_2}{R_o + R_1 + R_2} = \frac{(100 + 80) 45}{100 + 80 + 45} = 36 \text{ ohm.}$$

Mentre la corrente nella resistenza di carico vale:

$$I_k = \frac{V_o}{R + R_k} = \frac{20}{36 + 36} = \frac{5}{18} \text{ ampere,}$$

e perciò:

$$V_k = I_k \cdot R_k = \frac{5}{18} \cdot 36 = 10 \text{ volt.}$$

## 2) Accoppiamento indiretto a trasformatore in BF

I sistemi di adattamento di impedenze che garantiscono la minor perdita di potenza per effetto Joule, sono indubbiamente quelli ad accoppiamento indiretto realizzati con campi magnetici, vale a dire con trasformatori, le cui resistenze ohmiche primarie e secondarie sono trascurabili in confronto alle rispettive reattanze.

La scelta del trasformatore dipende dalla frequenza del segnale da trasferire: per basse frequenze (fino a pochi KHz) l'accoppiamento più indicato è costituito da un normale trasformatore a nucleo ferromagnetico. In tal caso l'adattamento di impedenze si può ottenere calcolando un opportuno rapporto spire del trasformatore, purché si ritengano valide alcune condizioni ed alcune approssimazioni, comunque possibili ed accettabili nelle realizzazioni pratiche:

- la resistenza  $R_o$  del circuito generatore dei segnali di bassa frequenza e la resistenza  $R_k$  del circuito utilizzatore si ritengono puramente ohmiche;
- il quadrato della resistenza  $R_k$  del carico è trascurabile rispetto al quadrato della reattanza  $X_2$  dell'avvolgimento secondario del trasformatore;
- le resistenze ohmiche dell'avvolgimento primario e secondario del trasformatore sono trascurabili in confronto alle rispettive reattanze;
- il fattore di accoppiamento  $K$  del trasformatore si deve ritenere uguale all'unità.

Consideriamo il circuito di figura 11.3, dove  $R_o$  è la resistenza di uscita del generatore di segnali in BF a f.e.m.  $V_1$ ,  $R_k$  è la resistenza di ingresso dell'utilizzatore,  $L_1$  e  $L_2$  le induttanze del trasformatore di accoppiamento.

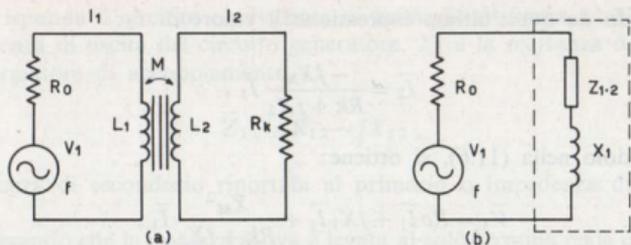


Fig. 11.3 - Accoppiamento a trasformatore in BF (a) e circuito equivalente di primario (b).

Per il fenomeno di mutua induzione, allorché il circuito primario è percorso dalla corrente variabile  $I_1$ , nel secondario nasce la f.e.m.:

$$E_2 = -M \frac{\Delta I_1}{\Delta t},$$

o, in forma simbolica,

$$\bar{E}_2 = -j2\pi f M \bar{I}_1 = -jX_M \bar{I}_1.$$

Se poi il secondario è chiuso sulla resistenza di carico  $R_k$ , la corrente  $I_2$  che vi si stabilisce, compirà nello stesso tempuscolo  $\Delta t$  una variazione  $\Delta I_2$  che indurrà nel primario la f.e.m.:

$$E_1 = -M \frac{\Delta I_2}{\Delta t},$$

o, in forma simbolica,

$$\bar{E}_1 = -j2\pi f M \bar{I}_2 = -jX_M \bar{I}_2.$$

Quest'ultima f.e.m. si oppone, per la legge di Lenz, alle variazioni della tensione  $V_1$  del generatore, e agisce, perciò, da f.c.e.m. La tensione primaria deve pertanto risultare:

$$\bar{V}_1 = R_0 \bar{I}_1 + jX_1 \bar{I}_1 + jX_M \bar{I}_2. \quad (11.6)$$

Nel secondario si ha invece:

$$-jX_M \bar{I}_1 = R_k \bar{I}_2 + jX_2 \bar{I}_2. \quad (11.7)$$

Ricavando da quest'ultima espressione il valore di  $I_2$ :

$$\bar{I}_2 = \frac{-jX_M}{Rk + jX_2} \bar{I}_1,$$

e sostituendolo nella (11.6), si ottiene:

$$\bar{V}_1 = R_0 \bar{I}_1 + jX_1 \bar{I}_1 + \frac{X_M^2}{Rk + jX_2} \bar{I}_1,$$

e razionalizzando si ha:

$$\bar{V}_1 = R_0 \bar{I}_1 + jX_1 \bar{I}_1 + \frac{X_M^2 (Rk - jX_2)}{Rk^2 + X_2^2} \bar{I}_1.$$

Separando i termini reali da quelli immaginari, si ottiene l'espressione:

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_1 \left[ \left( R_0 + \frac{X_M^2}{Rk^2 + X_2^2} Rk \right) + j \left( X_1 - \frac{X_M^2}{Rk^2 + X_2^2} X_2 \right) \right], \quad (11.8)$$

da cui si deduce che, a causa dell'azione del secondario sul primario, la resistenza  $R_0$  del circuito primario aumenta del termine:

$$\frac{X_M^2}{Rk^2 + X_2^2} \cdot Rk = R_{12},$$

detta resistenza  $R_{12}$  di secondario riportata al primario o resistenza di accoppiamento; mentre la reattanza  $X_1$  del circuito primario diminuisce del termine:

$$\frac{X_M^2}{Rk^2 + X_2^2} \cdot X_2 = X_{12},$$

detta reattanza  $X_{12}$  di secondario riportata al primario o reattanza di accoppiamento.

L'aumento della resistenza è giustificato dal fatto che il circuito primario deve assorbire anche la potenza utilizzata dal secondario. La diminuzione della reattanza è invece dovuta alla diminuzione del flusso magnetico provocata dalla corrente del secondario che, per la legge di Lenz, si oppone alla causa che l'ha prodotta.

Potendo trascurare, come detto, il termine  $Rk^2$  rispetto a  $X_2^2$ , la (11.8) risulta:

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_1 \left[ \left( R_0 + \frac{X_M^2}{X_2^2} Rk \right) + j \left( X_1 - \frac{X_M^2}{X_2} \right) \right], \quad (11.9)$$

a cui corrisponde il circuito equivalente di primario di figura 11.3-*b* dove  $R_o$  è la resistenza di uscita del circuito generatore,  $X_1$  è la reattanza del primario del trasformatore di accoppiamento e:

$$\bar{Z}_{12} = R_{12} - jX_{12},$$

è l'impedenza di secondario riportata al primario o impedenza di accoppiamento.

Considerando che la potenza attiva è legata al solo termine reale della (11.9), la condizione di massimo trasferimento di potenza si ha quando il termine immaginario si annulla, ossia quando:

$$X_1 = \frac{X_M^2}{X_2},$$

e quando la resistenza di uscita  $R_o$  del circuito generatore è uguale alla resistenza  $R_{12}$  di accoppiamento, ossia quando:

$$R_o = Rk \frac{X_M^2}{X_2^2}.$$

Per aver posto il fattore di accoppiamento  $K=1$  e quindi  $M = \sqrt{L_1 L_2}$  si ottiene:

$$R_o = Rk \frac{\omega^2 L_1 L_2}{\omega^2 L_2^2} = Rk \cdot \frac{L_1}{L_2} = Rk \cdot \frac{N_1^2}{N_2^2} \cdot \frac{\mathcal{R}}{N_2^2} = Rk \frac{N_1^2}{N_2^2}, \quad (11.10)$$

od anche:

$$Rk = R_o \frac{N_2^2}{N_1^2}, \quad (11.11)$$

dove:

$$Rk \frac{N_1^2}{N_2^2} \quad \text{e} \quad R_o \frac{N_2^2}{N_1^2},$$

sono le resistenze che si vedono ai morsetti rispettivamente di ingresso e di uscita del trasformatore. Pertanto, note le resistenze  $R_o$  e  $Rk$  da adattare, il rapporto spire del trasformatore adattatore si calcola con l'espressione:

$$\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{R_o}{Rk}}.$$

### 3) Accoppiamento indiretto a trasformatore in AF

Per accoppiare un circuito generatore di segnali ad alta frequenza avente un'impedenza di uscita  $\bar{Z}_0 = R_0 + jX_0$  con un circuito utilizzatore avente l'impedenza di ingresso  $\bar{Z}_k = R_k + jX_k$ , si può ricorrere ancora ad un trasformatore adatto però per le alte frequenze, e quindi costituito da due avvolgimenti mutuamente accoppiati in aria (fig. 11.4), di cui il primario ha l'impedenza  $\bar{Z}_1 = R_1 + jX_1$  e il secondario l'impedenza  $\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2$ .

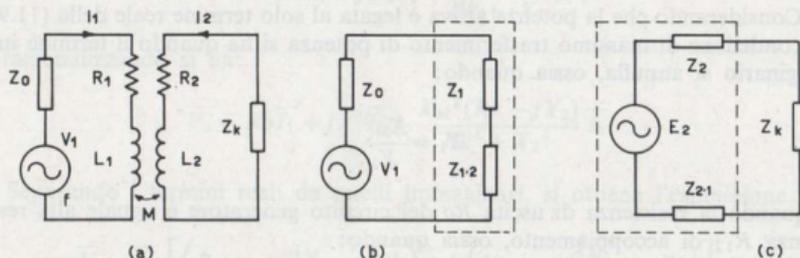


Fig. 11.4 - Accoppiamento indiretto in AF (a) circuito equivalente di primario (b) ed equivalente di secondario (c).

Allorché nel primario circola la corrente  $I_1$  e nel secondario la corrente  $I_2$ , la tensione  $V_1$  del generatore di segnali dovrà risultare, per quanto asserito precedentemente,

$$\bar{V}_1 = (R_0 + jX_0)\bar{I}_1 + (R_1 + jX_1)\bar{I}_1 + jX_M\bar{I}_2. \quad (11.12)$$

Nel secondario invece si avrà:

$$-jX_M\bar{I}_1 = (R_2 + jX_2)\bar{I}_2 + (R_k + jX_k)\bar{I}_2, \quad (11.13)$$

da cui:

$$\bar{I}_2 = \frac{-jX_M}{(R_2 + R_k) + j(X_2 + X_k)} \bar{I}_1,$$

dove il denominatore non è altro che l'impedenza totale  $\bar{Z}_s = R_s + jX_s$  del circuito secondario. Sostituendo  $I_2$  nella (11.12) e razionalizzando si ha:

$$\bar{V}_1 = (R_0 + jX_0)\bar{I}_1 + (R_1 + jX_1)\bar{I}_1 + \left( \frac{X_M^2 R_s}{Z_s^2} - j \frac{X_M^2 X_s}{Z_s^2} \right) \bar{I}_1,$$

oppure:

$$\bar{V}_1 = \left( R_0 + R_1 + \frac{X_M^2}{Z_s^2} R_s \right) \bar{I}_1 + j \left( X_0 + X_1 - \frac{X_M^2}{Z_s^2} X_s \right) \bar{I}_1, \quad (11.14)$$

da cui si deduce che il circuito di figura 11.4-*a* può venir rappresentato con il circuito equivalente di primario di figura 11.4-*b*, dove  $Z_0$  è l'impedenza di uscita del generatore di segnali,  $Z_1$  è l'impedenza della bobina primaria e:

$$\bar{Z}_{12} = \frac{X_M^2}{Z_S^2} (R_S - jX_S) \quad \text{oppure in modulo} \quad Z_{12} = \frac{X_M^2}{Z_S},$$

è l'impedenza di secondario trasferita al primario o impedenza di accoppiamento. Quindi:

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_1 (\bar{Z}_0 + \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{12}).$$

Per ottenere il massimo trasferimento di potenza, il modulo  $Z_0$  dell'impedenza di uscita del circuito generatore dovrà essere uguale alla somma dei moduli delle impedenze che si vedono ai morsetti di ingresso del trasformatore di accoppiamento:

$$\bar{Z}_0 = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_{12}.$$

Più propriamente, considerando che la potenza attiva è legata ai soli termini reali della (11.14), il massimo trasferimento di potenza si ha quando si annullano i termini immaginari, ossia quando:

$$X_0 + X_1 = \frac{X_M^2}{Z_S^2} X_S,$$

od anche:

$$X_p = \frac{X_M^2}{Z_S^2} X_S, \quad (11.15)$$

e quando il termine reale dell'impedenza di uscita del circuito generatore è uguale a:

$$R_0 = R_1 + \frac{X_M^2}{Z_S^2} R_S.$$

Se la resistenza  $R_1$  è piuttosto piccola in confronto alla  $R_0$ , si può anche scrivere:

$$R_0 + R_1 = \frac{X_M^2}{Z_S^2} R_S,$$

od anche:

$$R_p = \frac{X_M^2}{Z_S^2} R_S, \quad (11.16)$$

il che equivale a dire che i moduli delle tre impedenze rimangono invariati.

Analizziamo ora il circuito equivalente di secondario. Esso deve considerarsi costituito da un generatore avente la tensione:

$$\bar{E}_2 = -jX_M \bar{I}_1,$$

e l'impedenza di uscita uguale all'impedenza di primario trasferita al secondario:

$$\bar{Z}_{21} = \frac{X_M^2}{Z_p^2} (R_p - jX_p) \quad \text{oppure in modulo} \quad Z_{21} = \frac{X_M^2}{Z_p},$$

dove  $Z_p$  è l'impedenza del primario.

Pertanto deve essere:

$$\bar{E}_2 = \bar{I}_2 (\bar{Z}k + \bar{Z}_2 + \bar{Z}_{21}),$$

dove  $\bar{Z}k = Rk + jXk$  è l'impedenza di ingresso del circuito utilizzatore e  $\bar{Z}_2 = R_2 + jX_2$  è l'impedenza dell'avvolgimento secondario.

Per ottenere l'adattamento di impedenza, deve risultare:

$$\bar{Z}k = \bar{Z}_2 + \bar{Z}_{21},$$

ossia:

$$Rk + jXk = R_2 + jX_2 + \frac{X_M^2}{Z_p^2} R_p - j \frac{X_M^2}{Z_p^2} X_p,$$

e per ottenere il massimo trasferimento di potenza, deve essere:

$$Xk + X_2 = \frac{X_M^2}{Z_p^2} X_p,$$

od anche:

$$X_s = \frac{X_M^2}{Z_p^2} X_p, \quad (11.17)$$

e, se  $R_2$  è piuttosto piccola in confronto a  $Rk$ ,

$$Rk + R_2 = \frac{X_M^2}{Z_p^2} R_p,$$

od anche:

$$R_s = \frac{X_M^2}{Z_p^2} R_p. \quad (11.18)$$

Dalle considerazioni suesposte risulta evidente che l'adattamento di impedenza e il massimo trasferimento di potenza in AF dipendono in modo piuttosto complesso:

- dalla frequenza del segnale e dai valori delle induttanze  $L_1$  e  $L_2$  che condizionano i valori delle reattanze primarie e secondarie, nonché il coefficiente di mutua induzione;
- dal fattore di accoppiamento  $K$  del trasformatore che condiziona anch'esso il coefficiente di mutua induzione  $M = K\sqrt{L_1 L_2}$ .

Ne risulta che la messa a punto dell'accoppiamento mutuo induttivo in AF è piuttosto critica in quanto, stabilita la frequenza del segnale, si può agire sia sul valore delle induttanze che sul fattore di accoppiamento per ottenere le condizioni di adattamento di impedenza e di massimo trasferimento di potenza.

#### 4) Accoppiamento indiretto a circuiti risonanti accordati

Un altro sistema di largo impiego atto a trasferire la massima potenza di un segnale ad alta frequenza da un circuito generatore ad un circuito utilizzatore è quello di interporre ad essi due circuiti risonanti accordati entrambi sulla frequenza del segnale e tra loro accoppiati induttivamente.

Consideriamo dapprima i circuiti risonanti serie, come rappresentato in figura 11.5-a.

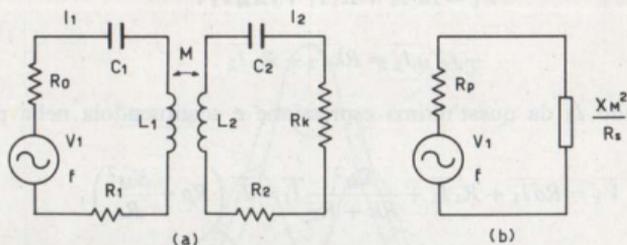


Fig. 11.5 - Accoppiamento con circuiti accordati serie (a) e circuito equivalente di primario (b).

Allorché il circuito primario, o induttore, viene accordato, regolando opportunamente la capacità  $C_1$  (o l'induttanza  $L_1$ ) sulla frequenza  $f$  del segnale, il circuito secondario, o indotto, viene trascinato in oscillazione forzata con la stessa frequenza  $f$ . È sempre possibile però regolare la capacità  $C_2$  (o l'induttanza  $L_2$ ) in modo da far coincidere la frequenza propria di risonanza del circuito secondario con la frequenza di risonanza del circuito primario e quindi con la frequenza  $f$  del segnale da trasferire.

In tal caso i due circuiti si dicono in *sintonia* fra loro, oppure *accordati* sulla stessa frequenza, e per essi vale l'uguaglianza:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C_1}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_2 C_2}},$$

da cui:

$$L_1 C_1 = L_2 C_2.$$

Per ottenere dunque la sintonia non è necessario che i due circuiti siano formati con condensatori e con bobine dello stesso valore: è sufficiente che il prodotto  $LC$  sia uguale per entrambi i circuiti.

Seguendo le stesse considerazioni analitiche esposte ai punti precedenti, per il primario vale l'equazione:

$$\bar{V}_1 = R_0 \bar{I}_1 + R_1 \bar{I}_1 + jX_{L1} \bar{I}_1 - jX_{C1} \bar{I}_1 + jX_M \bar{I}_2, \quad (11.19)$$

e per il secondario:

$$-jX_M \bar{I}_1 = Rk \bar{I}_2 + R_2 \bar{I}_2 + jX_{L2} \bar{I}_2 - jX_{C2} \bar{I}_2. \quad (11.20)$$

Poiché alla risonanza i termini immaginari si annullano, si ha:

$$\bar{V}_1 = R_0 \bar{I}_1 + R_1 \bar{I}_1 + jX_M \bar{I}_2, \quad (11.21)$$

e

$$-jX_M \bar{I}_1 = Rk \bar{I}_2 + R_2 \bar{I}_2. \quad (11.22)$$

Ricavando  $I_2$  da quest'ultima espressione e sostituendola nella precedente, si ottiene:

$$\bar{V}_1 = R_0 \bar{I}_1 + R_1 \bar{I}_1 + \frac{X_M^2}{Rk + R_2} \bar{I}_1 = \bar{I}_1 \left( R_p + \frac{X_M^2}{R_s} \right), \quad (11.23)$$

per la quale vale il circuito equivalente di primario di figura 11.5-b.

La condizione per il massimo trasferimento di potenza si ottiene quando:

$$R_p = \frac{X_M^2}{R_s}. \quad (10.24)$$

Tale condizione è legata però ad un ben preciso valore del fattore di accoppiamento, detto *fattore di accoppiamento critico*  $K_c$ . Infatti:

$$R_p = \frac{\omega^2 L_1 L_2 K_c^2}{R_s},$$

od anche:

$$1 = \frac{\omega L_1}{R_p} \cdot \frac{\omega L_2}{R_s} Kc^2,$$

dove i primi due fattori del secondo membro altro non sono che le cifre di merito  $Q_1$  e  $Q_2$  rispettivamente del circuito primario e del circuito secondario. Quindi:

$$Q_1 \cdot Q_2 \cdot Kc^2 = 1,$$

da cui:

$$Kc = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}}. \quad (11.25)$$

Dunque il massimo trasferimento di potenza si ha quando i due circuiti risonanti sono accordati sulla frequenza del segnale del circuito generatore e quando il loro accoppiamento coincide con l'accoppiamento critico  $Kc$ .

È interessante analizzare però anche il comportamento mutuo del circuito primario e del circuito secondario al variare della frequenza  $f$  del segnale e del fattore di accoppiamento  $K$ .

Fermo restando il valore delle costanti dei circuiti:

- a) per un fattore di accoppiamento nullo, la corrente nel secondario è nulla e la corrente primaria varia in funzione della frequenza del segnale secondo l'andamento della curva di risonanza propria del circuito primario isolato, ossia non influenzato dal secondario;

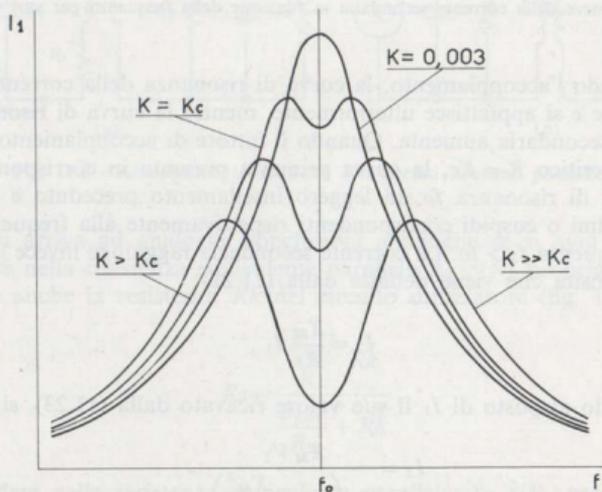


Fig. 11.6 - Curve della corrente primaria in funzione della frequenza per vari valori di  $K$ .

b) per un fattore di accoppiamento inferiore a quello critico (per esempio,  $K = 0,003$  in fig. 11.6 e 11.7), ossia per un accoppiamento molto *lasco*, la curva di risonanza della corrente primaria risulta leggermente più appiattita per effetto del carico riflesso dal secondario sul primario; contemporaneamente la corrente secondaria varia secondo una curva di risonanza, ma con un valore di cuspidi molto basso a causa della piccolissima f.e.m. indotta;

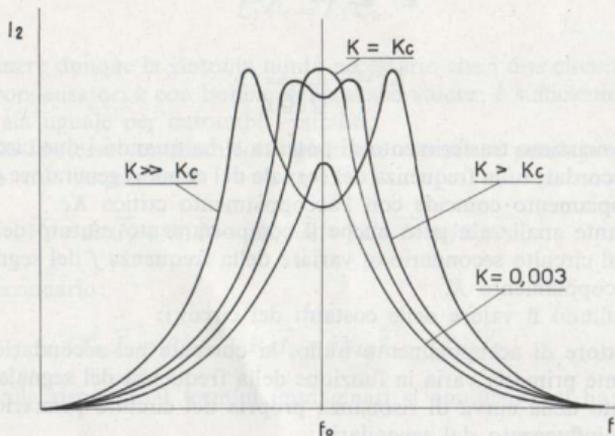


Fig. 11.7 - Curve della corrente secondaria in funzione della frequenza per vari valori di  $K$ .

c) aumentando l'accoppiamento, la curva di risonanza della corrente primaria diminuisce e si appiattisce ulteriormente, mentre la curva di risonanza della corrente secondaria aumenta. Quando il fattore di accoppiamento raggiunge il valore critico  $K = K_c$ , la curva primaria presenta in corrispondenza alla frequenza di risonanza  $f_0$  un leggero insellamento preceduto e seguito da due massimi o cuspidi corrispondenti rispettivamente alla frequenza  $f_1 < f_0$  e alla frequenza  $f_2 > f_0$ . La corrente secondaria raggiunge invece la sua massima intensità che viene definita dalla (11.22):

$$I_2 = \frac{X_M}{R_S} I_1 .$$

Sostituendo al posto di  $I_1$  il suo valore ricavato dalla (11.23), si ha:

$$I_2 = \frac{X_M V_1}{R_S \left( R_p + \frac{X_M^2}{R_S} \right)} .$$

Poiché la condizione per il massimo trasferimento di potenza è determinata dalla (11.24), da cui:

$$R_p + \frac{X_M^2}{R_s} = 2 R_p \quad \text{e} \quad X_M = \sqrt{R_p R_s},$$

si ottiene:

$$I_2 = \frac{V_1}{2\sqrt{R_p R_s}}, \quad (11.26)$$

che esprime appunto la massima intensità della corrente secondaria in corrispondenza alla frequenza di risonanza.

Osserviamo che in tali condizioni di massimo trasferimento di potenza, il circuito primario favorisce il passaggio non solo della frequenza di risonanza, ma anche della banda di frequenza delimitata dalle due cuspidi, ossia di una banda passante  $B = f_2 - f_1$ . Ne consegue che l'accoppiamento di due circuiti risonanti accordati è utilizzabile anche in qualità di filtro di banda (v. parag. 11.2.).

Le considerazioni sull'accoppiamento di circuiti risonanti serie suesposte valgono anche per l'accoppiamento di circuiti risonanti parallelo (fig. 11.8-a).

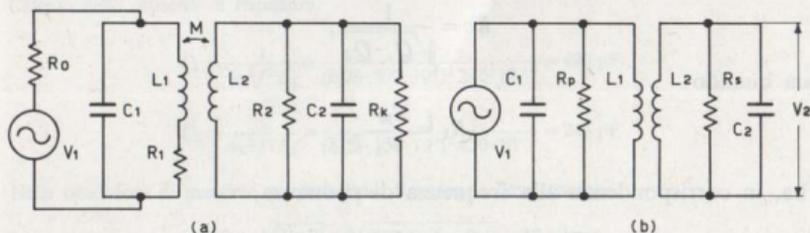


Fig. 11.8 - Accoppiamento indiretto con circuiti risonanti parallelo.

Infatti si arriva ad analoghe conclusioni analitiche se si avrà l'avvertenza di includere nella resistenza equivalente parallelo  $X_{L2}^2/R_2$  propria del circuito secondario anche la resistenza  $R_k$  del circuito utilizzatore (fig. 11.8-b):

$$R_s = \frac{\frac{X_{L2}^2}{R_2} \cdot R_k}{\frac{X_{L2}^2}{R_2} + R_k},$$

e di includere nella resistenza equivalente parallelo  $X_{L1}^2/R_1$  propria del circuito primario anche la resistenza  $R_o$  del generatore e la resistenza di secon-

dario riflessa nel primario  $X_M^2/R_2$ . Se si considera che quest'ultima va ad aumentare la resistenza  $R_1$  dell'avvolgimento primario, la resistenza complessiva  $R_p$  è data da:

$$R_p = R_0 + \frac{X_{L1}^2}{R_1 + \frac{X_M^2}{R_2}}$$

Pertanto la corrente  $I_1$  erogata dal generatore vale:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_p},$$

e la corrente di risonanza  $I_{O1}$  del circuito primario è data da:

$$I_{O1} = Q' I_1,$$

dove  $Q'$  è il coefficiente di risonanza a carico del circuito primario, diversa da  $Q_1$  a vuoto.

Considerando che la condizione di massimo trasferimento di potenza si ha ancora quando l'accoppiamento fra i due circuiti coincide con quello critico:

$$K_c = \frac{1}{\sqrt{Q_1 \cdot Q_2}},$$

ossia quando:

$$R_1 = \frac{X_M^2}{R_2},$$

si ha, in corrispondenza alla frequenza di risonanza,

$$Q_1 = \frac{X_{L1}}{R_1},$$

e

$$Q' = \frac{X_{L1}}{R_1 + \frac{X_M^2}{R_2}} = \frac{X_{L1}}{2R_1} = \frac{Q_1}{2}.$$

Di conseguenza, la massima tensione  $V_2$  disponibile ai capi del secondario vale:

$$\begin{aligned} V_2 &= X_M Q_2 I_{O1} = X_M Q_2 \frac{Q_1}{2} I_1 = \omega \sqrt{L_1 L_2} \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}} \frac{Q_1 Q_2}{2} I_1 = \\ &= \omega \sqrt{L_1 L_2} \frac{\sqrt{Q_1 Q_2}}{2} I_1 = \omega \sqrt{L_1 L_2} \frac{\sqrt{R_p R_s}}{2\omega \sqrt{L_1 L_2}} I_1, \end{aligned}$$

e quindi:

$$V_2 = \frac{I_1 \sqrt{R_p R_s}}{2}.$$

Osserviamo infine che le curve di figura 11.6 e 11.7 relative alle variazioni della corrente primaria e della corrente secondaria dei circuiti serie accoppiati, in funzione della frequenza e del fattore di accoppiamento, sono valide anche per i circuiti risonanti parallelo accoppiati induttivamente, purché vengano riferite alle variazioni della tensione primaria e della tensione secondaria.

#### Esempi numerici

1. Un generatore avente la f.e.m. di 1 volt alla frequenza di 500 KHz con resistenza interna  $R_0 = 2$  ohm, alimenta un carico avente la resistenza  $R_k = 9,4$  ohm, attraverso un accoppiamento adattatore a circuiti risonanti serie, il cui primario ha l'induttanza  $L_1 = 210 \mu\text{Hr}$  e la resistenza  $R_1 = 8$  ohm e il secondario ha l'induttanza  $L_2 = 420 \mu\text{Hr}$  e la resistenza  $R_2 = 5$  ohm. Determinare le capacità di risonanza  $C_1$  e  $C_2$ , la corrente nel circuito primario e secondario, la tensione secondaria disponibile al carico, la potenza erogata dal generatore e la potenza assorbita dal carico nelle condizioni di massimo trasferimento di potenza, nonché il fattore di accoppiamento critico.

#### Soluzione

Calcolo delle capacità di risonanza:

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L_1} = \frac{1}{(6,28 \cdot 500 \cdot 10^3)^2 210 \cdot 10^{-6}} = 490 \text{ pF},$$

$$C_2 = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L_2} = \frac{1}{(6,28 \cdot 500 \cdot 10^3)^2 420 \cdot 10^{-6}} = 245 \text{ pF}.$$

Nelle condizioni di massimo trasferimento di potenza, deve essere:

$$X_M = \sqrt{R_p R_s} = \sqrt{(2+8)(5+9,4)} = 12 \text{ ohm},$$

per cui la corrente nel circuito primario vale:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_p + \frac{X_M^2}{R_s}} = \frac{1}{10 + \frac{12^2}{14,4}} = 0,05 \text{ ampere},$$

e la corrente nel secondario è data da:

$$I_2 = \frac{V_1}{2\sqrt{R_p R_s}} = \frac{1}{2 \cdot 12} = 0,0416 \text{ ampere},$$

oppure:

$$I_2 = I_1 \frac{X_M}{R_s} = 0,05 \frac{12}{14,4} = 0,0416 \text{ ampere}.$$

La tensione ai morsetti del carico risulta perciò:

$$V_k = I_2 R_k = 0,0416 \cdot 9,4 = 0,39 \text{ volt},$$

mentre la tensione disponibile al secondario è data da:

$$V_2 = I_2 R_s = 0,0416 \cdot 14,4 = 0,6 \text{ volt}.$$

Calcolo delle potenze primaria e secondaria:

$$P_1 = V_1 \cdot I_1 = 1 \cdot 0,05 = 0,05 \text{ watt},$$

$$P_2 = V_2 \cdot I_2 = 0,6 \cdot 0,0416 = 0,025 \text{ watt}.$$

Il coefficiente di accoppiamento critico può ricavarsi dalla reattanza mutua  $X_M$ , oppure dalle cifre di merito  $Q_1$  e  $Q_2$ .

$$K_c = \frac{X_M}{\omega \sqrt{L_1 L_2}} = \frac{12}{6,28 \cdot 500 \cdot 10^6 \sqrt{210 \cdot 420 \cdot 10^{-6}}} = 0,0128,$$

oppure:

$$Q_1 = \frac{X_{L1}}{R_p} = \frac{6,28 \cdot 500 \cdot 10^6 \cdot 210 \cdot 10^{-6}}{10} = 66,$$

$$Q_2 = \frac{X_{L2}}{R_s} = \frac{6,28 \cdot 500 \cdot 10^6 \cdot 420 \cdot 10^{-6}}{14,4} = 94,2,$$

$$K_c = \frac{1}{\sqrt{Q_1 \cdot Q_2}} = \frac{1}{\sqrt{66 \cdot 94,2}} = 0,0128.$$

2. Due circuiti risonanti parallelo, accordati alla frequenza  $f = 10^6$  Hz, sono accoppiati induttivamente con fattore di accoppiamento critico. Il primario ha l'induttanza  $L_1 = 320 \cdot 10^{-6}$  Hr e la resistenza  $R_1 = 40$  ohm, il secondario ha l'induttanza  $L_2 = 160 \cdot 10^{-6}$  Hr e la resistenza  $R_2 = 20$  ohm. Sapendo che il primario è alimentato in parallelo da un generatore avente la f.e.m. di 1 volt e la resistenza interna  $R_0 = 5 \cdot 10^4$  ohm, determinare la massima tensione disponibile al secondario e il fattore di accoppiamento critico  $K_c$ .

*Soluzione*

Con fattore di accoppiamento critico, la resistenza di secondario riflessa nel primario risulta uguale alla resistenza del primario:

$$R_1 = \frac{X_M^2}{R_2},$$

da cui:

$$X_M = \sqrt{R_1 R_2} = \sqrt{40 \cdot 20} = 28,28 \text{ ohm}.$$

La resistenza equivalente parallelo  $R_{p'}$  del primario è data da:

$$R_{p'} = \frac{X_{L1}^2}{R_1 + \frac{X_M^2}{R_2}} = \frac{(6,28 \cdot 10^6 \cdot 320 \cdot 10^{-6})^2}{2 \cdot \frac{28,28^2}{20}} = 5 \cdot 10^4 \text{ ohm} .$$

La resistenza equivalente primaria  $R_p$  vista dal generatore risulta:

$$R_p = R_{p'} + R_o = 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^4 = 10^5 \text{ ohm} .$$

La corrente  $I_1$  erogata dal generatore vale perciò:

$$I_1 = \frac{V}{R_p} = \frac{1}{10^5} = 10^{-5} \text{ ampere} .$$

La massima tensione  $V_2$  disponibile al secondario è data da:

$$V_2 = \frac{I_1 \sqrt{R_p R_s}}{2} = \frac{10^{-5} \sqrt{10^5 \cdot 5 \cdot 10^4}}{2} = 0,3535 \text{ volt} .$$

Allo stesso risultato si perviene calcolando direttamente la massima tensione  $V_2$  con l'espressione:

$$V_2 = X_M \cdot Q_1' \cdot Q_2 \cdot I_1 = X_M \frac{X_{L1}}{2R_1} \frac{X_{L2}}{R_2} I_1 = 0,3535 \text{ volt} .$$

Il fattore di accoppiamento critico è dato da:

$$K_c = \frac{1}{\sqrt{Q_1 \cdot Q_2}} = \frac{1}{\sqrt{50 \cdot 50}} = 0,02 ,$$

oppure da:

$$K_c = \frac{X_M}{\omega M} = \frac{28,28}{6,28 \cdot 10^6 \cdot 10^{-6} \sqrt{320 \cdot 160}} = 0,02 .$$

## 5) Accoppiamenti diretti induttivi e capacitivi

Il trasferimento di potenza da un generatore ad un utilizzatore può ottenersi, oltre che con l'accoppiamento indiretto per mutua induzione, anche con l'accoppiamento diretto per autoinduzione e per capacità, ossia con un elemento di impedenza comune ai due circuiti.

In figura 11.9-a è rappresentato un quadripolo ad accoppiamento diretto per autoinduzione.

Il suo comportamento è simile a quello degli accoppiamenti indiretti per mutua induzione: infatti anche qui si può considerare che il circuito primario provochi nel secondario una f.e.m. indotta e che il secondario rifletta nel primario un'impedenza di accoppiamento.

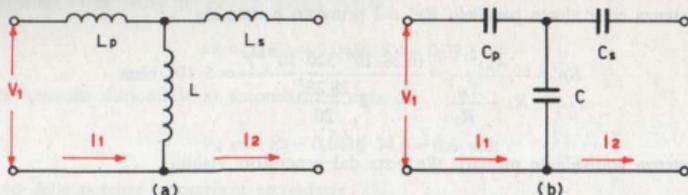


Fig. 11.9 - Accoppiamenti diretti per autoinduzione (a) e per capacità (b).

La trattazione analitica è perciò analoga a quella degli accoppiamenti indiretti: basta sostituire al coefficiente di mutua induzione  $M$  il coefficiente di autoinduzione  $L$ .

Allorché nel primario circola la corrente  $I_1$ , nel secondario si induce la f.e.m.:

$$E_2 = -L \frac{\Delta I_1}{\Delta t},$$

od anche:

$$\bar{E}_2 = -jX\bar{I}_1,$$

che produce nel secondario la corrente  $I_2$ .

Questa induce nel primario la f.e.m.:

$$E_1 = -L \frac{\Delta I_2}{\Delta t},$$

od anche:

$$\bar{E}_1 = -jX\bar{I}_2,$$

che agisce da f.c.e.m., per cui la tensione primaria  $V_1$  deve valere:

$$\bar{V}_1 = Xp\bar{I}_1 + X\bar{I}_1 + X\bar{I}_2,$$

mentre nel secondario si ha:

$$-X\bar{I}_1 = Xs\bar{I}_2 + X\bar{I}_2.$$

Ricavando da questa espressione la  $I_2$  per sostituirla nell'espressione precedente, si ha:

$$\bar{V}_1 = \bar{I}_1 \left( Xp + X + \frac{X^2}{Xs + X} \right).$$

L'adattamento di impedenza, e quindi il massimo trasferimento di potenza, si ha quando:

$$Xp + X = \frac{X^2}{Xs + X}. \quad (11.27)$$

Osserviamo subito che l'accoppiamento tra i due circuiti aumenta con l'aumentare della  $L$  comune. Perciò viene definito fattore di accoppiamento  $K$  il rapporto:

$$K = \frac{\omega L}{X}, \quad \text{da cui} \quad X = \frac{\omega L}{K}.$$

Trascrivendo la (11.27) nella forma:

$$\omega Lp + \omega L = \frac{\omega^2 L^2}{\omega Ls + \omega L},$$

si ottiene:

$$(Lp + L)(Ls + L) = \frac{L^2}{K^2},$$

da cui:

$$K = \frac{L}{\sqrt{(Lp + L)(Ls + L)}}, \quad (11.28)$$

che viene definito *fattore di accoppiamento critico del quadripolo autoinduttivo* considerato.

In figura 11.9-*b* è rappresentato invece un quadripolo ad accoppiamento diretto per capacità. Analogamente a quanto dedotto per l'accoppiamento per autoinduzione, le condizioni di adattamento di impedenza e di massimo trasferimento di potenza si hanno ancora quando:

$$Xp + X = \frac{X^2}{Xs + X}.$$

L'accoppiamento tra i due circuiti aumenta con il diminuire della  $C$  comune. Perciò viene definito fattore di accoppiamento  $K$  il rapporto:

$$K = \frac{1}{X\omega C}, \quad \text{da cui} \quad X = \frac{1}{\omega CK}.$$

Trascrivendo l'espressione precedente nella forma:

$$\frac{1}{\omega C_p} + \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{\omega C_s} + \frac{1}{\omega C}} = \frac{\omega^2 C^2 K^2}{1 + \frac{1}{\omega C}}$$

si ottiene:

$$K^2(C_p + C)(C_s + C) = C_s C_p,$$

da cui:

$$K = \frac{\sqrt{C_s C_p}}{\sqrt{(C_p + C)(C_s + C)}}, \quad (11.29)$$

che viene definito *fattore di accoppiamento critico del quadripolo capacitivo* considerato.

## 11.2. I FILTRI ELETTRICI

Negli apparati elettronici necessita, sovente, oltre che trasferire la massima potenza di un segnale elettrico da un circuito generatore ad un circuito utilizzatore, selezionare i segnali di frequenze diverse, ossia favorire il passaggio dei segnali compresi entro una determinata gamma di frequenze e attenuare fortemente tutti gli altri.

Allo scopo si pone tra generatore ed utilizzatore un quadripolo più o meno complesso, comunque sempre costituito da reti RC o RL o RCL, detto *filtro elettrico*, capace di stringere o di allargare la banda di frequenze del segnale passante o di spostarla verso le basse frequenze o verso le alte, anche se ciò comporta una certa *attenuazione* del segnale disponibile all'uscita.

Più precisamente è proprio il valore di tale attenuazione che delimita la banda passante, perché, come diremo appresso, esso varia in funzione della frequenza.

L'attenuazione  $A$  è definita dal rapporto fra la tensione  $V_2$  di uscita dal filtro e la tensione  $V_1$  applicata all'ingresso, detto *rapporto di trasferimento*, ed è quindi una grandezza adimensionale.

L'attenuazione ammessa nei filtri è stabilita convenzionalmente dalla relazione:

$$A = \frac{V_2}{V_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707, \quad (11.30)$$

già adottata per stabilire la larghezza della banda passate dei circuiti risonanti ed oscillanti. Essa risulta soddisfatta di volta in volta per un determinato valore

di frequenza, detto *frequenza di taglio*, che dipende dai componenti elettrici del quadripolo.

L'attenuazione, per motivi che verranno discussi nella trattazione delle tecniche elettroniche, viene espressa anche con il logaritmo decimale del rapporto  $V_2/V_1$ . Per comprenderne il significato e soprattutto la relativa espressione analitica, supponiamo che un circuito, per ora indefinito, abbia una componente resistiva  $R$  dell'impedenza di ingresso uguale alla componente resistiva dell'impedenza di uscita e che, alimentato con una tensione  $V_1$  dia in uscita una tensione  $V_2$  attenuata.

Si può allora scrivere:

$$P_1 = \frac{V_1^2}{R}, \quad \text{e} \quad P_2 = \frac{V_2^2}{R}.$$

L'attenuazione logaritmica è definita da:

$$G = \log \frac{P_2}{P_1},$$

e viene chiamata *guadagno*  $G$  (che può essere positivo o negativo) del circuito, e si misura in *bel* (B).

Tale unità di misura è però piuttosto grande, per cui in pratica si usa il *decibel* (dB) che è la decima parte del *bel*. Perciò:

$$G = 10 \log \frac{P_2}{P_1} \text{ decibel.} \quad (11.31)$$

Sostituendo al posto di  $P_1$  e  $P_2$  le corrispondenti espressioni contenenti le tensioni, si ha:

$$G = 10 \log \frac{V_2^2}{R} \frac{R}{V_1^2} = 10 \log \frac{V_2^2}{V_1^2} = 20 \log \frac{V_2}{V_1}. \quad (11.32)$$

Poiché l'attenuazione convenzionale stabilita per i filtri elettrici è di 0,707, si ottiene:

$$G = 20 \log \frac{V_2}{V_1} = 20 \log 0,707 = -3 \text{ dB,} \quad (11.33)$$

che esprime il *guadagno negativo* (attenuazione) convenzionale dei filtri.

I filtri elettrici, a seconda del loro comportamento, si distinguono in:

- a) *filtri passa-basso*, quando forniscono una tensione di uscita attenuata entro i limiti convenzionali per frequenze inferiori a quella di taglio;
- b) *filtri passa-alto*, quando forniscono in uscita una tensione attenuata entro i limiti convenzionali per frequenze superiori a quella di taglio;

- c) *filtri passa-banda*, quando forniscono una tensione di uscita attenuata entro i limiti convenzionali per frequenze comprese tra due frequenze di taglio, una inferiore e l'altra superiore;
- d) *filtri eliminatori di banda*, quando forniscono una tensione di uscita attenuata al di sotto dei limiti convenzionali per frequenze comprese entro la banda da eliminare.

Analizziamo i filtri di più semplice costituzione elettrica.

### 1) Filtri passa-basso

Consideriamo una semplice rete RC come quella di figura 11.10-a. Essa provoca una diminuzione e uno sfasamento in ritardo del segnale passante con l'aumentare della frequenza. Fornisce quindi una tensione  $V_2$  di uscita inferiore alla tensione  $V_1$  di ingresso entro i limiti dell'attenuazione convenzionale  $A$  solo se le frequenze del segnale applicato sono inferiori ad una determinata frequenza, detta di *taglio superiore*.

Applicando la tensione  $V_1$ , nel filtro fluisce la corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_1}{R - jX_C},$$

e la tensione  $V_2$  disponibile all'uscita coincide con la caduta di tensione capacitiva:

$$\bar{V}_2 = -jX_C \bar{I}.$$

Sostituendo in  $I$  la precedente espressione, si ottiene:

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_1 \frac{-jX_C}{R - jX_C} = \bar{V}_1 \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_1 \frac{1}{1 + j\omega CR}.$$

L'attenuazione adimensionale  $A$  risulta perciò definita da:

$$\bar{A} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{1}{1 + j\omega CR}. \quad (11.34)$$

da cui si deduce che  $A = 1$  per  $\omega = 0$ , diminuisce con l'aumentare della frequenza e tende a zero per  $\omega$  tendente all'infinito.

Dal suo modulo convenzionale:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

si ricava la frequenza di taglio  $f_t$ . Essendo infatti:

$$2 = 1 + \omega^2 R^2 C^2, \text{ od anche } 1 = \omega^2 R^2 C^2,$$

si ha:

$$f_t = \frac{1}{2\pi RC}, \quad (11.35)$$

a cui corrisponde la banda passante  $B = f_t$ , e da cui:

$$\omega c = \frac{1}{RC},$$

dove  $\omega c$  è la *pulsazione caratteristica del filtro*, in rad/sec, corrispondente alla frequenza di taglio, e che sostituita nella (11.34) determina le seguenti equazioni adimensionali dell'attenuazione:

$$A = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega c}},$$

oppure:

$$A = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_t}}, \quad (11.36)$$

oppure l'equazione in *dB*:

$$G = 20 \log \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_t}}. \quad (11.37)$$

Queste equazioni rendono più agevole il calcolo, in quanto, determinata la frequenza di taglio in base alle costanti del circuito, l'attenuazione dipende esclusivamente dal rapporto  $f/f_t$  e quindi dalla sola frequenza  $f$  del segnale di ingresso.

Per rilevare allora il diagramma della banda passante e quindi per esprimere la funzione  $A = f(f)$ , si ricorre ai moduli della (11.36) o della (11.37).

Nel primo caso, portando sulle ordinate di un sistema di assi cartesiani i valori del modulo della attenuazione adimensionale  $A$ :

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{f^2}{f_t^2}}},$$

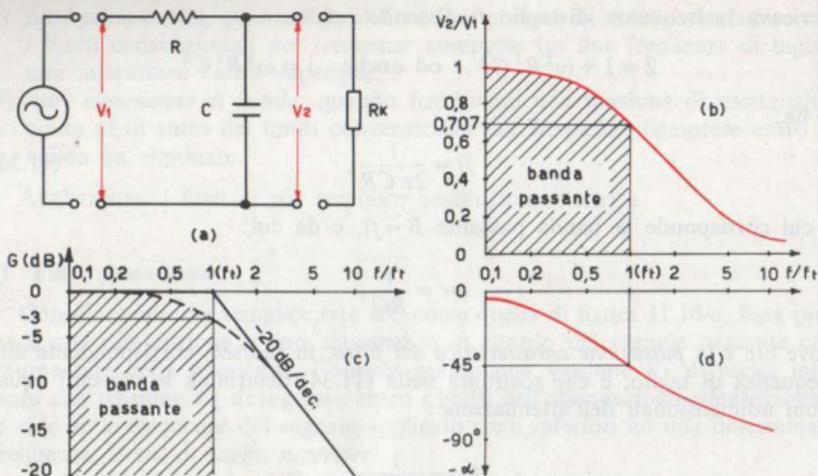


Fig. 11.10 - Filtro passa-basso a rete  $RC$  (a) e diagrammi della banda passante (b) e (c) e dell'angolo di sfasamento (d).

e sulle ascisse il rapporto  $f/f_t$  in scala logaritmica, si ottiene il diagramma di figura 11.10-b, il cui andamento corrisponde all'esempio numerico delle colonne 1 e 2 della seguente tabella:

$f/f_t$	$A$	$20 \log A$	$\alpha^\circ$
0,1	1	0	$-6^\circ$
0,2	0,99	0	$-12^\circ$
0,5	0,90	-0,9	$-27^\circ$
1	0,707	-3	$-45^\circ$
2	0,45	-6,9	$-63^\circ$
5	0,196	-14	$-79^\circ$
10	0,1	-20	$-84^\circ$

Nel secondo caso, portando sulle ordinate l'attenuazione in  $dB$  ricavata dal modulo della (11.37) e sulle ascisse il rapporto  $f/f_t$  in scala logaritmica, si ottiene il grafico di figura 11.10-c, il cui andamento corrisponde all'esempio numerico delle colonne 1 e 3 della medesima tabella.

Osserviamo che quest'ultimo diagramma mette in maggiore evidenza la selettività del circuito, ossia l'attitudine del circuito a mantenere sufficientemente costante l'ampiezza del segnale di uscita in corrispondenza alla banda passante

e ad attenuarla grandemente in corrispondenza delle frequenze superiori a quella di taglio.

Nel caso in esame la pendenza dell'attenuazione per frequenze superiori a quella di taglio è di  $-20 \text{ dB/decade}$ , intendendo per decade un salto di frequenza  $f/ft = 10$ .

Dall'argomento dell'attenuazione si deduce che la tensione  $V_2$  disponibile all'uscita del filtro subisce uno sfasamento in ritardo sulla tensione  $V_1$  di ingresso, in funzione della frequenza. Infatti l'argomento della attenuazione è definito da:

$$\operatorname{tg} \alpha = -\omega CR = -\frac{\omega}{\omega c} = -\frac{f}{ft}, \quad (11.38)$$

da cui per  $f = 0$  si ha  $\operatorname{tg} \alpha = 0$  e  $\alpha = 0$  e per  $f = \infty$  si ha  $\operatorname{tg} \alpha = -\infty$  e  $\alpha = -90^\circ$ , mentre per alcuni valori di  $f$  compresi tra zero e infinito valgono gli angoli riportati nella quarta colonna della tabella.

Dunque, in corrispondenza alla frequenza di taglio, la tensione  $V_2$  di uscita del filtro è sfasata in ritardo di  $45^\circ$  sulla tensione  $V_1$  di ingresso, come risulta dal grafico di figura 11.10-d, che rappresenta appunto l'argomento  $\alpha$  dell'attenuazione in funzione della frequenza.

Operando allo stesso modo si può verificare che anche il quadripolo costituito dalla rete  $LR$  di figura 11.11-a si comporta da filtro passa-basso. Infatti l'attenuazione è definita da:

$$\bar{A} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega L}{R}}, \quad (11.39)$$

da cui si deduce che  $A = 1$  per  $\omega = 0$ , diminuisce con l'aumentare della frequenza e tende a zero per  $\omega$  tendente all'infinito.

Dal modulo dell'attenuazione convenzionale:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2 L^2}{R^2}}},$$

si ricava la frequenza di taglio  $ft$ . Infatti, essendo:

$$2R^2 = R^2 + \omega^2 L^2, \quad \text{od anche} \quad R^2 = 4\pi^2 ft^2 L^2,$$

si ha:

$$ft = \frac{R}{2\pi L}, \quad (11.40)$$

al di sotto della quale il segnale di uscita dal filtro ha valore apprezzabile perché  $A > 1/\sqrt{2}$  e al di sopra della quale il segnale di uscita non è più accettabile perché  $A < 1/\sqrt{2}$ .

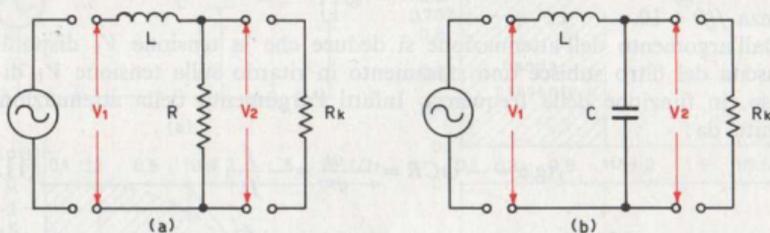


Fig. 11.11 - Filtri passa-basso a rete LR (a) e a rete LC (b).

Dalla (11.40) si ha:

$$\omega c = \frac{R}{L},$$

dove  $\omega c$  è la *pulsazione caratteristica del filtro* e che sostituita nella (11.39) determina le seguenti equazioni adimensionali dell'attenuazione:

$$A = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega c}}, \quad \text{e} \quad A = \frac{1}{1 + j \frac{f}{ft}}$$

oppure l'equazione in *dB*:

$$G = 20 \log \frac{1}{1 + j \frac{f}{ft}},$$

che sono identiche a quelle relative al filtro *RC*. Dunque il filtro *LR* ha lo stesso comportamento del filtro passa-basso *RC* e per esso valgono le stesse considerazioni funzionali e gli stessi diagrammi di figura 11.10.

In figura 11.11-*b* è rappresentato un altro filtro passa-basso costituito da una rete *LC*. Osserviamo subito che, variando la frequenza della tensione  $V_1$  di ingresso da zero all'infinito, la corrente che fluisce nel circuito varia secondo l'andamento della curva di risonanza dei circuiti *LC* serie, e perciò il suo comportamento si discosta da quello dei filtri precedenti.

Infatti, la rete *LC* fornisce in uscita una tensione  $V_2$  maggiore della tensione  $V_1$  di ingresso per frequenze inferiori a quella di risonanza, e minore per fre-

quenze superiori a  $f_0$ . Per questo motivo la frequenza di risonanza si fa coincidere con la frequenza di taglio.

Considerando che l'induttanza  $L$  contiene anche una resistenza  $R$ , sia pur piccola, l'attenuazione risulta definita da:

$$\bar{A} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C} + j\omega L} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}. \quad (11.41)$$

Alla frequenza di risonanza  $f_0$  si ha:

$$\omega_0^2 LC = 1, \quad \text{da cui} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC},$$

e l'attenuazione assume il valore:

$$\bar{A} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{1}{j\omega RC} = -jQ,$$

ossia il valore del coefficiente di risonanza o cifra di merito  $Q$  del circuito: infatti alla risonanza  $V_2 = QV_1$  (v. parag. 10.1).

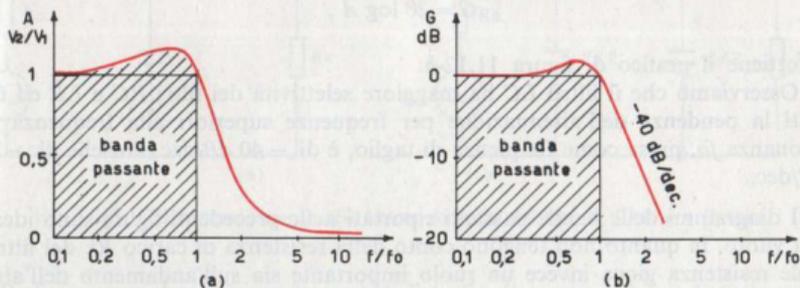


Fig. 11.12 - Diagrammi della banda passante di un filtro passa-basso  $LC$ .

Ponendo convenzionalmente, in corrispondenza a  $f_0$ :

$$A = Q = 1,$$

si ha anche:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC},$$

per cui l'attenuazione può essere espressa con l'equazione:

$$\bar{A} = \frac{1}{j \frac{\omega}{\omega_0} + 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = \frac{1}{j \frac{f}{f_0} + 1 - \frac{f^2}{f_0^2}}, \quad (11.42)$$

che ha per modulo:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{f^2}{f_0^2}\right)^2}}, \quad (11.43)$$

e per argomento:

$$\text{tg } \alpha = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}. \quad (11.44)$$

Ponendo allora sulla ascisse di un sistema di assi cartesiani i rapporti  $f/f_0$  in scala logaritmica, e sulle ordinate i corrispondenti valori del modulo dell'attenuazione adimensionale  $A$ , si ottiene il grafico di figura 11.12-a. Ponendo invece sulle ordinate l'attenuazione in decibel:

$$G = 20 \log A,$$

si ottiene il grafico di figura 11.12-b.

Osserviamo che il filtro  $LC$  ha maggiore selettività dei filtri  $RC$  e  $LR$  ed infatti la pendenza dell'attenuazione per frequenze superiori alla frequenza di risonanza  $f_0$ , presa come frequenza di taglio, è di  $-40 \text{ dB/dec.}$  anziché di  $-20 \text{ dB/dec.}$

I diagrammi delle bande passanti riportati nelle precedenti figure sono ideali o a vuoto, in quanto non tengono conto della resistenza di carico  $R_k$  del filtro. Tale resistenza gioca invece un ruolo importante sia sull'andamento dell'attenuazione che sul valore della frequenza di taglio.

Per ottenere allora i diagrammi reali delle bande passanti e il valore della frequenza di taglio a carico, occorre sostituire nelle espressioni dell'attenuazione  $A$  e della frequenza di taglio  $f_t$ , al posto della  $R$  propria del filtro, la resistenza equivalente  $R_e$  vista dal carico, calcolabile con il teorema di Thevenin.

Ad esempio, la resistenza equivalente  $R_e$  dei filtri passa-basso a rete  $RC$  di figura 11.10, vista dal carico è data da:

$$R_e = \frac{R \cdot R_k}{R + R_k},$$

per cui l'attenuazione  $A$  e la frequenza di taglio  $f_t$  debbono calcolarsi con le espressioni:

$$\bar{A} = \frac{1}{1 + j\omega C R e}, \quad \text{e} \quad f_t = \frac{1}{2\pi C R e}.$$

Oltre ai filtri ora analizzati, nella pratica, vengono usati filtri di costituzione piú complessa per due motivi principali.

Il primo è quello di rendere il filtro piú selettivo, onde ottenere una curva di risposta a livello piú costante in corrispondenza della banda passante e a pendenza il piú ripida possibile in corrispondenza della frequenza di taglio ed ottenere perciò una piú netta differenziazione tra le frequenze immediatamente inferiori e superiori a quella di taglio.

Il secondo motivo è quello di mantenere o di attuare per mezzo del filtro, l'adattamento tra l'impedenza di uscita del generatore e l'impedenza di ingresso dell'utilizzatore, cosí da ottenere il massimo trasferimento di potenza.

Due filtri passa-basso piú complessi dei precedenti, aventi anche il ruolo di mantenere l'adattamento di impedenza, sono rappresentati in figura 11.13 e vengono detti, per la loro costituzione circuitale, filtri simmetrici a T e a  $\pi$ , nei quali  $R_o = R_k$ .

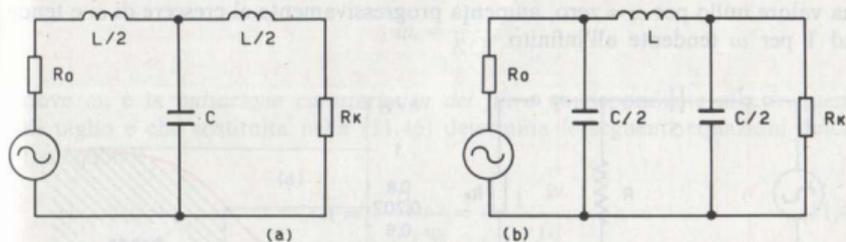


Fig. 11.13 - Filtri passa-basso a reti simmetriche LC del tipo a T (a) e a  $\pi$  (b).

Prefissata una determinata frequenza di taglio  $f_t$ , i valori di  $L$  e di  $C$  devono soddisfare alle seguenti equazioni:

$$L = \frac{R}{\pi f_t},$$

e

$$C = \frac{1}{\pi f_t R}, \quad (11.45)$$

dove  $R = R_o = R_k$ .

## 2) Filtri passa-alto

Consideriamo una semplice rete CR come quella di figura 11.14-a. Essa provoca un aumento ed uno sfasamento in anticipo del segnale passante con l'aumentare della frequenza. Fornisce quindi una tensione  $V_2$  di uscita inferiore alla tensione  $V_1$  di ingresso entro i limiti dell'attenuazione convenzionale solo se le frequenze del segnale applicato sono superiori ad una determinata frequenza, detta di *taglio inferiore*.

Allorché viene applicata la tensione  $V_1$ , nel filtro fluisce una corrente:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_1}{R - jX_C}, \text{ da cui } \bar{V}_1 = \bar{I}(R - jX_C),$$

e ai capi della resistenza  $R$  è disponibile la tensione  $V_2$  di uscita, data da:

$$V_2 = IR.$$

L'attenuazione:

$$\bar{A} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{j\omega CR}}, \quad (11.46)$$

ha valore nullo per  $\omega = \text{zero}$ , aumenta progressivamente al crescere di  $\omega$  e tende ad 1 per  $\omega$  tendente all'infinito.

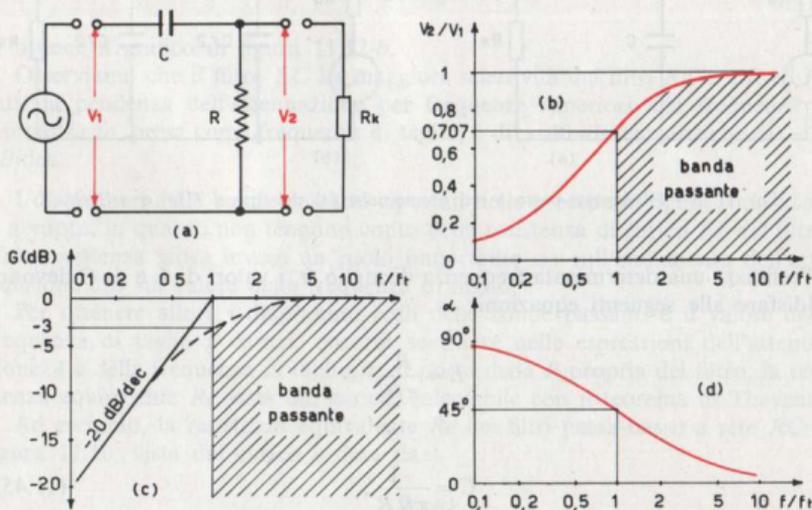


Fig. 11.14 - Filtro passa-alto a' rete RC (a) e diagramma della banda passante (b).

Viene considerata passante quella banda di frequenze superiore alla frequenza di taglio  $ft$ , definita dal modulo dell'attenuazione convenzionale:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}}},$$

ovvero:

$$2R^2 = R^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2}, \quad \text{od anche} \quad 1 = 4\pi^2 ft^2 R^2 C^2,$$

da cui:

$$ft = \frac{1}{2\pi RC}, \quad (11.47)$$

che coincide con la stessa frequenza di taglio dei corrispondenti filtri  $RC$  passabasso.

Dalla (11.47) si ha:

$$\omega_c = \frac{1}{RC},$$

dove  $\omega_c$  è la *pulsazione caratteristica del filtro* corrispondente alla frequenza di taglio e che sostituita nella (11.46) determina le seguenti equazioni dell'attenuazione:

$$\bar{A} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega_c}{\omega}} = \frac{1}{1 + j \frac{ft}{f}}, \quad (11.48)$$

e

$$G = 20 \log \frac{1}{1 + j \frac{\omega_c}{\omega}} = 20 \log \frac{1}{1 + j \frac{ft}{f}}. \quad (11.49)$$

Per rilevare il diagramma della banda passante o curva di risposta del filtro, e quindi per esprimere la funzione  $A = f(f)$ , si pone sulle ascisse di un sistema di assi cartesiani il rapporto  $f/ft$  in scala logaritmica e sulle ordinate i moduli dell'attenuazione adimensionale  $A$  o del guadagno  $G$  in decibel. Si ottengono così i grafici di figura 11.14-*bc* corrispondenti all'esempio numerico della seguente tabella:

$f/ft$	$A$	$20 \log A$	$\alpha$
0,1	0,1	-20	+84°
0,2	0,196	-14	+79°
0,5	0,45	-6,9	+63°
1	0,707	-3	+45°
2	0,90	-0,9	+27°
5	0,99	0	+12°
10	1	0	+6°

Osserviamo che, come nei corrispondenti filtri  $RC$  passa-basso, la pendenza dell'attenuazione, che determina la selettività del filtro  $CR$ , è di  $-20 \text{ dB/dec}$ .

Dall'argomento dell'attenuazione si deduce che la tensione  $V_2$  disponibile all'uscita del filtro risulta sfasata in anticipo sulla tensione  $V_1$  di ingresso. Infatti l'argomento è determinato da:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\omega CR} = \frac{\omega_c}{\omega} = \frac{ft}{f}, \quad (11.50)$$

dove, per  $f=0$  si ha  $\operatorname{tg} \alpha = \infty$  e  $\alpha = +90^\circ$ , per  $f=ft$  si ha  $\operatorname{tg} \alpha = 1$  e  $\alpha = 45^\circ$ , per  $f=\infty$  si ha  $\operatorname{tg} \alpha = 0$  e  $\alpha = 0^\circ$ , mentre per alcuni valori di  $f$  compresi tra zero e infinito valgono gli argomenti riportati nella tabella.

Dunque, in corrispondenza alla frequenza di taglio la tensione  $V_2$  di uscita dal filtro è in anticipo di  $45^\circ$  sulla tensione  $V_1$  di ingresso, come risulta anche dal grafico di figura 11.14-*d*, che rappresenta appunto l'andamento dell'argomento  $\alpha$  in funzione della frequenza.

Operando allo stesso modo si può verificare che anche il quadripolo costituito dalla rete  $RL$  di figura 11.15-*a* si comporta da filtro passa-alto.

Infatti l'attenuazione è definita da:

$$\bar{A} = \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{1}{j \frac{R}{\omega L} + 1}, \quad (11.51)$$

da cui si deduce che tale attenuazione è nulla per  $\omega=0$ , aumenta con l'aumentare della frequenza e tende a 1 per  $\omega$  tendente all'infinito.

Dal modulo dell'attenuazione convenzionale:

$$A = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

si ricava la frequenza di taglio  $f_t$ . Essendo infatti:

$$2 = \frac{R^2}{\omega^2 L^2} + 1, \quad \text{od anche} \quad R^2 = \omega^2 L^2,$$

si ha:

$$f = \frac{R}{2\pi L}, \quad (11.52)$$

che coincide con la frequenza di taglio dei corrispondenti filtri  $RL$  passa-basso.

Dalla (11.52) si ha:

$$\omega_c = \frac{R}{L},$$

dove  $\omega_c$  è la *pulsazione caratteristica del filtro* e che sostituita nella (11.51) determina le seguenti equazioni adimensionali dell'attenuazione:

$$\bar{A} = \frac{1}{j \frac{\omega_c}{\omega} + 1} = \frac{1}{j \frac{f_t}{f} + 1}, \quad (11.53)$$

che sono identiche a quella relative al filtro passa-alto  $CR$ . Dunque anche per i filtri  $RL$  valgono le stesse considerazioni funzionali e gli stessi diagrammi di figura 11.14 relativi al filtro  $CR$ .

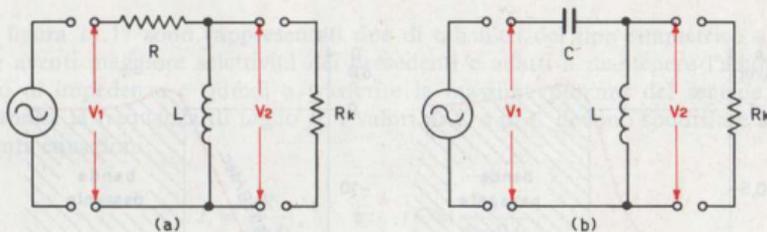


Fig. 11.15 - Filtri passa-alto a rete  $RL$  (a) e a rete  $CL$  (b).

Un altro semplice filtro passa-alto è costituito dalla rete  $CL$  di figura 11.15-*b*. Analogamente a quanto osservato per il corrispondente filtro  $LC$  passa-basso, variando la frequenza del segnale da zero all'infinito, la corrente che fluisce nel circuito assume l'andamento della curva di risonanza dei circuiti  $LC$  serie. Esso però fornisce una tensione  $V_2$  minore della tensione  $V_1$  di ingresso per

frequenze inferiori alla frequenza di risonanza  $f_0$ , considerata come frequenza di taglio, e maggiore per frequenze superiori a  $f_0$ .

Supponendo in questo caso di poter trascurare la resistenza ohmica  $R$  della bobina, il circuito risulta puramente reattivo, per cui l'attenuazione viene espressa direttamente con il suo modulo:

$$A = \frac{V_2}{V_1} = \frac{j\omega L}{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\omega^2 LC}} \quad (11.54)$$

Alla frequenza di risonanza  $f_0$  si ha:

$$\omega_0 LC = 1, \text{ od anche } \omega_0 = \frac{1}{LC},$$

per cui l'attenuazione può essere espressa con l'equazione:

$$A = \frac{1}{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{f_0^2}{f^2}}, \quad (11.55)$$

dove per  $f = 0$  si ha  $A = 0$ , per  $f$  in aumento anche  $A$  aumenta e per  $f$  tendente all'infinito,  $A$  tende a 1.

L'argomento dell'attenuazione è definito da:

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\omega^2 LC} = \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{f_0}{f}. \quad (11.56)$$

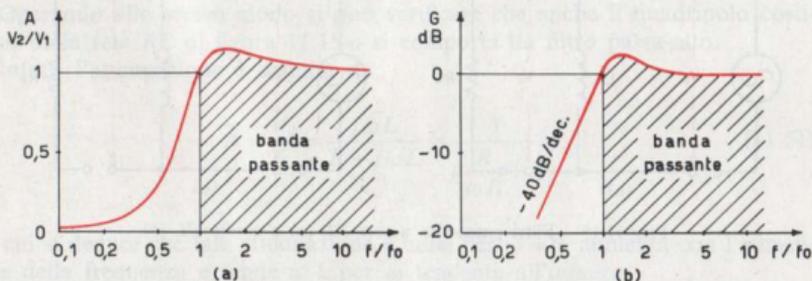


Fig. 11.16 - Diagramma della banda passante di un filtro passa-alto  $CL$ .

Ponendo allora sulle ascisse di un sistema di assi cartesiani il rapporto  $f/f_0$  e sulle ordinate i moduli o dell'attenuazione adimensionale  $A$  o del guadagno

$G$  in  $dB$  si ottengono rispettivamente i diagrammi (a) e (b) delle bande passanti di figura 11.16.

Osserviamo che il filtro passa-alto a rete  $CL$ , è più selettivo dei filtri  $CR$  e  $RL$ , ed infatti la pendenza dell'attenuazione per frequenze inferiori a quella di risonanza  $f_0$ , presa come frequenza di taglio, è di  $-40\text{ dB/dec}$ , anziché di  $-20\text{ dB/dec}$ .

Anche per i filtri passa-alto come per i passa-basso, volendo passare dal funzionamento a vuoto al funzionamento a carico, occorre sostituire nelle espressioni dell'attenuazione e della frequenza di taglio, al posto della resistenza propria del filtro, la resistenza equivalente vista dal carico, secondo il teorema di Thevenin.

Nella pratica, i filtri passa-alto possono essere costituiti da reti più complesse di quelle sopra descritte, per gli stessi motivi esposti al punto precedente.

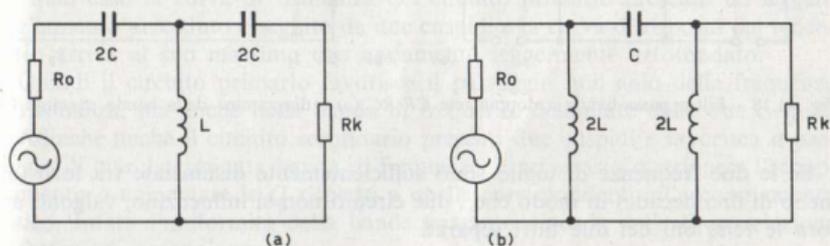


Fig. 11.17 - Filtri passa-alto a reti simmetriche  $LC$  del tipo a  $T$  (a) e del tipo a  $\Pi$  (b).

In figura 11.17 sono rappresentati due di tali filtri del tipo simmetrico a  $T$  e a  $\pi$  aventi maggiore selettività dei precedenti e adatti a mantenere l'adattamento di impedenza e quindi a trasferire la massima potenza del segnale.

Stabilita la frequenza di taglio  $f_t$ , i valori di  $L$  e di  $C$  devono soddisfare alle seguenti equazioni:

$$L = \frac{R}{4\pi f_t}, \quad \text{e} \quad C = \frac{1}{4\pi R f_t},$$

dove  $R = R_o = R_k$ .

### 3) Filtri passa-banda

Sono quadripoli quasi sempre costituiti da circuiti risonanti serie e parallelo, accoppiati oppure no. Forniscono comunque una tensione  $V_2$  di uscita attenuata entro i limiti convenzionali solo se le frequenze del segnale appli-

cato sono comprese fra una *frequenza di taglio inferiore* e una *frequenza di taglio superiore*.

In figura 11.18-*a* si è voluto tuttavia rappresentare un semplice filtro passa-banda, poco usato come filtro ma presente in molti circuiti elettronici nei quali provoca una reale riduzione della banda passante, costituito da una doppia rete *CR* e *RC*: la prima agisce da filtro passa-alto, la seconda da filtro passa-basso.

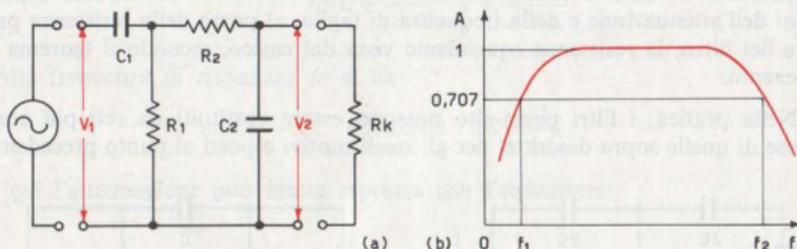


Fig. 11.18 - Filtro passa-banda a doppia rete *CR-RC* (a) e diagramma della banda passante (b).

Se le due frequenze di taglio sono sufficientemente distanziate tra loro (almeno di una decade) in modo che i due circuiti non si influenzino, valgono ancora le relazioni dei due filtri separati:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}, \quad \text{e} \quad f_2 = \frac{1}{2\pi R_2 C_2},$$

e la banda passante  $B = f_2 - f_1$  è la risultante delle bande passanti dei due filtri separati, come rappresentato in figura 11.18-*b*.

Altri semplici filtri passa-banda sono costituiti da circuiti risonanti *RLC* serie e parallelo, le cui risposte di tensione e di corrente, avendo l'andamento delle curve di risonanza, hanno valore massimo alla frequenza di risonanza *f<sub>o</sub>*. Se a tale valore si fa corrispondere l'attenuazione  $A = 1$ , sono accettabili anche tutti i valori compresi fra le due frequenze di taglio  $f_1 < f_o$  e  $f_2 > f_o$  a cui corrisponde l'attenuazione convenzionale  $A = 1/\sqrt{2}$ .

Le bande passanti dei circuiti serie e parallelo (v. par. 10.1 e 10.2) sono date rispettivamente da:

$$B = \frac{R}{2\pi L}, \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{2\pi CR},$$

per cui è possibile modificarle variando i parametri del circuito risonante ed ottenere un filtro avente la larghezza di banda desiderata.

In figura 11.19 vengono rappresentati altri semplici filtri passa-banda costituiti da circuiti risonanti serie e parallelo accoppiati induttivamente.

Essi non differiscono dai circuiti accoppiati adattatori di impedenza di figura 11.5 e 11.8 e perciò le considerazioni fatte a proposito delle curve di risposta di corrente (fig. 11.6 e fig. 11.7) e di tensione del circuito primario e del circuito secondario, sono ancora valide.

S'è detto che quando i due circuiti (primario e secondario) sono accordati sulla medesima frequenza di risonanza  $f_0$ , il massimo trasferimento di potenza si ha in corrispondenza dell'accoppiamento critico:

$$K_c = \frac{1}{\sqrt{Q_1 Q_2}},$$

nel qual caso la curva di risonanza del circuito primario presenta un leggero insellamento preceduto e seguito da due cuspidi e la curva di risposta del secondario arriva al suo massimo con andamento leggermente arrotondato.

Quindi il circuito primario favorisce il passaggio non solo della frequenza di risonanza, ma anche della banda di frequenze delimitate dalle due cuspidi.

Affinché anche il circuito secondario presenti due cuspidi e favorisca il passaggio di una determinata banda di frequenze, è necessario o stringere l'accoppiamento o aumentare le  $Q$  rispetto a quelle corrispondenti all'accoppiamento critico. Infatti l'uniformità della banda passante dipende dalle  $Q$  in relazione al fattore di accoppiamento.

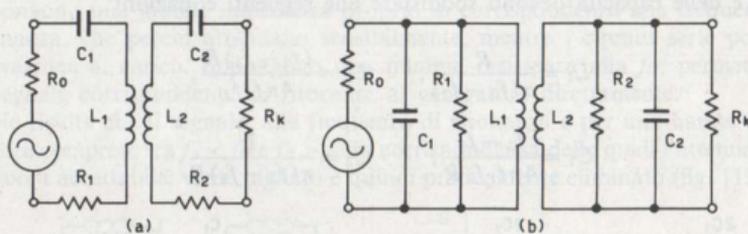


Fig. 11.19 - Filtri passa-banda a circuiti risonanti accoppiati serie (a) e parallelo (b).

Si è trovato sperimentalmente che il valore del fattore di accoppiamento che garantisce una trasmissione uniforme del segnale entro i limiti dell'attenuazione convenzionale, è dato da:

$$K = \frac{1,5}{\sqrt{Q_1 Q_2}}.$$

La larghezza di banda è invece definita da:

$$B = K f_0,$$

la quale dipende ovviamente dai parametri dei circuiti accoppiati che determinano sia la  $f_0$  che il fattore  $K$ .

Se i due circuiti, primario e secondario, fossero uguali fra loro, si avrebbe:

$$K = \frac{1,5}{Q} = \frac{1,5 R}{\omega L},$$

dove  $R$  è la resistenza equivalente serie dei due circuiti.

La banda passante verrebbe perciò definita da:

$$B = \frac{1,5 R}{2\pi f_0 L} f_0 = 1,5 \frac{R}{2\pi L},$$

e avrebbe una larghezza di 1,5 volte maggiore di quella dei semplici circuiti risonanti.

I filtri passa-banda realizzati con circuiti più complessi, come quelli di figura 11.20, assicurano una risposta più selettiva e mantengono l'adattamento di impedenza.

Ponendo  $R = R_0 = R_k$  e stabilita la banda passante delimitata dalle frequenze  $f_1$  e  $f_2$  corrispondenti all'attenuazione convenzionale, i valori delle induttanze e delle capacità devono soddisfare alle seguenti equazioni:

$$L_1 = \frac{R}{\pi(f_2 - f_1)}, \quad L_2 = \frac{(f_2 - f_1)R}{4\pi f_1 f_2},$$

$$C_1 = \frac{f_2 - f_1}{4\pi f_1 f_2 R}, \quad C_2 = \frac{1}{\pi(f_2 - f_1)R}.$$

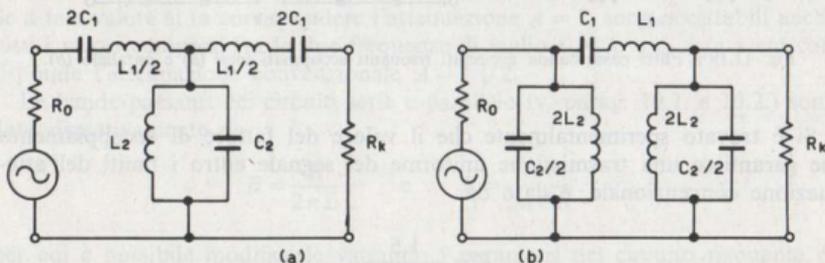


Fig. 11.20 - Filtri passa-banda a circuiti risonanti del tipo a  $T$  (a) e del tipo a  $\Pi$  (b).

Il funzionamento di questi filtri può essere spiegato, in forma elementare, considerando anzitutto che, se accordati sulla medesima frequenza, i circuiti risonanti serie presentano la minima impedenza alla banda di frequenze attorno a quella di risonanza, mentre i circuiti parallelo presentano la massima impedenza.

Pertanto i circuiti risonanti serie, posti in serie al segnale, favoriscono il passaggio della banda desiderata ed ostacolano le frequenze ad essa inferiori e superiori, mentre i circuiti risonanti parallelo, posti in derivazione al carico, favoriscono il ritorno al generatore delle frequenze inferiori e superiori ed ostacolano la banda tra esse compresa. In tal modo, la curva di risposta del filtro risulta a fianchi molto ripidi e quindi molto selettiva.

#### 4) Filtri eliminatori di banda

È noto che un circuito risonante parallelo oppone una grande impedenza ai segnali corrispondenti alla frequenza di risonanza.

Pertanto ponendo in serie al segnale un circuito antirisonante si ottiene l'eliminazione della banda di frequenze compresa tra  $f_1 < f_0$  e  $f_2 > f_0$  in corrispondenza delle quali  $I_1 = I_2 = \sqrt{2} I_0$ .

Anche con un circuito risonante serie posto in parallelo al segnale si ottiene l'eliminazione di una certa banda di frequenza, in quanto esso facilita il ritorno al generatore (sottraendolo al carico) del segnale avente frequenze comprese tra  $f_1 < f_0$  e  $f_2 > f_0$  in corrispondenza delle quali  $I_1 = I_2 = I_0/\sqrt{2}$ .

Consideriamo allora il filtro di figura 11.21-a. Se i circuiti risonanti sono accordati sulla medesima frequenza  $f_0$ , i circuiti parallelo posti in serie al segnale, oppongono una grande impedenza proprio in corrispondenza alla frequenza di risonanza, che perciò attenuano sensibilmente, mentre i circuiti serie posti in derivazione al carico, oppongono una minima resistenza alla  $f_0$ , permettendo al segnale corrispondente di ritornare al generatore direttamente.

Ne risulta che il segnale, alla frequenza di risonanza e per una banda di frequenze comprese tra  $f_1 < f_0$  e  $f_2 > f_0$  in corrispondenza delle quali l'attenuazione è ancora accettabile, viene tagliato e quindi praticamente eliminato (fig. 11.21-b).

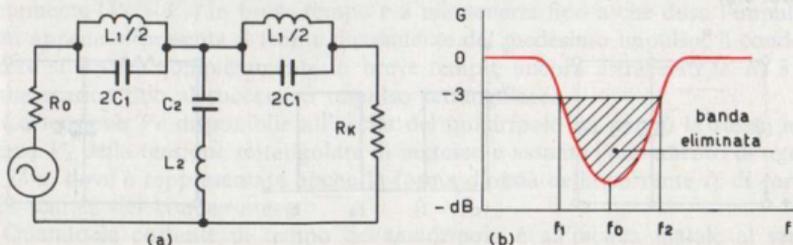


Fig. 11.21 - Filtro eliminatore di banda a circuiti risonanti (a) e diagramma della banda eliminata (b).

Stabilita la banda  $B = f_2 - f_1$  da eliminare, i valori da assegnare alle capacità  $C$  e alle induttanze  $L$  devono soddisfare alle seguenti equazioni:

$$L_1 = \frac{(f_2 - f_1)R}{\pi f_1 f_2}, \quad L_2 = \frac{R}{4\pi(f_2 - f_1)},$$

$$C_1 = \frac{1}{4\pi(f_2 - f_1)R}, \quad C_2 = \frac{f_2 - f_1}{\pi f_1 f_2 R},$$

dove  $R = R_0 = Rk$ , per cui il filtro ha anche la funzione di mantenere l'adattamento di impedenza tra il circuito generatore e il circuito utilizzatore.

### 11.3. QUADRIPOLI SOTTOPOSTI AD ONDA RETTANGOLARE

È utile conoscere, ai fini delle applicazioni elettroniche, la risposta dei quadripoli passivi sottoposti ad una tensione a forma d'onda rettangolare, ed analizzare la forma d'onda cui essi danno luogo.

Una tensione a forma d'onda rettangolare può considerarsi formata da una successione di tensioni a gradino alternativamente in salita e in discesa, a frequenza  $f$ . Pertanto la risposta di un quadripolo ad un'onda rettangolare è un caso particolare delle risposte alle tensioni a gradino connesse con i fenomeni transitori.

#### 1) Quadripoli a rete RC e CR

Consideriamo il circuito RC di figura 11.22-a, sottoposto ad un circuito generatore di onda rettangolare, ossia ad un generatore capace di fornire al quadripolo la tensione  $V_1$  per l'intervallo di tempo  $t_0 - t_1$  e di cortocircuitarne l'entrata (fig. 11.22-c) per il successivo intervallo di tempo  $t_1 - t_2$ , per poi ridare tensione e così di seguito.

Per conoscere il comportamento del quadripolo RC è necessario richiamare i concetti sulla risposta dei circuiti RC alle tensioni a gradino, esposti al paragrafo 6.6.

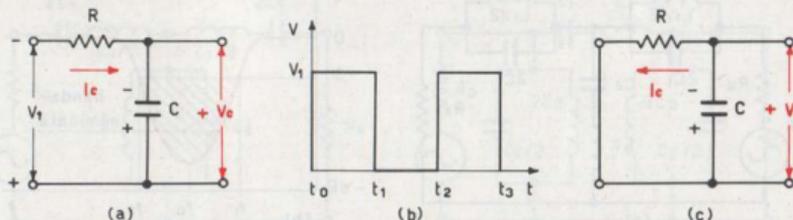


Fig. 11.22 - Quadripolo sottoposto al gradino in salita (a), onda rettangolare (b), quadripolo sottoposto al gradino in discesa (c).

Ricordiamo che applicando ad una rete  $RC$  una tensione a gradino  $V_1$ , il condensatore si carica attraverso la resistenza  $R$  e la tensione  $V_c$  che si manifesta alle sue armature cresce con andamento esponenziale definito dall'equazione:

$$V_c(t) = V_1 \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right),$$

e raggiunge il valore della tensione  $V_1$  dopo un periodo di tempo  $T$  di circa 5 volte la costante di tempo  $RC$  ( $T \cong 5RC$ ), detto periodo transitorio di carica del condensatore.

La corrente di carica  $I_c$  contemporaneamente diminuisce con andamento pure esponenziale definito dall'equazione:

$$I_c(t) = \frac{V_1}{R} e^{-\frac{t}{RC}},$$

e si annulla nello stesso tempo di circa  $5RC$  (v. fig. 6.19).

Togliendo tensione (gradino in discesa) e cortocircuitando il quadripolo, il condensatore si scarica attraverso la resistenza  $R$  con andamento ancora esponenziale definito dalle equazioni:

$$V_c(t) = V_1 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad \text{e} \quad I_c(t) = \frac{V_1}{R} e^{-\frac{t}{RC}},$$

come risulta dal grafico di figura 6.20.

È evidente allora che la risposta del quadripolo  $RC$  dipende dalla frequenza della tensione ad onda rettangolare e dalla costante di tempo del circuito.

Supponiamo di mantenere costante la frequenza della tensione rettangolare e di variare la costante di tempo del quadripolo.

Se quest'ultima è inferiore al semiperiodo della tensione rettangolare il condensatore, in corrispondenza al fronte ascendente del primo impulso rettangolare, inizia la carica attraverso la resistenza  $R$  e riesce a raggiungerla completamente ( $V_c = V_1$ ) in breve tempo e a mantenerla fino a che dura l'impulso. Non appena si presenta il fronte discendente del medesimo impulso, il condensatore si scarica completamente in breve tempo, ancora attraverso la  $R$ , e rimane scarico fino al successivo impulso rettangolare.

La tensione  $V_c$  disponibile all'uscita del quadripolo ha perciò la stessa ampiezza  $V_1$  della tensione rettangolare di ingresso e assume l'andamento di figura 11.23-*a*, dove è rappresentata anche la forma d'onda della corrente  $I_c$  di carica e di scarica del condensatore.

Quando la costante di tempo del quadripolo è all'incirca uguale al semiperiodo dell'onda rettangolare, la tensione  $V_c$  di uscita assume l'andamento di figura 11.23-*b* ed ha ancora la stessa ampiezza della tensione rettangolare.

Se invece la costante di tempo è maggiore del semiperiodo della tensione rettangolare, il condensatore inizia a scaricarsi prima di aver raggiunto la piena carica e viceversa, così che la tensione di uscita  $V_c$  non solo è inferiore alla tensione  $V_1$  di ingresso, ma assume un andamento quasi triangolare avente un valore medio  $V_m$  uguale al valore medio dell'onda rettangolare (fig. 11.23-c).

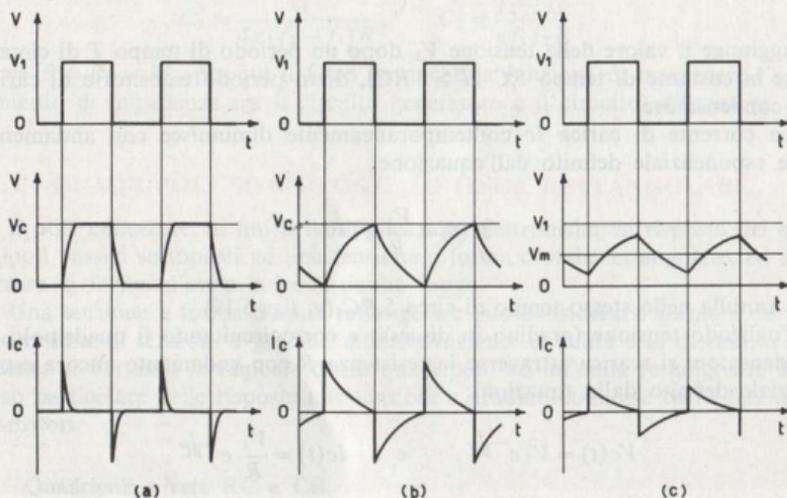


Fig. 11.23 - Risposte di tensione e di corrente di un quadripolo  $RC$  ad una tensione rettangolare.

Poiché questa forma d'onda triangolare rappresenta l'integrale della tensione ad onda rettangolare di ingresso rispetto al suo valore medio, il quadripolo  $RC$  prende il nome di *circuito integratore*.

Gli stessi risultati si otterrebbero se la costante di tempo rimanesse costante e variasse la frequenza degli impulsi rettangolari.

Consideriamo ora il quadripolo  $CR$  di figura 11.24-a. Poiché durante il periodo transitorio di carica e di scarica di un condensatore, la tensione ai capi della resistenza assume lo stesso andamento della corrente di carica e di scarica, come rappresentato nei grafici di figura 6.19 e 6.20, la tensione  $V_r$  di uscita del quadripolo non può che assumere le forme d'onda rappresentate in figura 11.24, relative a costanti di tempo inferiori, circa uguali e maggiori del semiperiodo della tensione rettangolare applicata all'ingresso.

In corrispondenza al fronte ascendente dell'impulso rettangolare, il condensatore scarico si comporta come un cortocircuito in quanto ad una variazione di tensione in un tempo nullo corrisponde una frequenza infinita. Perciò la tensione  $V_r$  di uscita è uguale alla tensione  $V_1$  di ingresso.

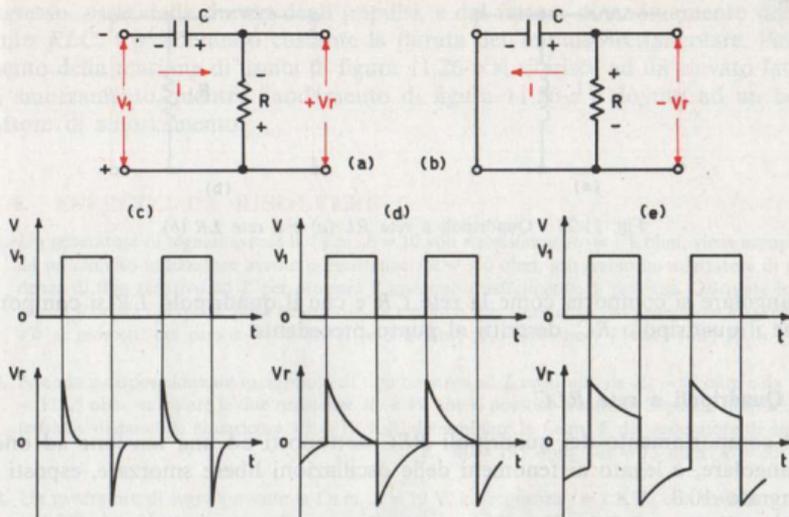


Fig. 11.24 - Quadripolo CR (a-b) e risposte di tensione in funzione della costante di tempo (c-d-e).

Successivamente il condensatore si carica e la corrente di carica diminuisce con andamento esponenziale e così pure la tensione ai capi della resistenza, ossia la tensione  $V_r$  di uscita.

In corrispondenza del fronte discendente dell'impulso rettangolare (cortocircuito sull'entrata del quadripolo), la corrente si inverte e assume il valore massimo che aveva all'inizio della carica, per cui anche la  $V_r$  si inverte per poi tendere a zero con andamento esponenziale durante la scarica del condensatore.

Il quadripolo CR prende il nome di *circuito derivatore* in quanto la forma d'onda della sua tensione di uscita rappresenta la derivata dell'onda rettangolare di ingresso.

## 2) Quadripoli a reti RL e LR

Per conoscere il comportamento dei quadripoli RL e LR (fig. 11.25) sottoposti ad una tensione ad onda rettangolare, basta rivedere i fenomeni transitori, ossia le risposte dei circuiti ohmici-induttivi alle tensioni a gradino, analizzati al paragrafo 7.12.

Se poi si osservano i grafici di figura 7.42 relativi all'andamento delle tensioni che si manifestano ai capi della R e della L durante i periodi transitori, si deduce immediatamente che il quadripolo RL sottoposto ad una tensione

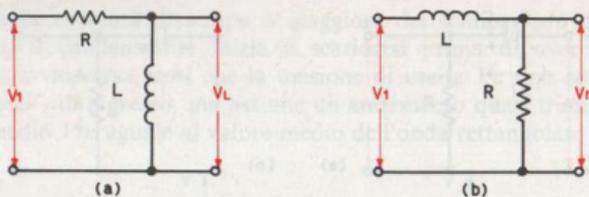


Fig. 11.25 - Quadripoli a rete  $RL$  (a) e a rete  $LR$  (b).

rettangolare si comporta come la rete  $CR$  e che il quadripolo  $LR$  si comporta come il quadripolo  $RC$ , descritti al punto precedente.

### 3) Quadripoli a rete $RLC$

Il comportamento dei quadripoli  $RLC$  sottoposti ad una tensione ad onda rettangolare, è legato ai fenomeni delle oscillazioni libere smorzate, esposti al paragrafo 10.3.

Ricordiamo solo che l'ampiezza e la durata di tali oscillazioni dipendono dall'ampiezza della tensione di innesco e dal fattore di smorzamento ossia dalle costanti  $RLC$  del circuito.

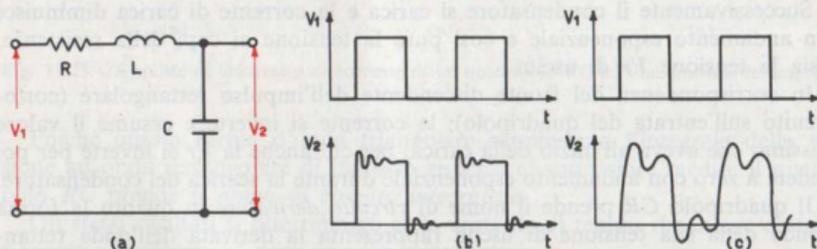


Fig. 11.26 - Quadripolo a rete  $RLC$  (a) e forme d'onda delle tensioni di entrata e di uscita in funzione del fattore di smorzamento (b-c).

Abbiamo affermato or ora che in corrispondenza ai fronti ascendenti e discendenti dell'impulso rettangolare, la variazione di tensione è così rapida da passare da una frequenza nulla ad una frequenza elevatissima e perciò da passare indubbiamente dalla frequenza di risonanza del quadripolo  $RCL$  che, di conseguenza, si pone in oscillazione libera smorzata.

La forma d'onda della tensione  $V_2$  di uscita assume allora l'andamento di figura 11.26-bc, e dipende dalla frequenza della tensione rettangolare  $V_1$  di

ingresso, ossia dalla durata degli impulsi, e dal fattore di smorzamento del circuito  $RLC$ . Considerando costante la durata dell'impulso rettangolare, l'andamento della tensione di uscita di figura 11.26-*b* si riferisce ad un elevato fattore di smorzamento, mentre l'andamento di figura 11.26-*c* è dovuto ad un basso fattore di smorzamento.

#### 11.4. ESERCIZI DA RISOLVERE

- Un generatore di segnali avente la f.e.m.  $E = 10$  volt e resistenza  $R_o = 1$  Kohm, viene accoppiato ad un circuito utilizzatore avente la resistenza  $R_k = 360$  ohm, attraverso un adattatore di impedenza di tipo resistivo ad  $L$  per ottenere il massimo trasferimento di potenza. Calcolare le resistenze  $R_1$  e  $R_2$  del quadripolo adattatore, la tensione  $V_m$  ai morsetti del generatore e la tensione  $V_k$  ai morsetti del carico. (R.  $R_1 = 800$  ohm;  $R_2 = 450$  ohm;  $V_m = 5$  volt;  $V_k = 1$  volt).
- Avendo a disposizione un quadripolo di tipo resistivo ad  $L$  costituito da  $R_1 = 90$  ohm e da  $R_2 = 112,5$  ohm, calcolare le due resistenze  $R_o$  e  $R_k$  che si possono adattare. Sapendo inoltre che la tensione disponibile al carico è  $V_k = 10$  volt, determinare la f.e.m.  $E$  del generatore di segnali. (R.  $R_o = 135$  ohm;  $R_k = 75$  ohm;  $E = 60$  volt).
- Un generatore di segnali avente la f.e.m.  $E = 10$  V, la frequenza  $f = 1$  KHz e la resistenza  $R_o = 4.000$  ohm, deve alimentare un carico avente la resistenza  $R_k = 40$  ohm, attraverso un trasformatore adattatore di impedenza. Supponendo trascurabili le resistenze ohmiche degli avvolgimenti e perfetto l'accoppiamento, determinare il rapporto spire del trasformatore e l'induttanza  $L_1$  dell'avvolgimento primario, sapendo che l'induttanza dell'avvolgimento secondario è  $L_2 = 1$  mHr. Calcolare inoltre la tensione  $V_k$  al carico, la potenza erogata  $P_m$  e la potenza utilizzata  $P_k$ . (R.  $N_1/N_2 = 10$ ;  $L_1 = 0,1$  Hr;  $V_k = 0,5$  V;  $P_m = 12,5 \cdot 10^{-3}$  w;  $P_k = 6,25 \cdot 10^{-3}$  w).
- Un quadripolo adattatore di impedenza è costituito da due circuiti risonanti serie accoppiati induttivamente. Il primario ha la resistenza equivalente serie  $R_p = 3$  ohm, l'induttanza  $L_p = 0,01$  Hr e la capacità  $C_p = 1$   $\mu$ F. Il secondario ha la resistenza equivalente serie  $R_s = 5$  ohm e l'induttanza  $L_s = 0,05$  Hr. Determinare la frequenza di risonanza  $f_o$ , la capacità  $C_s$  del circuito secondario, l'accoppiamento critico  $K_c$  e il coefficiente di mutua induzione  $M$ . (R.  $f_o = 1.590$  Hz;  $C_s = 0,2$   $\mu$ F;  $K_c = 0,0173$ ;  $M = 386$   $\mu$ Hr).
- Per trasferire la massima potenza da un generatore avente la f.e.m.  $E = 1$  V e l'impedenza  $Z_o = 1.000 + j 10.048$  ohm alla frequenza  $f = 10^5$  Hz, ad un circuito utilizzatore avente l'impedenza  $Z_k = 314 + j 6.280$  ohm, si fa uso di un quadripolo adattatore costituito da due circuiti risonanti serie accoppiati induttivamente e accordati sulla frequenza del generatore. Potendo trascurare le resistenze ohmiche degli avvolgimenti accoppiati e sapendo che l'induttanza dell'avvolgimento primario è  $L_1 = 64$  mHr e che quella dell'avvolgimento secondario è  $L_2 = 90$  mHr, determinare le capacità  $C_1$  e  $C_2$ , il fattore di accoppiamento critico  $K_c$ , le correnti primaria  $I_1$  e secondaria  $I_2$ , la potenza erogata  $P_m$  e la potenza utilizzata  $P_k$ . (R.  $C_1 = 31,42$  pF;  $C_2 = 25,35$  pF;  $K_c = 0,01$ ;  $I_1 = 0,5$  mA;  $I_2 = 0,89$  mA;  $P_m = 0,5$  mW;  $P_k = 0,25$  mW).
- Un circuito generatore avente la f.e.m.  $E = 1$  volt e l'impedenza  $Z_o = 750 + j 1.000$  ohm alla frequenza di  $10^5$  Hz, è collegato ad un carico avente l'impedenza  $Z_k = 300 + j 400$  ohm, attraverso un quadripolo adattatore costituito da due circuiti risonanti serie accoppiati induttivamente con fattore di accoppiamento critico  $K_c = 0,008$ . Sapendo che il circuito primario e il circuito secondario hanno il medesimo coefficiente di risonanza, determinare tale coefficiente  $Q$ ,

l'induttanza  $L_1$  e  $L_2$  dei due avvolgimenti accoppiati, la corrente  $I_1$  del circuito primario e  $I_2$  del circuito secondario. (R.  $Q = 125$ ;  $L_1 = 147,7$  mHr;  $L_2 = 59$  mHr;  $I_1 = 0,66$  mA;  $I_2 = 1$  mA).

- Un filtro passa-basso è costituito da una resistenza  $R = 100$  ohm e da una capacità  $C = 1$   $\mu$ F. Determinare la frequenza di taglio superiore  $f_{ts}$ . Usando le stesse costanti per realizzare un filtro passa-alto, determinare la frequenza di taglio inferiore  $f_{ti}$ . (R.  $f_{ts} = f_{ti} = 1.592$  Hz).
- Avendo a disposizione un'induttanza  $L = 0,1$  Hr, quale resistenza occorre per realizzare un filtro passa-basso e un filtro passa-alto aventi la frequenza di taglio  $ft = 1$  KHz? (R.  $R = 628$  ohm).
- Un filtro passa-banda è costituito da due circuiti risonanti serie accoppiati induttivamente e accordati sulla frequenza  $f_0 = 10^5$  Hz, uguali fra loro, aventi la cifra di merito  $Q = 100$  e la resistenza equivalente serie  $R_s = 30$  ohm. Determinare il fattore di accoppiamento critico  $K_c$  e la larghezza della banda passante  $B$ . Calcolare inoltre il fattore di accoppiamento  $K$  necessario per ottenere una larghezza di banda  $B = 5$  KHz. (R.  $K_c = 0,015$ ;  $B = 1.500$  Hz;  $K = 0,05$ )
- Un filtro passa-banda deve avere una banda passante  $B = 9$  KHz centrata attorno alla frequenza di 450 KHz. Se l'induttanza del circuito primario e del circuito secondario è  $L = 2$  mHr, determinare le capacità  $C$  di accordo, il fattore di accoppiamento  $K$ , la cifra di merito  $Q$  e la resistenza equivalente serie  $R_s$  dei due circuiti. (R.  $C = 62$  pF;  $K = 0,02$ ;  $Q = 75$ ;  $R_s = 75,3$  ohm).

## Capitolo Dodicesimo

### I tubi elettronici

I tubi elettronici sono conduttori *non lineari*, perché in essi la corrente fluisce in un senso solo e con intensità non proporzionale alle variazioni della tensione applicata, a differenza dei conduttori normali che conducono corrente nei due sensi indifferente e proporzionalmente alla tensione a cui sono sottoposti.

I tubi elettronici sono costituiti da un involucro di vetro o di metallo nel quale gli elettroni emessi dal catodo si propagano verso l'anodo, stabilendo un flusso di cariche elettriche che chiude il circuito di alimentazione dando luogo perciò ad una corrente elettrica nel circuito esterno.

#### 12.1. CLASSIFICAZIONE DEI TUBI ELETTRONICI

La classificazione dei tubi elettronici può essere fatta in diversi modi.

1°. Se si tiene conto della presenza o meno di gas nel tubo si hanno:

- a) tubi ad alto vuoto, nei quali si è cercato di raggiungere il vuoto più spinto possibile;
- b) tubi a gas, nei quali dopo aver fatto il vuoto, si è introdotta una determinata quantità di gas.

2°. Se si tien conto del diverso meccanismo di emissione elettronica da parte del catodo (v. parag. 2.12.), si hanno:

- a) tubi termoionici o a catodo caldo, nei quali l'emissione è dovuta all'effetto termoionico;
- b) tubi a catodo freddo, che sono generalmente a gas, nei quali si utilizza l'emissione di campo;
- c) tubi fotoelettrici, nei quali l'emissione elettronica è dovuta all'effetto fotoelettrico.

3°. Se si tien conto del numero degli elettrodi presenti nel tubo, si hanno:

- a) tubi a due elettrodi o diodi (catodo ed anodo);
- b) tubi a tre elettrodi o triodi (catodo, griglia controllo e anodo);

- c) tubi a quattro elettrodi o tetrodi (catodo, griglia controllo, griglia schermo e anodo);
- d) tubi a cinque elettrodi o pentodi (catodo, griglia controllo, griglia schermo, griglia di soppressione e anodo);
- e) tubi a fascio elettronico che al posto della griglia di soppressione hanno delle placchette focalizzatrici;
- f) tubi multipli che contengono in un solo involucro due o tre dei precedenti tubi (doppio diodo, doppio triodo, doppio diodo-triodo, triodo-pentodo, ecc.).

Vi sono infine altri tubi la cui denominazione è legata alle loro funzioni tecniche. Si hanno così i tubi a raggi catodici di tipo oscillografico e per televisione (cinescopi), i tubi fotoelettrici per riprese televisive (iconoscopi, vidicon, orthicon), i tubi a raggi X, i fotomoltiplicatori, ecc.

È importante osservare fin d'ora che:

- a) il numero e la velocità degli elettroni che arrivano all'anodo sono determinati dall'emissione del catodo e dai potenziali esistenti nella regione catodo-anodo;
- b) le traiettorie percorse dagli elettroni possono essere modificate mediante campi elettrici e campi magnetici.

## 12.2. GENERALITÀ SUI TUBI TERMOELETTRICI AD ALTO VUOTO

I tubi termoelettronici ad alto vuoto sono i più diffusi nella tecnica elettronica ed in particolare nella radiotecnica.

Abbiamo detto che l'involucro può essere di vetro o anche di metallo e deve contenere almeno due elettrodi: il catodo emittente, normalmente a potenziale negativo e l'anodo collettore o placca, normalmente a potenziale positivo (diodo).

La presenza di un terzo elettrodo sotto forma di griglia e cioè di elettrodo forato, avente la funzione di regolare il flusso elettronico, trasforma il diodo in un triodo. L'aggiunta di altre griglie non fa che modificare le caratteristiche, le funzioni e i parametri del triodo, determinando il tetrodo, il pentodo e i tubi multipli.

### 1) Il catodo

È indubbiamente l'elettrodo più delicato non solo perché, essendo sottoposto ad alte temperature, è maggiormente sensibile alle sollecitazioni meccaniche, ma anche per i requisiti che deve possedere in funzione delle grandezze elettriche, meccaniche e termiche a cui è legato.

Infatti un catodo ideale dovrebbe possedere le seguenti proprietà:

- a) grande potere emittente e cioè basso lavoro di estrazione;
- b) alta temperatura di fusione;
- c) grande resistenza meccanica al bombardamento ionico;
- d) alto rendimento di emissione.

Praticamente non è possibile trovare o produrre un materiale che assommi in sé tutte queste qualità.

I tipi di catodo oggi in uso sono:

#### a) **Catodo a filamento di tungsteno puro**

I metalli puri possiedono in genere un lavoro di estrazione piuttosto elevato, per cui bisognerebbe portarli ad alte temperature per ottenere una discreta emissione elettronica.

Ricordiamo infatti che l'emissione da parte di un conduttore cresce con l'aumentare della temperatura a cui il conduttore viene riscaldato e diminuisce con l'aumentare del potenziale di estrazione della sostanza usata.

L'unico tra i metalli puri che può essere preso in considerazione è il *tungsteno* o *wolframio*, perché, anche se ha un lavoro di estrazione piuttosto alto (4,53 V), fonde ad elevata temperatura (3.655 °K), per cui può dare buone emissioni elettroniche aumentando la temperatura del filamento senza rischio di fonderlo.

Altri metalli aventi potenziale di estrazione minori di quelli del tungsteno, come ad esempio il torio (3,35 V), il calcio (2,24 V), evaporano a temperature troppo basse per produrre un'emissione elettronica sufficiente.

L'elevata temperatura a cui vengono portati i catodi di tungsteno comporta però il problema del raffreddamento del tubo, per cui il tungsteno viene utilizzato soltanto nella costruzione dei catodi di grossi tubi di potenza a riscaldamento diretto, nei quali gli inconvenienti dell'irraggiamento calorifico sulle pareti del vetro sono meno sentite, date le dimensioni più grandi rispetto a quelle dei normali tubi radoriceventi e perciò più facilmente eliminabili con sistemi di raffreddamento ad aria o ad acqua.

Inoltre nei tubi di potenza e in altri tubi nei quali la differenza di potenziale agente tra catodo e placca è piuttosto elevata, eventuali ioni gassosi residui vengono accelerati verso il catodo e, nell'urto, possono deteriorarlo. Il tungsteno ha anche la proprietà di resistere bene a tale bombardamento ionico e perciò viene impiegato anche in quei tubi nei quali non è conveniente ottenere un vuoto molto spinto.

La durata del filamento decresce con l'aumentare della temperatura e cioè del rendimento di emissione, per cui nella pratica si deve raggiungere un compromesso soddisfacente tra questi due fattori.

Pertanto i catodi di tungsteno vengono portati alla temperatura di 2.500-2.600 °K per ottenere durate medie comprese rispettivamente tra 3.000 e 1.000 ore di funzionamento.

Il rendimento di emissione, e cioè il rapporto tra la corrente di emissione e la potenza riscaldante, di un catodo di tungsteno è piuttosto basso e cioè di 5-20 mA/W.

#### **b) Catodo a filamento di tungsteno toriato**

Mediante delicati e laboriosi procedimenti è possibile ricoprire il filamento di tungsteno con uno strato monoatomico e cioè estremamente sottile, di torio.

Si ottiene così un catodo di tungsteno toriato, che ha, rispetto al tungsteno puro, il duplice vantaggio derivante dall'alta temperatura a cui può essere portato il tungsteno e dall'alto potere emittente del torio.

Il catodo toriato si fa di solito lavorare ad una temperatura di 1.950-2.000 °K, per ottenere un rendimento di emissione di 40-100 mA/W e una durata di 2.500-2.000 ore di funzionamento.

Per realizzare il massimo della durata tale catodo non deve lavorare però a temperature superiori o inferiori a quelle stabilite dal costruttore.

Il catodo toriato è particolarmente soggetto a deterioramento sotto l'azione bombardante degli ioni positivi del gas residuo, per cui viene impiegato in tubi a vuoto molto spinto e con tensioni anodiche dell'ordine del migliaio di volt.

Il catodo può essere considerevolmente protetto sia dal bombardamento che dalla rapida evaporazione del torio ad elevata temperatura, sottoponendo il tungsteno toriato ad un processo di carbonizzazione, che, pur rendendo più fragile il filamento, riduce l'evaporazione del torio dell'80 % e rende il catodo più resistente al bombardamento ionico.

#### **c) Catodo a filamento ossidato**

Il miglior catodo dal punto di vista del rendimento di emissione è quello ricoperto di ossidi.

I catodi a filamento ossidato si costruiscono in forma di piastrelle o nastri di tungsteno, o di platino-iridio, o di nichel-platino o meglio ancora di una lega di ferro-nichel-cobalto-titanio, ricoperti, mediante speciali procedimenti, di ossidi di bario o di stronzio o di calcio. Tali ossidi aumentano notevolmente il potere emittente del metallo o delle leghe metalliche, per cui il filamento può essere portato ad una temperatura di 1.100-1.200 °K soltanto, per ottenere un rendimento di emissione di 100-200 mA/W.

Questo tipo di catodo viene normalmente usato nelle valvole riceventi con tensioni anodiche inferiori ai 500 V.

Così i deboli campi acceleratori e la temperatura non eccessivamente alta, riducono la quantità di gas residuo e conseguentemente il bombardamento ionico, il cui effetto è particolarmente sentito dallo strato di ossido.

La vita del catodo a filamento ossidato è legata all'esaurimento degli ossidi, ma può essere anche di 5.000 ore se il tubo viene usato per flussi elettronici non eccessivi.

#### d) **Catodo ossidato**

Il catodo ossidato differisce dal filamento ossidato solo per il fatto che viene riscaldato indirettamente ed è costituito da un filamento riscaldatore, normalmente di tungsteno, infilato in un tubetto di materiale refrattario (fig. 12.2), rivestito di un cilindretto di nichel sul quale è depositato uno strato di ossido.

Il rendimento di emissione dei catodi ossidati è però inferiore a quello del filamento ossidato, in quanto la potenza elettrica occorrente per raggiungere la stessa temperatura di emissione è maggiore nel riscaldamento indiretto rispetto a quella occorrente nel riscaldamento diretto. Il rendimento è di 50-150 mA/W.

È questo il tipo di catodo più largamente impiegato nei piccoli tubi, come quelli che si usano nei radiorecettori, negli amplificatori e in vari tipi di comandi elettronici industriali.

Il riscaldamento del catodo è ottenuto ovviamente facendo passare nel filamento una corrente elettrica di intensità sufficiente a portarlo alla temperatura voluta.

Il catodo, come detto precedentemente, può quindi essere:

#### a) **a riscaldamento diretto:**

La corrente percorre cioè direttamente il filamento che funge da catodo, come nel caso dei catodi a filamento di tungsteno, di tungsteno toriato e a filamento ossidato. Per il riscaldamento diretto è preferibile l'uso della corrente continua, perché la corrente alternata provoca, a causa delle sue alternanze, una leggera fluttuazione del campo elettrico e cioè della d.d.p. tra il catodo e l'anodo, agente sugli elettroni emessi. Conseguentemente il flusso elettronico attraverso il tubo non si mantiene uniforme.

I catodi a riscaldamento diretto vengono costruiti nelle forme tipiche indicate in figura 12.1 e cioè con il filamento teso su supporto elastico, oppure avvolto a spirale, in modo che esso possa dilatarsi senza deformarsi o rompersi e in modo da consentire un basso irraggiamento termico al fine di ottenere la più elevata emissione possibile.

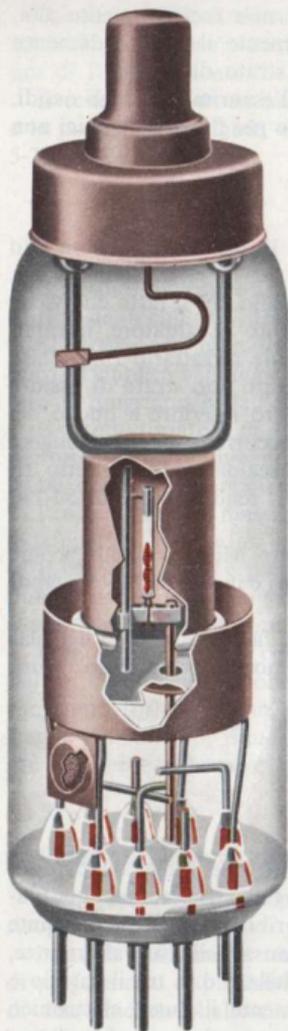


Tavola N. 3 - Diodo per alte tensioni. DY 86.

Catodo a riscaldamento indiretto. Viene impiegato per raddrizzare l'alta tensione applicata all'anodo acceleratore finale dei cinescopi per televisione.

Tensione di accensione del filamento: 1,4 V.  
 Corrente di accensione del filamento: 0,55 A.  
 Corrente continua raddrizzata: 0,8 mA.  
 Massima tensione inversa: 22 KV.

(Documento Philips).

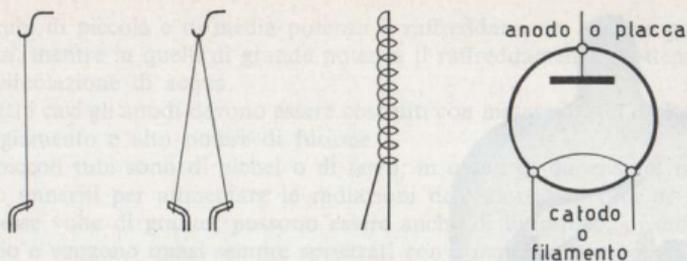


Fig. 12.1 - Forme di filamento a riscaldamento diretto e simbolo del diodo.

### b) a riscaldamento indiretto:

La corrente percorre un filamento riscaldatore, il quale, per irraggiamento, porta alla temperatura voluta il catodo ossidato. La struttura del catodo a riscaldamento indiretto è la stessa del catodo ossidato precedentemente descritta e rappresentata in figura 12.2.

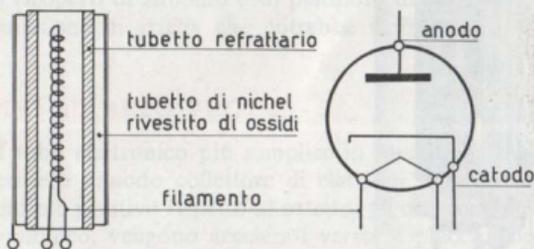


Fig. 12.2 - Catodo a riscaldamento indiretto e simbolo del diodo.

A causa della bassa temperatura di funzionamento e per la presenza del tubetto refrattario, la dissipazione del calore è lenta, per cui la temperatura del catodo si mantiene costante anche se il filamento viene alimentato con corrente alternata. È questo un considerevole vantaggio sia per ragioni di economia, sia perché tutti i punti del catodo rimangono allo stesso potenziale con conseguente uniformità del flusso elettronico.

### 2) L'anodo

Gli anodi dei tubi termoionici ad alto vuoto, essendo soggetti all'urto del flusso elettronico, si scaldano, per cui devono essere raffreddati per evitare che raggiungano temperature troppo elevate.



Tavola N. 4 - Doppio diodo. EZ 80.

Catodo a riscaldamento indiretto. Viene impiegato principalmente per raddrizzare la tensione di rete la quale, dopo essere stata sufficientemente livellata, viene usata come tensione di alimentazione anodica dei tubi elettronici.

Tensione di accensione del filamento: 6,3 V.  
 Corrente di accensione del filamento: 0,6 A.  
 Corrente raddrizzata: 90 mA.

(Documento Philips).

Nei tubi di piccola e di media potenza il raffreddamento avviene per irraggiamento, mentre in quelli di grande potenza il raffreddamento è ottenuto mediante circolazione di acqua.

In tutti i casi gli anodi devono essere costruiti con materiali aventi alto potere di irraggiamento e alto potere di fusione.

Nei piccoli tubi sono di nichel o di ferro, in quelli di dimensioni maggiori vengono anneriti per aumentare le radiazioni del calore, nei tubi di potenza sono spesse volte di grafite; possono essere anche di tungsteno, di molibdeno e tantalio e vengono quasi sempre spruzzati con zirconio o composti di zirconio, per rendere le loro proprietà raggianti molto vicine a quelle del corpo nero.

### 3) Le griglie

Le griglie dei tubi ad alto vuoto sono normalmente costituite da filo sottile avvolto a spirale, su appositi supporti, attorno al catodo. La geometria di queste spirali è determinante per le caratteristiche funzionali del tubo.

Le griglie dei tubi di piccola potenza sono comunemente di nichel-manganese, mentre quelle dei tubi di grande potenza sono costituiti da fili di tungsteno o di molibdeno ricoperti di zirconio o di platino o di oro allo scopo di ridurre al massimo l'emissione di griglia che potrebbe verificarsi in casi particolari.

## 12.3. IL DIODO AD ALTO VUOTO

Il diodo è il tubo elettronico più semplice in quanto ha due soli elettrodi: il catodo emittente e l'anodo collettore di elettroni. Se all'anodo o placca si applica un potenziale positivo rispetto al catodo, gli elettroni, emessi dal catodo per effetto termoionico, vengono accelerati verso la placca, che li raccoglie e, attraverso il circuito esterno, ritornano al catodo.

Se invece all'anodo si applica un potenziale negativo, gli elettroni emessi vengono respinti, per cui nel tubo non esiste flusso elettronico e di conseguenza non si ha corrente di conduzione nel circuito esterno.

Il tubo conduce allora in un senso solo e si comporta come un conduttore unidirezionale, avente cioè una determinata resistenza nel primo caso (anodo positivo) e avente resistenza infinita nel secondo caso (anodo negativo).

Si chiama *corrente anodica* o *di placca*  $I_a$  la corrente raccolta dalla placca e che fluisce nel circuito esterno, *tensione anodica*  $V_a$  la tensione applicata tra anodo e catodo e *tensione di filamento*  $V_f$  la tensione di alimentazione del filamento.

Il comportamento e il campo di applicabilità del diodo sono determinati dalle curve caratteristiche che esprimono il modo con cui varia la corrente anodica  $I_a$  in funzione della tensione anodica  $V_a$  e della tensione di filamento  $V_f$  (o meglio della temperatura che tale tensione determina nel catodo).

La curva che rappresenta la funzione:

$$I_a = f(V_a) \quad \text{per } V_f = \text{cost.} \quad (12.1)$$

prende il nome di *caratteristica anodica del diodo* e mette in evidenza il modo con cui varia la corrente anodica  $I_a$  con il variare della tensione anodica  $V_a$ , rimanendo costante la tensione applicata al filamento e cioè la temperatura del catodo.

Consideriamo lo schema di polarizzazione diretta (eseguita cioè con batterie) e di misura di un diodo a riscaldamento indiretto, rappresentato in figura 12.3.

Mediante il reostato  $R_f$  si stabilisce una determinata tensione al filamento, il cui valore si rileva sul voltmetro  $V_f$ .

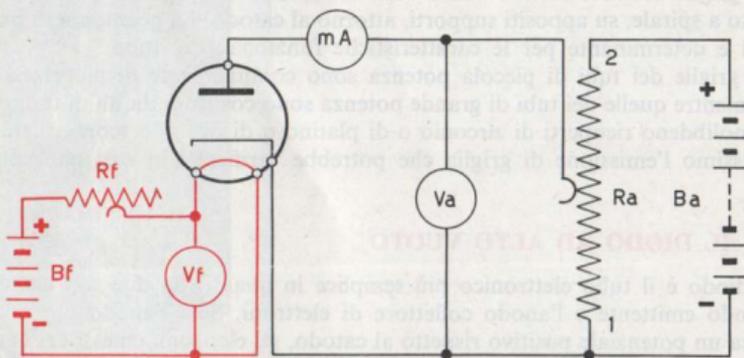


Fig. 12.3 - Schema di polarizzazione e di misura di un diodo.

Partendo poi con il cursore del potenziometro  $R_a$  dalla posizione 1, si aumenta gradatamente da zero la tensione anodica, i cui valori si rilevano sul voltmetro  $V_a$ , e si leggono sul milliampermetro  $mA$  i corrispondenti valori della corrente anodica  $I_a$ .

Portando sulle ascisse di un sistema di assi cartesiani i valori della tensione anodica  $V_a$  e sulle ordinate i corrispondenti valori della corrente anodica  $I_a$ , si traccia la curva caratteristica anodica del diodo.

Il procedimento può essere ripetuto per diversi valori della tensione di filamento  $V_f$ . Si ottiene così una famiglia di caratteristiche anodiche, i cui andamenti sono rappresentati in figura 12.4.

Si osservi che la corrente anodica  $I_a$  varia in funzione della tensione anodica  $V_a$  con legge *non lineare*. Infatti la corrente anodica è sempre determinata da

due fattori di limitazione. Uno di questi fattori è imposto dall'addensamento di elettroni nello spazio attorno al catodo, detto *carica spaziale negativa* (parag. 12.2. a).

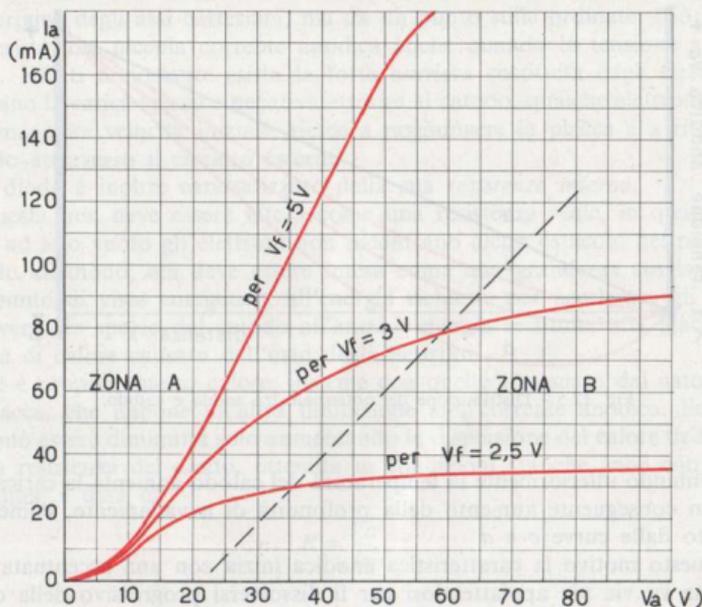


Fig. 12.4 - Famiglia di caratteristiche anodiche di un diodo.

Ricordiamo infatti che se il catodo viene riscaldato e all'anodo non viene applicato alcun potenziale, gli elettroni emessi, non essendo attratti dalla placca, costituiscono attorno al catodo una nube elettronica, che in brevissimo tempo raggiunge una condizione di regime, per cui tanti sono gli elettroni emessi dal catodo quanti sono quelli che vi ricadono a causa del potenziale positivo o *immagine positiva* che lo stesso catodo assume con l'emissione.

Se si aumenta la temperatura del catodo, l'emissione e l'intensità della carica spaziale aumentano fino a raggiungere un nuovo equilibrio. Per comprendere allora l'influenza della carica spaziale negativa sulla corrente anodica consideriamo la distribuzione del potenziale tra catodo ed anodo aventi la forma di due piani paralleli  $K$  e  $P$  posti alla distanza  $X$  (fig. 12.5).

Se il catodo è freddo e se la tensione applicata tra catodo ed anodo è  $V_a$ , la distribuzione del potenziale tra i due piani per l'assenza della carica spaziale è uniforme ed è rappresentata dalla retta  $a$ . Riscaldando il catodo ad una certa

temperatura, la distribuzione del potenziale è rappresentata dalla curva *b*, e la profondità dell'avvallamento è determinata da una certa intensità della carica spaziale.

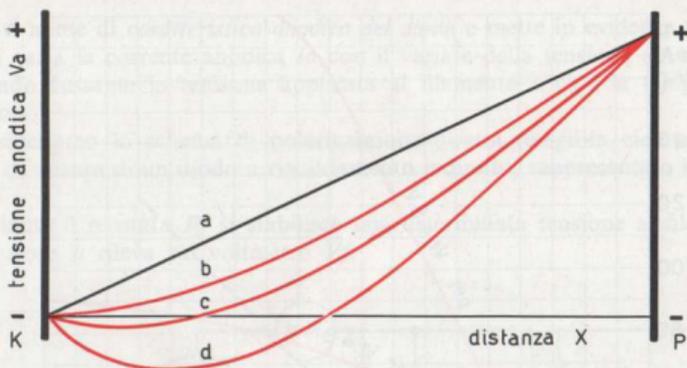


Fig. 12.5 - Distribuzione del potenziale tra anodo e catodo.

Aumentando ulteriormente la temperatura del catodo aumenta la carica spaziale, con conseguente aumento della profondità di avvallamento, come rappresentato dalle curve *c* e *d*.

Per questo motivo la caratteristica anodica inizia con una accentuata concavità che va via via appiattendosi per il dissolversi progressivo della carica spaziale dovuto al progressivo aumento della tensione anodica e cioè del campo acceleratore degli elettroni emessi dal catodo.

La zona nella quale la corrente anodica è influenzata dalla carica spaziale e che in figura 12.4 è rappresentata con la lettera *A*, è detta appunto *zona della carica spaziale*.

L'altro fattore di limitazione è imposto dalla massima emissione del catodo ossia dalla cosiddetta *saturazione*.

Poiché il numero degli elettroni emessi dipende dalla temperatura del catodo, se questa rimane costante, il flusso di elettroni tra catodo ed anodo aumenta con l'aumentare della tensione anodica fino a che questa riuscirà ad attrarre tutti gli elettroni emessi. A partire da questo momento, anche se la tensione anodica continua ad aumentare, la corrente di placca non cresce più ed è funzione solamente della temperatura del filamento. La caratteristica anodica descrive perciò una curva convessa e tende a divenire parallela all'asse delle ascisse.

La regione nella quale l'intensità della corrente diventa quasi stazionaria e che in figura 12.4 è indicata con la lettera *B*, è detta *zona di saturazione*.

La massima corrente anodica che può passare in un diodo senza che la placca si deteriori è però sempre molto inferiore alla corrente di saturazione e viene indicata dai costruttori.

Osserviamo ancora che la curva caratteristica anodica potrebbe non partire dall'origine degli assi cartesiani, ma da un punto sulle ordinate. Ciò dimostra che esiste una piccola corrente anodica anche quando la tensione anodica è nulla. Infatti nonostante esista la forte barriera costituita dagli elettroni che formano la carica spaziale negativa attorno al catodo, qualche elettrone, emesso con maggiore velocità iniziale, riesce a raggiungere la placca e a ritornare al catodo attraverso il circuito esterno.

Il diodo è inoltre caratterizzato dalla sua *resistenza interna*.

Questa non deve essere intesa come una resistenza reale, in quanto in un tubo ad alto vuoto gli elettroni non incontrano alcun ostacolo nel passare dal catodo all'anodo, ma deve essere intesa come una grandezza corrispondente, dal punto di vista energetico, all'energia richiesta per accelerare gli elettroni attraverso lo spazio dal catodo all'anodo, energia restituita alla placca sotto forma di calore causato dall'urto degli elettroni.

Ed è proprio questo calore, insieme con quello irraggiato dal catodo verso la placca, che impone un'altra limitazione alla corrente anodica, limitazione che può essere diminuita solo aumentando la dispersione del calore della placca.

La resistenza del diodo, ottenuta in condizioni statiche, cioè con tensione continua, è data da:

$$R = \frac{V_a}{I_a}, \quad (12.2)$$

ossia dal rapporto tra il valore della tensione anodica  $V_a$  e il corrispondente valore della corrente anodica  $I_a$ .

Dalla caratteristica anodica si rileva che tale rapporto è lungi dall'essere costante.

Infatti è maggiore nel tratto concavo della caratteristica, diminuisce nel tratto lineare ed aumenta di nuovo nel tratto corrispondente alla curva di saturazione.

Ovviamente un buon diodo dovrebbe permettere, a parità di ogni altra condizione, che una data corrente anodica fluisca con il minimo di tensione anodica, dovrebbe cioè possedere una bassa resistenza. Il che si ottiene quando la distanza tra catodo ed anodo è piccola, per quanto lo permettano le esigenze di isolamento.

Dobbiamo infatti considerare un'ulteriore limitazione alle caratteristiche elettriche di un diodo dovuta alla *tensione inversa* applicabile tra i suoi elettrodi.

Quando il diodo viene utilizzato per raddrizzare la corrente alternata, alla placca si ha, durante un semiperiodo, un potenziale negativo rispetto al catodo: il tubo non conduce e la tensione tra catodo ed anodo, detta *tensione inversa*,

è molto più elevata, per l'assenza delle cadute di tensione, di quando il tubo conduce.

Potrebbe allora verificarsi una scarica tra gli elettrodi, se lo spazio tra catodo ed anodo non fosse largamente sufficiente a sopportare la tensione inversa.

I listini delle case costruttrici forniscono infatti, per il normale impiego del diodo, non solo la tensione di accensione del filamento, la massima corrente anodica, la tensione di placca, ma anche la tensione inversa.

Proprio per il fatto che al diodo può essere applicata una tensione variabile, non ha più significato considerare la resistenza statica, in quanto essa varia con il variare della tensione anodica e cioè con il punto della caratteristica in cui il tubo si trova a lavorare.

La resistenza interna del diodo viene in tal caso calcolata facendo invece il rapporto tra la variazione  $\Delta Va$  della tensione anodica e la corrispondente variazione  $\Delta Ia$  della corrente anodica:

$$R_d = \frac{\Delta Va}{\Delta Ia}, \quad (12.3)$$

alla quale si dà il nome di *resistenza dinamica* o di *resistenza differenziale*.

Anche la resistenza differenziale, a causa della non assoluta linearità del tratto centrale della caratteristica su cui il tubo viene normalmente fatto lavorare, varia ad ogni variazione, per piccola che sia, della tensione anodica.

Sia la resistenza statica  $R$  che la resistenza differenziale  $R_d$  si possono ricavare dalla curva caratteristica anodica. Consideriamo infatti la caratteristica anodica di figura 12.6.

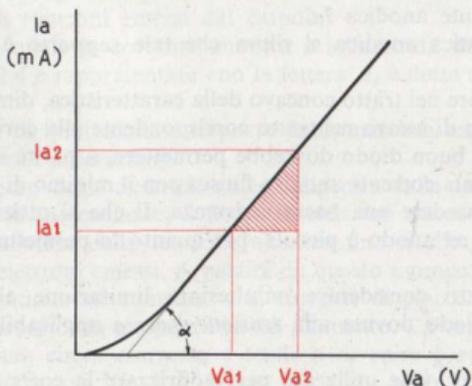


Fig. 12.6 - Determinazione della  $R_d$ .

Se la tensione applicata tra catodo ed anodo oscilla tra i valori  $V_{a1}$  e  $V_{a2}$ , la corrente anodica varia corrispondentemente dal valore  $I_{a1}$  a  $I_{a2}$ . La resistenza differenziale  $R_d$  è allora data da:

$$R_d = \frac{V_{a2} - V_{a1}}{I_{a2} - I_{a1}} = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a}$$

L'inverso della resistenza è una *conduttanza* ed esprime anche la tangente dell'angolo  $\alpha$  di inclinazione della caratteristica. Infatti:

$$G = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_a} = \operatorname{tg} \alpha \quad (12.4)$$

Per questo la conduttanza è detta anche *pendenza* della curva caratteristica. Notiamo infine un particolare di non trascurabile importanza.

Quando si parla di potenziale anodico si intende parlare della tensione esistente tra anodo e catodo. Così, nel successivo studio del triodo, tetraodo ecc., i potenziali di griglia verranno intesi come la tensione esistente tra il catodo e la griglia relativa.

Tutti i potenziali agenti nel tubo sono cioè misurati rispetto al catodo. Dato però che tutti i potenziali sono relativi, è necessario prendere un punto di riferimento al catodo rispetto al quale eseguire le misure.

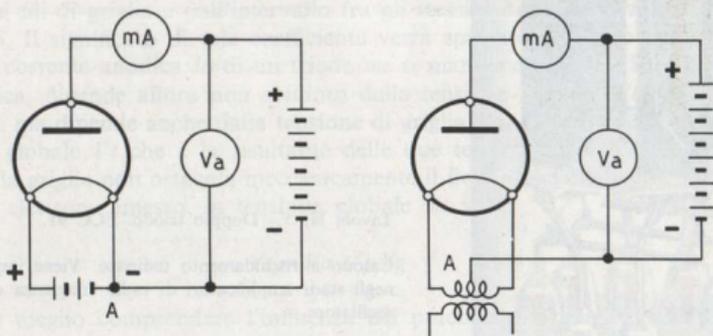


Fig. 12.7 - Punti di riferimento al catodo nella misura del potenziale anodico.

Per i catodi a riscaldamento indiretto il punto di riferimento è il terminale del catodo stesso, per i catodi a riscaldamento diretto è invece l'estremo negativo del filamento quando l'alimentazione è in c.c. (fig. 12.7-a), o la presa media del trasformatore quando per il riscaldamento si usa la corrente alternata (fig. 12.7-b).

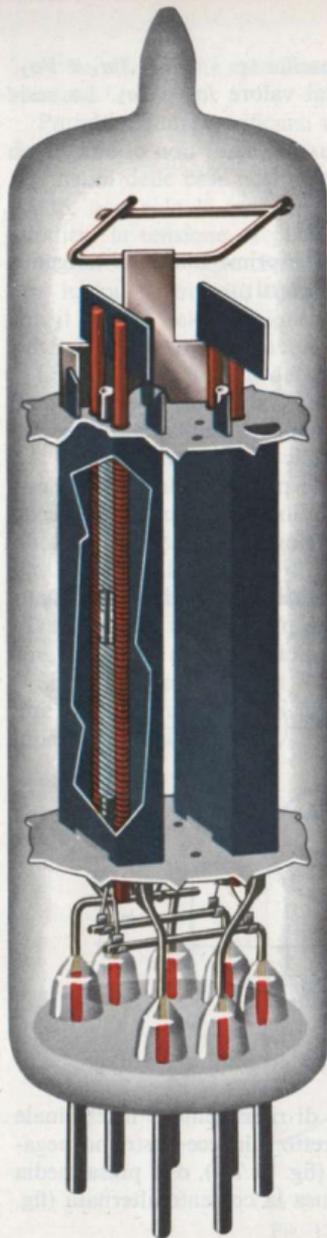


Tavola N. 5 - Doppio triodo. ECC 91.

Catodo a riscaldamento indiretto. Viene impiegato negli stadi amplificatori di radio frequenza e come oscillatore.

- Tensione di accensione del filamento: 6,3 V.
- Corrente di accensione del filamento: 0,45 A.
- Tensione anodica: 100 V.
- Corrente anodica: 8,5 mA.
- Pendenza: 5,3 mA/V.
- Resistenza anodica: 7,5 K $\Omega$ .
- Coefficiente di amplificazione: 38.

(Documento Philips).

## 12.4. IL TRIODO AD ALTO VUOTO

Se tra il catodo e l'anodo di un diodo viene posto un terzo elettrodo, detto *griglia di controllo*, si ottiene il *triodo*.

Il principale scopo di questo terzo elettrodo è di controllare il flusso elettronico mediante l'introduzione tra catodo ed anodo di un potenziale elettrico capace di aumentare o di diminuire l'effetto della carica spaziale negativa.

La griglia non dovrebbe in alcun modo ostacolare meccanicamente, né assorbire in minima parte, il flusso di elettroni. La prima condizione viene realizzata costruendo la griglia a forma reticolare a larghe maglie o a forma di spirale, per lasciare il maggior spazio possibile attraverso cui gli elettroni possano passare nel loro tragitto verso la placca. La seconda condizione viene in parte realizzata mantenendo la griglia a potenziale negativo rispetto al catodo, in modo che essa non possa attrarre gli elettroni diretti all'anodo.

La griglia quindi, nel funzionamento normale del tubo, non rappresenta un elettrodo collettore di elettroni, ma, data la sua vicinanza al catodo, modifica, con il suo potenziale, la velocità degli elettroni emessi e quindi regola la densità della carica spaziale con maggior efficacia di quanto non faccia il potenziale della placca.

Precisamente la tensione fra griglia e catodo, detta *tensione di griglia*  $V_g$ , agisce sul flusso elettronico con una efficacia  $\mu$  volte maggiore rispetto a quella esercitata da una tensione anodica  $V_a$  di eguale valore.

Il coefficiente  $\mu$ , detto *fattore di amplificazione del tubo*, dipende dal diametro dei fili di griglia e dall'intervallo fra gli stessi e dalla distanza tra griglia e anodo. Il significato di tale coefficiente verrà spiegato fra poco.

La corrente anodica  $I_a$  di un triodo, se si mantiene costante la temperatura catodica, dipende allora non soltanto dalla tensione anodica  $V_a$ , come per il diodo, ma dipende anche dalla tensione di griglia  $V_g$ : dipende cioè da una tensione globale  $V_t$  che è la risultante delle due tensioni.

Se la griglia non ostacola meccanicamente il fluire degli elettroni e non attira alcun elettrone emesso, la tensione globale  $V_t$  vale:

$$V_t = V_a + \mu V_g . \quad (12.5)$$

Per meglio comprendere l'influenza del potenziale di griglia sulla corrente anodica, consideriamo la distribuzione del potenziale entro il tubo, nei seguenti casi:

a) **La griglia è elettricamente isolata** dalle altre parti del circuito e dalla terra. La curva 1 della figura 12.8 rappresenta la distribuzione del potenziale entro il tubo in assenza di griglia, ottenuta per i normali valori della temperatura del catodo e della tensione anodica. Il potenziale esistente nel piano della griglia è in questo caso negativo rispetto al catodo e uguale a  $xy$ .

La griglia isolata deve assumere perciò tale potenziale per cui essa attirerà degli elettroni fino ad assumere il potenziale  $xy$ , detto *potenziale di griglia libera*. Dopo di che la corrente anodica risulta uguale a quella che si avrebbe nel corrispondente diodo.

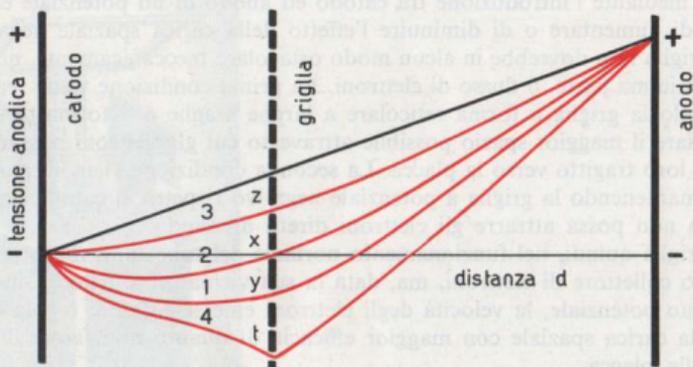


Fig. 12.8 - Distribuzione del potenziale in un triodo.

b) **La griglia è allo stesso potenziale del catodo.** Se la griglia viene direttamente collegata al catodo, essa assume lo stesso potenziale catodico e perciò la curva di distribuzione del potenziale deve passare per il punto  $x$ , come la curva 2. La griglia è ora meno negativa di prima e neutralizza parzialmente la carica spaziale, per cui la corrente anodica subisce un aumento.

c) **La griglia è a potenziale positivo rispetto al catodo.** Se la griglia, collegata indirettamente al catodo attraverso una sorgente di f.e.m. variabile, assume un potenziale positivo rispetto al catodo, corrispondente, per esempio, al valore  $xz$ , diminuisce l'effetto della carica spaziale, per cui il flusso elettronico è agevolato e in modo tanto più rilevante quanto maggiore è il potenziale positivo di griglia (curva 3). Tuttavia la corrente anodica subisce un aumento poco sensibile, poiché una parte degli elettroni accelerati verso la placca, incontrando i fili di griglia a potenziale positivo rimangono attratti da questi e danno origine ad una *corrente di griglia*, che si sottrae alla corrente anodica.

d) **La griglia è a potenziale negativo rispetto al catodo.** Supponiamo che il potenziale applicato alla griglia sia negativo e di valore corrispondente al tratto  $xt$ . La curva di distribuzione del potenziale assume l'andamento 4. La griglia aumenta l'effetto della carica spaziale e la corrente anodica fluente è molto minore di quella che si aveva con griglia libera.

Se poi il potenziale negativo di griglia annulla l'effetto del potenziale positivo di placca, nessun elettrone emesso potrà arrivare all'anodo e la corrente anodica si riduce a zero.

In tal caso si dice che il tubo è all'*interdizione* e il potenziale negativo di griglia capace di annullare la corrente anodica si chiama *tensione di interdizione*.

All'interdizione è valida la relazione (12.5), dalla quale si può ricavare il valore della tensione di interdizione del triodo, nota la tensione anodica  $V_a$  e il coefficiente di amplificazione  $\mu$  del tubo. Infatti se la corrente anodica ha valore zero anche la tensione globale agente nel tubo deve essere zero, per cui:

$$0 = V_a + \mu V_g,$$

da cui:

$$V_g = -\frac{V_a}{\mu}. \quad (12.6)$$

Il comportamento del triodo è determinato, come per il diodo, dalle sue curve caratteristiche statiche.

In un triodo ad alto vuoto si hanno però tre variabili indipendenti: la tensione di alimentazione catodica  $V_f$ , la tensione di placca  $V_a$  e la tensione di griglia controllo  $V_g$ ; e due variabili dipendenti: la corrente anodica  $I_a$  e la corrente di griglia  $I_g$ .

Le curve caratteristiche si ottengono però tenendo costante la tensione del filamento, che di regola è quella indicata dal costruttore, e si rilevano dallo schema di polarizzazione e di misura rappresentato in figura 12.9.

La batteria di griglia  $B_g$  è divisa in due parti per poter rendere la griglia positiva (cursore di  $R_g$  in posizione da 0 a 1), oppure negativa (cursore di  $R_g$  in posizione da 0 a 2) rispetto al catodo.

Il voltmetro  $V_g$  deve avere la scala a zero centrale.

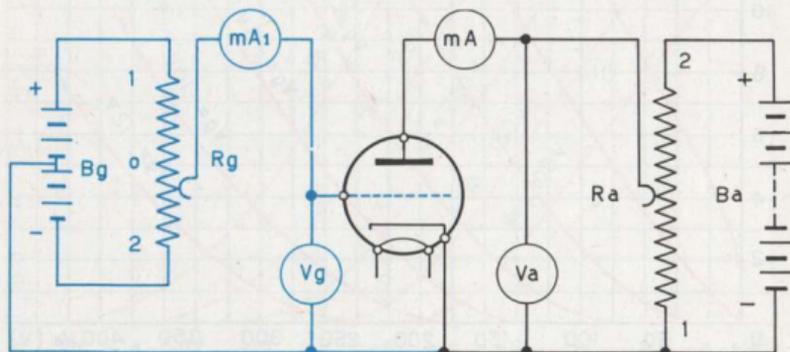


Fig. 12.9 - Schema per il rilievo delle caratteristiche del triodo.

Le curve caratteristiche del triodo sono le seguenti:

a) **Curva caratteristica anodica.** Rappresenta la funzione:

$$I_a = f(V_a) \text{ per } V_g = \text{cost.} \quad (12.7)$$

e mette in evidenza il modo con cui varia la corrente anodica  $I_a$  con il variare della tensione anodica  $V_a$ , quando si mantiene costante il valore della tensione di griglia  $V_g$ .

Con il reostato potenziometrico  $R_g$  si stabilisce un valore qualsiasi, compreso entro i valori possibili, della tensione di griglia che si rileva sul voltmetro  $V_g$ .

Si sposta gradatamente il cursore del potenziometro  $R_a$  dalla posizione 1 ( $V_a = \text{zero}$ ) verso la posizione 2 e si rilevano contemporaneamente i valori della  $V_a$  e i valori corrispondenti della corrente anodica  $I_a$ .

Portando sulle ascisse di un sistema di assi cartesiani i valori della  $V_a$  e sulle ordinate i rispettivi valori della  $I_a$ , si traccia la curva caratteristica anodica. Ripetendo il procedimento per diversi valori di  $V_g$  si ottiene una famiglia di curve caratteristiche anodiche, l'andamento delle quali è rappresentato in figura 12.10. Si osservi che per tensione di griglia uguale a zero la curva coincide pres-

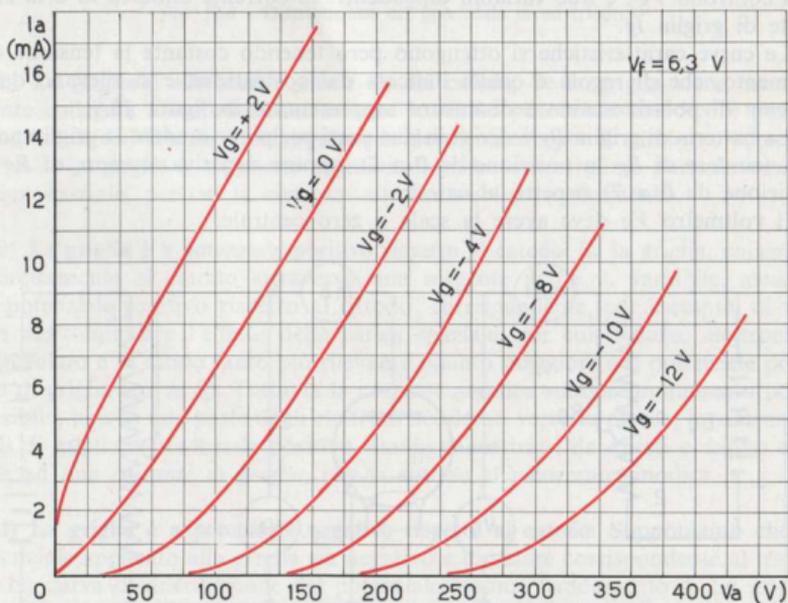


Fig. 12.10 - Famiglia di caratteristiche anodiche del triodo.

soché con quella del diodo. Per potenziali di griglia sempre più negativi, le caratteristiche si spostano quasi parallelamente, meno che nel tratto concavo iniziale che si fa sempre più profondo a causa dell'aumentata carica spaziale. Per potenziali positivi di griglia si ha corrente anodica anche quando il potenziale anodico è nullo e la caratteristica inizia con una debole concavità o addirittura rettilineamente a causa della diminuzione, o addirittura per l'assenza, della carica spaziale.

b) **Curva caratteristica mutua.** Rappresenta la funzione:

$$I_a = f(V_g) \text{ per } V_a = \text{cost.}, \quad (12.8)$$

e mette in evidenza il modo con cui varia la corrente anodica  $I_a$  al variare della tensione di griglia  $V_g$ , tenendo costante la tensione anodica  $V_a$ .

Si stabilisce, mediante il potenziometro  $R_a$ , un valore della tensione anodica che si rileva sul voltmetro  $V_a$ . Si porta quindi il cursore del potenziometro  $R_g$  in campo negativo (tratto 0-2) fino ad ottenere l'interdizione. Spostandolo ora gradatamente in senso opposto, si rilevano per ogni valore negativo e positivo della tensione di griglia  $V_g$ , i corrispondenti valori della corrente anodica  $I_a$ .

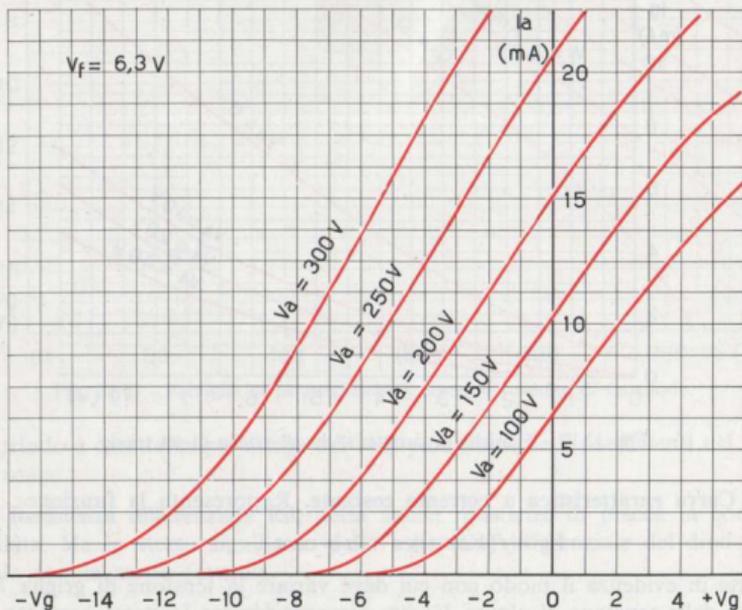


Fig. 12.11 - Famiglia di caratteristiche mutue di un triodo.

Portando sulle ascisse i valori della  $V_g$  e sulle ordinate i valori corrispondenti della  $I_a$ , si traccia la caratteristica mutua del triodo.

Ripetendo le operazioni per diversi valori della  $V_a$ , si ottiene una famiglia di curve caratteristiche mutue, il cui andamento è rappresentato in figura 12.11.

c) **Curva caratteristica di griglia.** Rappresenta la funzione:

$$I_g = f(V_g) \text{ per } V_a = \text{cost.}, \quad (12.9)$$

e mette in evidenza il modo con cui varia la corrente di griglia  $I_g$  al variare della tensione positiva di griglia  $V_g$ , tenendo costante la tensione anodica  $V_a$ .

Si fissa mediante il potenziometro  $R_a$  un valore della tensione anodica  $V_a$ . Facendo scorrere il cursore del potenziometro  $R_g$  dalla posizione 0 verso la posizione 1 si fa assumere gradatamente alla griglia un potenziale positivo  $V_g$  via via crescente e si rilevano sul milliampermetro  $mA_1$  i corrispondenti valori della corrente di griglia  $I_g$ . La curva caratteristica di griglia si ottiene portando sulle ascisse i valori di  $V_g$  e sulle ordinate i rispettivi valori di  $I_g$ .

Ripetendo le operazioni per diversi valori della tensione anodica  $V_a$  si ottiene una famiglia di curve caratteristiche di griglia, come rappresentato in figura 12.12.

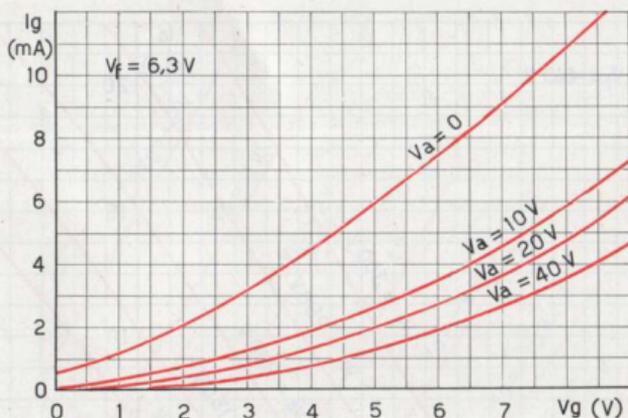


Fig. 12.12 - Famiglia di caratteristiche di griglia di un triodo.

d) **Curva caratteristica a corrente costante.** Rappresenta la funzione:

$$V_g = f(V_a) \text{ per } I_a = \text{cost.}, \quad (12.10)$$

e mette in evidenza il modo con cui deve variare la tensione di griglia  $V_g$  al variare della tensione di placca  $V_a$  per ottenere sempre la stessa corrente anodica  $I_a$ .

Per rilevare le curve caratteristiche a corrente costante, si fissano, mediante i potenziometri  $R_a$  e  $R_g$ , rispettivamente un valore di  $V_a$  e un valore di  $V_g$  e si rileva sul milliampermetro  $mA$  il valore della corrente anodica  $I_a$ . Si sposta quindi gradatamente il cursore di  $R_g$  per ottenere diversi valori di  $V_g$ , per ciascuno dei quali si trova, spostando opportunamente il cursore di  $R_a$ , il valore di  $V_a$  che, annullando l'effetto della variazione di  $V_g$ , mantiene costante la corrente anodica  $I_a$ . Portando sulle ordinate i valori di  $V_g$  e sulle ascisse i valori di  $V_a$ , si traccia la curva caratteristica a corrente costante.

Ripetendo il rilievo per diversi valori di  $I_a$  si ottiene una famiglia di caratteristiche a corrente costante, il cui andamento è rappresentato in figura 12.13.

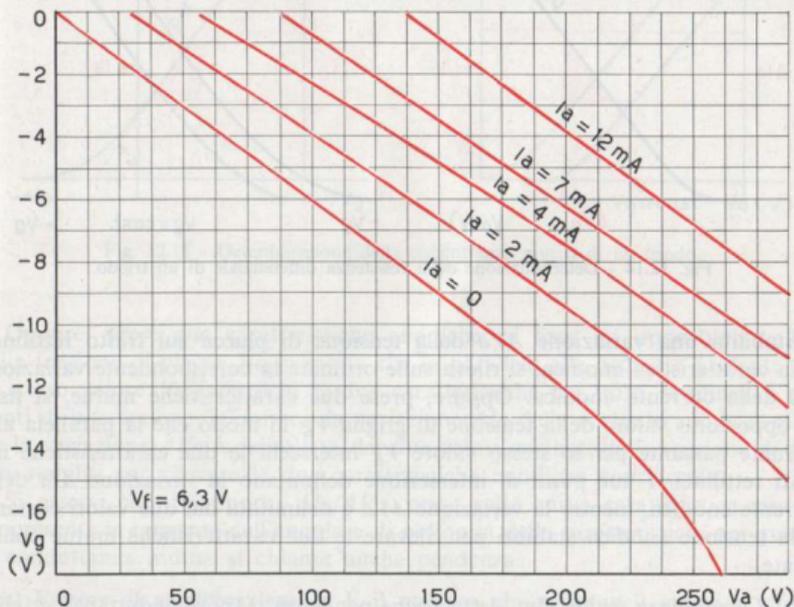


Fig. 12.13 - Famiglia di caratteristiche a corrente costante di un triodo.

Il triodo è caratterizzato anche dai suoi parametri, detti coefficienti del tubo. Essi sono:

a) **Resistenza differenziale  $R_d$** , detta anche resistenza di placca in corrente alternata. Ha lo stesso significato della resistenza differenziale del diodo e si calcola con la stessa formula.

$$R_d = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} \quad (\text{per } V_g = \text{cost.}) \quad (12.11)$$

Nel triodo può assumere valori di diverse migliaia di *ohm*.

Può essere determinata dalle curve caratteristiche del tubo e precisamente o da una caratteristica anodica (fig. 12.14-a) o da una famiglia di due caratteristiche mutue (fig. 12.14-b).

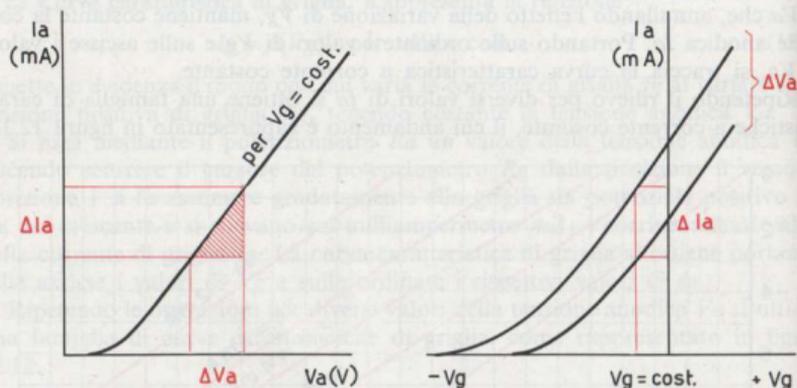


Fig. 12.14 - Determinazione della resistenza differenziale di un triodo.

Stabilita una variazione  $\Delta V_a$  della tensione di placca sul tratto rettilineo della caratteristica anodica, si rileva sulle ordinate la corrispondente variazione  $\Delta I_a$  della corrente anodica. Oppure, prese due caratteristiche mutue, si fissa un opportuno valore della tensione di griglia  $V_g$  in modo che la parallela alle ordinate passante per lo stesso valore  $V_g$  intersechi le due caratteristiche nei tratti rettilinei. I due punti di intersezione delimitano la variazione  $\Delta I_a$  della corrente anodica, mentre la variazione  $\Delta V_a$  è delimitata dai due valori costanti della tensione anodica stabiliti per rilevare le due caratteristiche mutue considerate.

b) **Conduttanza mutua  $G_m$** , detta anche pendenza o transconduttanza griglia-placca. Essa rappresenta il rapporto tra una piccola variazione  $\Delta I_a$  della corrente anodica e la corrispondente variazione  $\Delta V_g$  della tensione di griglia che l'ha provocata, rimanendo costante la tensione anodica  $V_a$ :

$$G_m = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} \text{ (per } V_a = \text{cost.)} . \quad (12.12)$$

La conduttanza si misura in siemens od anche in  $\text{mA/V}$ , e può essere determinata o da una curva caratteristica mutua (fig. 12.15-a) o da una famiglia di due caratteristiche anodiche (fig. 12.15-b).

Stabilita una variazione  $\Delta V_g$  della tensione di griglia sul tratto rettilineo della caratteristica mutua, si rileva sulle ordinate la corrispondente variazione  $\Delta I_a$  della corrente anodica.

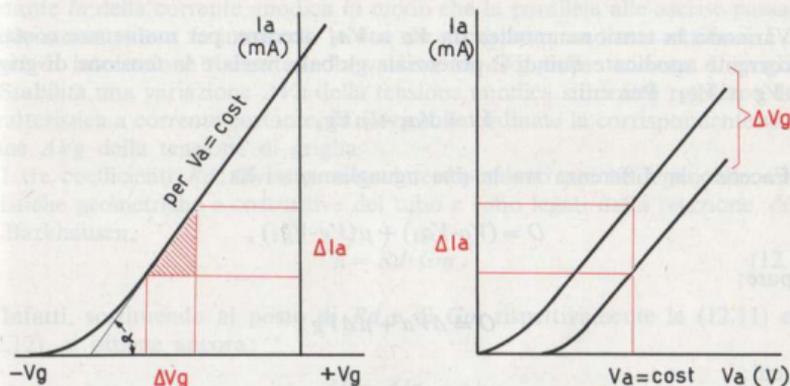


Fig. 12.15 - Determinazione della conduttanza mutua di un triodo.

Oppure, prese due caratteristiche anodiche, si fissa un opportuno valore della tensione di placca  $V_a$  in modo che la parallela alle ordinate passante per lo stesso valore  $V_a$  intersechi le due caratteristiche nei tratti rettilinei. I due punti di intersezione delimitano la variazione  $\Delta I_a$  della corrente anodica, mentre la variazione  $\Delta V_g$  è delimitata dai due valori costanti della tensione di griglia stabiliti per rilevare le due caratteristiche anodiche considerate.

Si osservi che il rapporto  $\Delta I_a / \Delta V_g$ , preso sulla curva caratteristica mutua, rappresenta la tangente dell'angolo  $\alpha$  di obliquità della caratteristica: per questo la conduttanza mutua si chiama anche pendenza.

c) **Fattore di amplificazione  $\mu$ .** È il numero che esprime il maggior effetto che la tensione  $V_g$  di griglia ha sulla corrente anodica rispetto alla tensione anodica  $V_a$ . Più propriamente è il rapporto tra una piccola variazione  $\Delta V_a$  della tensione anodica e la corrispondente variazione  $\Delta V_g$  della tensione di griglia necessaria per mantenere costante la corrente anodica  $I_a$ .

$$\mu = - \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} \text{ (per } I_a = \text{cost.)} . \quad (12.13)$$

Il segno meno che compare nella formula, non viene praticamente considerato, per cui il  $\mu$  è sempre preso con segno positivo.

Per meglio comprendere questo importante parametro del triodo, facciamo la seguente considerazione: in un triodo la corrente anodica  $I_a$  dipende dal potenziale globale  $V_t$ :

$$V_t = V_a + \mu V_g .$$

Variando la tensione anodica da  $V_a$  a  $V_{a_1}$  occorre, per mantenere costante la corrente anodica e quindi il potenziale globale, variare la tensione di griglia da  $V_g$  a  $V_{g_1}$ . Per cui:

$$V_t = V_{a_1} + \mu V_{g_1} .$$

Facendo la differenza tra le due uguaglianze si ha:

$$0 = (V_a - V_{a_1}) + \mu(V_g - V_{g_1}) ,$$

oppure:

$$0 = \Delta V_a + \mu \Delta V_g ,$$

da cui:

$$\mu = - \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} \text{ (per } I_a = \text{cost.) .}$$

Il fattore di amplificazione, che nei triodi normali può assumere il valore di qualche decina di unità, si può rilevare anche dalle curve caratteristiche del triodo e precisamente da una famiglia di due caratteristiche anodiche (fig. 12.16-a) o da una famiglia di due caratteristiche mutue (fig. 12.16-b) o da una caratteristica a corrente costante (fig. 12.16-c).

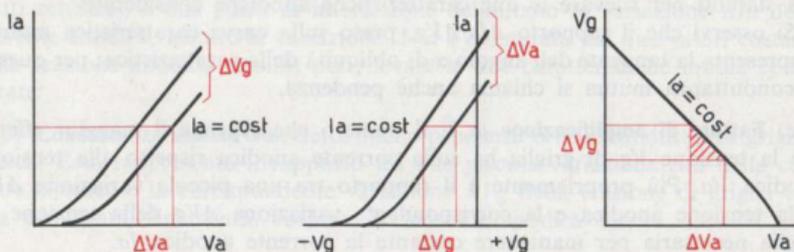


Fig. 12.16 - Determinazione del fattore di amplificazione di un triodo.

Prese due caratteristiche anodiche corrispondenti a due diversi valori della tensione di griglia, che delimitano la variazione  $\Delta V_g$ , si stabilisce un valore costante della corrente anodica  $I_a$  in modo che la parallela alle ascisse passante

per lo stesso valore  $I_a$  intersechi le due caratteristiche nei tratti rettilinei. I due punti di intersezione delimitano la variazione  $\Delta V_a$  della tensione anodica.

Prese invece due caratteristiche mutue corrispondenti a due diversi valori della tensione anodica, che delimitano la variazione  $\Delta V_a$ , si fissa un valore costante  $I_a$  della corrente anodica in modo che la parallela alle ascisse passante per lo stesso valore  $I_a$  intersechi le due caratteristiche nei tratti rettilinei. I due punti di intersezione delimitano la variazione  $\Delta V_g$  della tensione di griglia.

Stabilita una variazione  $\Delta V_a$  della tensione anodica sul tratto rettilineo della caratteristica a corrente costante, si rileva sulle ordinate la corrispondente variazione  $\Delta V_g$  della tensione di griglia.

I tre coefficienti  $R_d$ ,  $G_m$  e  $\mu$  sono interdipendenti perché legati alle caratteristiche geometriche e costruttive del tubo e sono legati dalla relazione, detta di Barkhausen,

$$\mu = R_d \cdot G_m . \quad (12.14)$$

Infatti, sostituendo al posto di  $R_d$  e di  $G_m$  rispettivamente la (12.11) e la (12.12), si ottiene ancora:

$$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} \cdot \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} .$$

I tre parametri hanno sempre valore approssimato a meno che le variazioni delle tensioni siano piccolissime o che i tratti di caratteristica sui quali vengono considerate le variazioni stesse siano lineari.

#### Esempi numerici

1. Un triodo avente la resistenza anodica  $R_d$  di 10.000 ohm e la pendenza  $G_m$  di 2,5 mA/V è alimentato con una tensione anodica di 250 V. Variando la polarizzazione di griglia da -2 a -4 V, quale variazione subisce la corrente anodica? Con la nuova polarizzazione di griglia, quale tensione si deve applicare all'anodo per riportare la corrente al valore primitivo?

Determinare inoltre la tensione di interdizione corrispondente ai due valori della tensione anodica.

#### Soluzione

Aumentando il potenziale di griglia da -2 a -4 V, la corrente si riduce della seguente intensità:

$$\Delta I_a = G_m \cdot \Delta V_g = 2,5 \cdot 10^{-3} \cdot (4 - 2) = 5 \text{ mA} .$$

Per riportare la corrente al valore primitivo, fermo restando il valore della tensione di griglia di -4 V, occorre aumentare la tensione anodica.

$$\Delta V_a = R_d \cdot \Delta I_a = 10.000 \cdot 5 \cdot 10^{-3} = 50 \text{ V} .$$

Quindi la nuova tensione anodica  $V_{a_1}$  è data da:

$$V_{a_1} = V_a + \Delta V_a = 250 + 50 = 300 \text{ V} .$$

Le tensioni di interdizione corrispondenti alle due tensioni anodiche, vengono calcolate con le espressioni:

$$V_g = -\frac{V_a}{\mu} = -\frac{V_a}{R_d \cdot G_m} = -\frac{250}{10.000 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} = -10 \text{ V},$$

$$V_{g1} = -\frac{V_{a1}}{\mu} = -\frac{V_{a1}}{R_d \cdot G_m} = -\frac{300}{10.000 \cdot 2,5 \cdot 10^{-3}} = -12 \text{ V}.$$

2. In un triodo quando la tensione di griglia  $V_g$  è di  $-4 \text{ V}$ , variando la tensione anodica  $V_a$  da 200 a 250 V, la corrente anodica  $I_a$  varia da 32 a 50 mA. Quando la tensione di griglia è di  $-8 \text{ V}$  e la tensione anodica di 250 V, la corrente anodica è di 26 mA.

Calcolare i parametri  $R_d$ ,  $G_m$  e  $\mu$ .

*Soluzione*

Calcolo della resistenza differenziale  $R_d$ :

$$R_d = \frac{\Delta V_a}{\Delta I_a} = \frac{250 - 200}{(50 - 32) \cdot 10^{-3}} \cong 2.800 \text{ ohm}.$$

Considerando che tenendo costante la tensione anodica su 250 V e variando la  $V_g$  da  $-4$  a  $-8 \text{ V}$ , la corrente varia da 50 a 26 mA si ha:

$$G_m = \frac{\Delta I_a}{\Delta V_g} = \frac{(50 - 26) \cdot 10^{-3}}{8 - 4} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ siemens}.$$

Il coefficiente di amplificazione  $\mu$  è allora:

$$\mu = R_d \cdot G_m = 2.800 \cdot 6 \cdot 10^{-3} = 16,8.$$

Oppure, considerando che la corrente anodica di 50 mA, con  $V_g$  uguale a  $-8 \text{ V}$ , si ha quando la tensione anodica aumenta di:

$$\Delta V_a = R_d \cdot \Delta I_a = 2.800 \cdot (50 - 26) \cdot 10^{-3} = 67,2 \text{ V},$$

si ottiene:

$$\mu = \frac{\Delta V_a}{\Delta V_g} = \frac{67,2}{4} = 16,8.$$

I parametri trovati sono validi supponendo che la variazione della tensione di griglia  $\Delta V_g$  corrisponda al tratto lineare della caratteristica mutua.

## 12.5. IL TETRODO AD ALTO VUOTO

In un triodo ad alto vuoto la corrente e la tensione agenti nel circuito di placca non dovrebbero avere alcun effetto sul potenziale di griglia.

È evidente invece che il campo elettrostatico creato dalla tensione anodica, che si deve estendere fino al catodo, induce una tensione sulla griglia, per cui

ad ogni variazione della tensione anodica corrisponde una variazione della tensione di griglia e ad ogni variazione della tensione di griglia corrisponde una variazione della tensione di placca.

Consideriamo il caso di un triodo con la placca collegata al morsetto positivo della batteria anodica di f.e.m.  $E_a$  e di resistenza interna  $R_o$ , attraverso una resistenza di carico  $R_c$  (fig. 12.17).

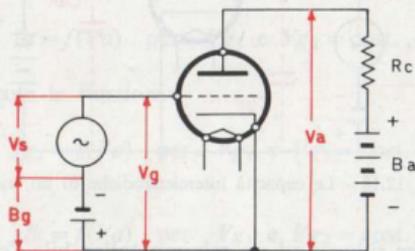


Fig. 12.17 - Segnale applicato alla griglia di un triodo.

Se tra griglia e catodo viene applicato un segnale, ossia una tensione variabile  $V_s$  in serie alla batteria di griglia  $B_g$ , la corrente anodica, fermo restando il valore della tensione anodica, dovrebbe variare solo in funzione delle variazioni del potenziale di griglia. Senonché, ad ogni variazione della corrente anodica  $I_a$ , per effetto del segnale, varia anche la tensione anodica  $V_a$ , dovendo essere:

$$V_a = E_a - I_a(R_o + R_c).$$

Perciò, quando il potenziale di griglia diventa, per esempio, meno negativo, la corrente anodica aumenta e il potenziale di placca diminuisce e di conseguenza diminuisce anche l'induzione elettrostatica sulla griglia. Questa diventa allora più negativa: la corrente anodica diminuisce e aumenta la tensione anodica.

Queste oscillazioni dei potenziali anodici e di griglia dovute all'induzione elettrostatica possono produrre, in particolari condizioni di funzionamento del triodo, uno scambio di energia, attraverso la capacità anodo-griglia, che può dar luogo all'innesco di oscillazioni tra il circuito anodico e il circuito di griglia. Infatti la capacità interelettrodica  $C_{ag}$  tra anodo e griglia (fig. 12.18) stabilisce un collegamento tra il circuito anodico e il circuito di griglia attraverso il quale parte dell'energia del primo potrebbe ritornare sulla griglia.

Pur non potendo, per il momento, approfondire gli effetti reali dello scambio di energia anodo-griglia e di altri fenomeni dannosi dovuti alla presenza nel tubo delle capacità interelettrodiche, osserviamo che se la frequenza del

segnale applicato in griglia è relativamente bassa, tali effetti sono trascurabili, ma se la frequenza del segnale è elevata, tali effetti sono così rilevanti da non poterli tollerare.

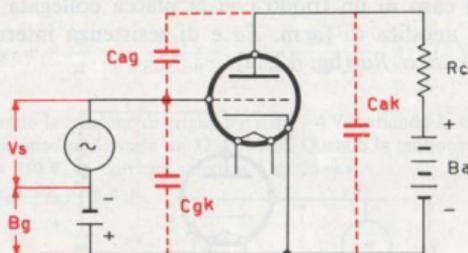


Fig. 12.18 - Le capacità interelettrode di un triodo.

Per eliminare o per ridurre ad un minimo tollerabile l'effetto dell'induzione elettrostatica della placca sulla griglia controllo, si introduce tra questi due elettrodi una seconda griglia, detta *griglia schermo*, posta molto vicino alla placca. Il tubo avendo ora quattro elettrodi prende il nome di *tetrodo*.

Se alla griglia schermo si applica un potenziale positivo assai prossimo a quello medio della placca, si determinano due campi elettrici indipendenti tra loro: uno tra la placca e la griglia schermo, l'altro tra la griglia schermo e la griglia controllo.

La funzione quindi della griglia schermo è di isolare elettrostaticamente la placca dalla griglia controllo.

In tal modo la corrente anodica non risente più delle variazioni della tensione di placca, in quanto il campo acceleratore degli elettroni non è più determinato dal potenziale anodico, ma dal potenziale della griglia schermo.

Mentre nel triodo la placca aveva la duplice funzione di elettrodo acceleratore e collettore di elettroni, nel tetrodo ha solo la funzione di elettrodo collettore. Tuttavia la griglia schermo, trovandosi a potenziale positivo, attira una parte di elettroni che viene sottratta al flusso elettronico principale.

Per ridurre al minimo *la corrente di griglia schermo*, che rappresenta una dispersione ai fini della corrente anodica, la griglia schermo è costruita con fili molto sottili a maglie piuttosto larghe.

In definitiva, per quanto riguarda la corrente uscente dal catodo o corrente spaziale  $I_k$ , la griglia schermo funziona da anodo, per cui il catodo, la griglia controllo e la griglia schermo costituiscono una specie di triodo. La placca, elettrostaticamente isolata, non può avere alcun effetto sulla corrente spaziale, se l'azione di schermo è perfetta.

Infatti si può osservare che la corrente spaziale  $I_k$  e cioè la somma della corrente anodica  $I_a$  e della corrente di griglia schermo  $I_{g_2}$  è pressoché costante

per qualsiasi valore della tensione di placca. La corrente anodica  $I_a$  e la corrente di griglia schermo  $I_{g_2}$ , prese separatamente, si mantengono invece abbastanza costanti solo per valori della tensione di placca  $V_a$  maggiori dei valori della tensione di griglia schermo  $V_{g_2}$ , mentre per tensioni anodiche  $V_a$  minori delle tensioni di griglia  $V_{g_2}$ , esse variano sensibilmente a causa del fenomeno della emissione secondaria da parte della placca.

Consideriamo infatti la caratteristica statica anodica del tetrodo:

$$I_a = f(V_a) \quad \text{per } V_{g_1} \text{ e } V_{g_2} = \text{cost.},$$

e contemporaneamente le funzioni:

$$I_{g_2} = f(V_a) \quad \text{per } V_{g_1} \text{ e } V_{g_2} = \text{cost.}$$

e

$$I_k = f(V_a) \quad \text{per } V_{g_1} \text{ e } V_{g_2} = \text{cost.}$$

Realizzato lo schema di polarizzazione diretta e di misura rappresentato in figura 12.19, si stabilisce, mediante il potenziometro  $R_{g_2}$  la tensione  $V_{g_2}$  della griglia schermo sul valore indicato dalle Case Costruttrici in base al tipo di tetrodo impiegato.

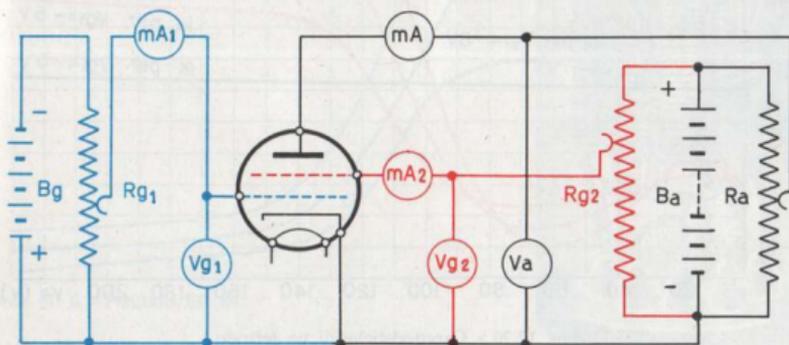


Fig. 12.19 - Schema di polarizzazione e di misura di un tetrodo.

Mediante il potenziometro  $R_{g_1}$  si fissa un valore della tensione di griglia controllo scelto entro il campo di variabilità (normalmente negativo) proprio del tubo in questione.

Variando ora gradatamente la tensione anodica  $V_a$  da zero al massimo di sicurezza mediante il potenziometro  $R_a$ , si rilevano, per ogni valore di  $V_a$ , i

valori contemporaneamente della corrente anodica  $I_a$  e della corrente di griglia  $I_{g_2}$ .

Riportando sulle ascisse di un sistema di assi cartesiani i valori della tensione anodica  $V_a$  e sulle ordinate i corrispondenti valori della  $I_a$  e della  $I_{g_2}$  e della somma di entrambe, si ottengono le caratteristiche corrispondenti alle funzioni sopra riportate.

Ripetendo la prova per diversi valori della tensione di griglia controllo  $V_{g_1}$  si ottiene una famiglia di caratteristiche anodiche, di griglia schermo e totale, i cui andamenti sono rappresentati in figura 12.20. L'andamento, apparentemente anomalo, delle curve è facilmente spiegabile.

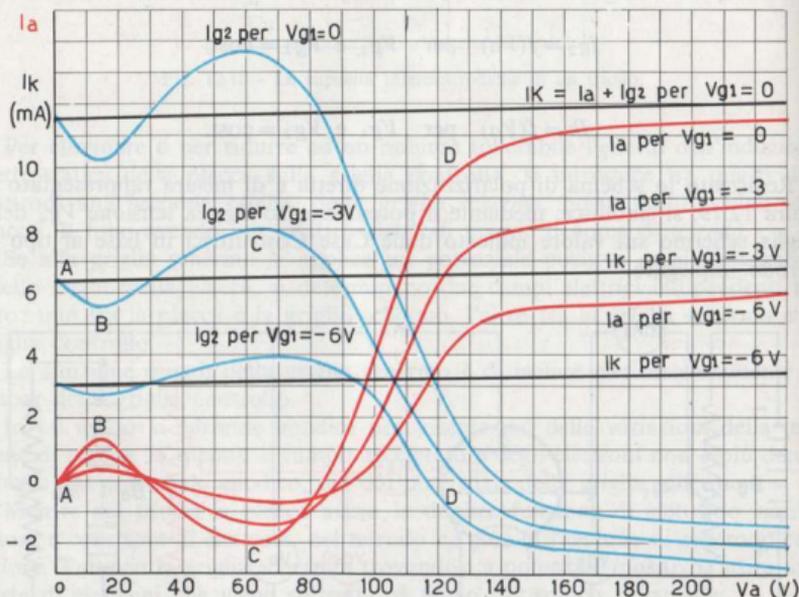
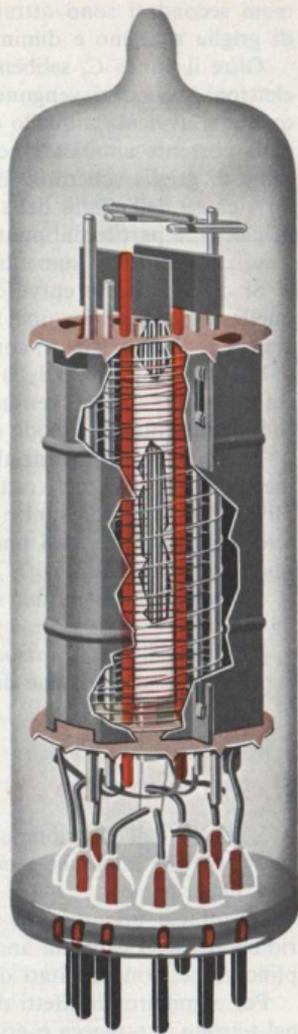


Fig. 12.20 - Caratteristiche di un tetrodo.

Al crescere della tensione anodica, a partire da zero, la placca sottrae alla griglia schermo un numero crescente di elettroni, cosicché la corrente anodica  $I_a$  aumenta, mentre la corrente di griglia  $I_{g_2}$  diminuisce della medesima quantità circa (tratto A-B). Quando la tensione anodica aumenta ulteriormente la velocità d'urto degli elettroni, già accelerati dalla griglia schermo, diventa sufficiente a produrre l'emissione secondaria da parte della placca, ma poiché il potenziale di griglia schermo permane più alto di quello della placca, gli elet-



Tabola N. 6 - Pentodo EL 84.

Catodo a riscaldamento indiretto. Viene impiegato negli stadi finali di bassa frequenza.

Tensione di accensione del filamento: 6,3 V.  
 Corrente di accensione del filamento: 0,76 A.  
 Tensione anodica: 250 V.  
 Corrente anodica: 48 mA.  
 Pendenza: 11,3 mA/V.  
 Resistenza anodica: 38 K $\Omega$ .

(Documento Philips).

troni secondari sono attratti verso lo schermo, aumentando così la corrente di griglia schermo e diminuendo la corrente anodica (tratto B-C).

Oltre il punto *C*, sebbene l'emissione secondaria continui ad aumentare, gli elettroni secondari vengono riattirati dalla placca, in quanto il potenziale di questa si avvicina a quello della griglia schermo. Si ha così un rapido aumento della corrente anodica e conseguentemente una rapida diminuzione della corrente di griglia schermo, fino a che la  $V_a$  eguaglia la  $V_{g_2}$  (tratto C-D).

A causa dell'effetto della schermatura, ogni ulteriore aumento della tensione di placca, a partire dal punto *D*, non ha più molta influenza sulla corrente anodica, che pertanto aumenta leggermente.

Si osservi che le curve caratteristiche anodiche del tetrodo, a differenza di quelle del triodo, partono tutte dall'origine degli assi, qualunque sia il potenziale  $V_{g_1}$  della griglia di controllo, in quanto il campo acceleratore determinato dal potenziale positivo della griglia schermo è costante, mentre la placca a potenziale zero respinge gli eventuali elettroni sfuggiti tra le maglie della griglia schermo.

I coefficienti del tetrodo si calcolano con le stesse formule date per il triodo.

La resistenza differenziale è però positiva nei tratti ascendenti della curva, mentre è negativa nel tratto discendente. In tal caso il tetrodo può dar luogo all'innescio di oscillazioni e comportarsi come un oscillatore. La resistenza differenziale in alcuni casi può raggiungere il valore di  $1 M\Omega$  ed è indice di una buona schermatura.

La conduttanza mutua si mantiene su valori pressoché uguali a quelli del triodo.

Il fattore di amplificazione è pure variabile al variare della tensione anodica e raggiunge valori anche di 600-800 unità, per elevate tensioni di placca.

## 12.6. IL PENTODO AD ALTO VUOTO

L'effetto dell'emissione secondaria nel tetrodo riduce i tratti rettilinei delle caratteristiche anodiche e perciò limita gli intervalli entro cui il tubo può lavorare linearmente.

I vantaggi ottenuti con l'introduzione della griglia schermo, ossia la forte riduzione della capacità anodo-griglia controllo e l'aumento del fattore di amplificazione, sono limitati dall'andamento sinuoso della curva caratteristica.

Per eliminare gli effetti dannosi dell'emissione secondaria è stata introdotta nel tetrodo, tra placca e griglia schermo, una terza griglia, detta *griglia di soppressione o griglia catodica* (fig. 12.21), di solito collegata direttamente al catodo o all'interno del tubo o mediante un collegamento esterno.

Il tubo, avendo ora cinque elettrodi, prende il nome di *pentodo*.

La griglia di soppressione, mantenuta a potenziale catodico e quindi a potenziale zero o negativo, decelera gli elettroni dell'emissione secondaria e li respinge

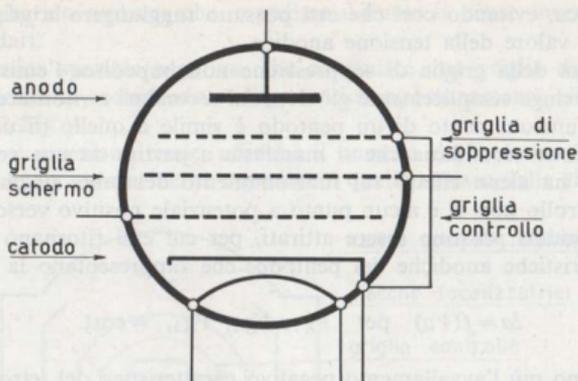


Fig. 12.21 - Il pentodo.

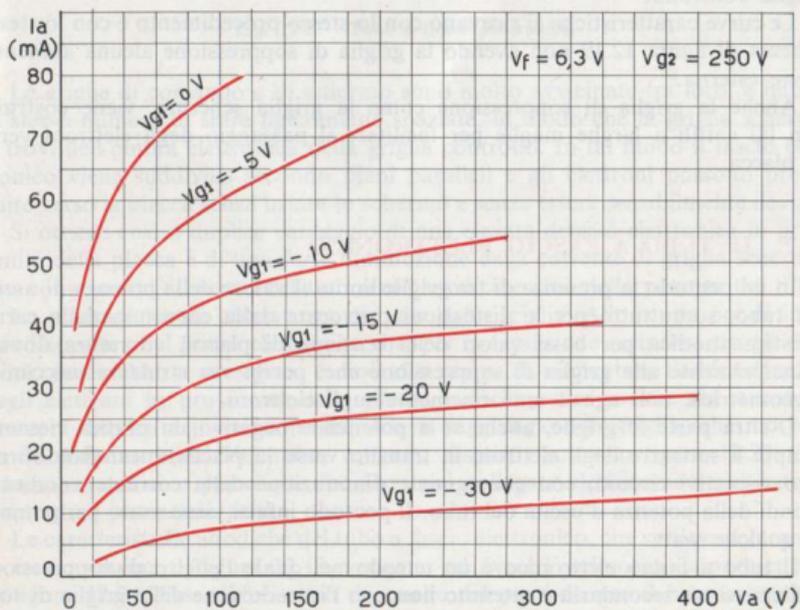


Fig. 12.22 - Caratteristiche anodiche del pentodo.

verso la placca, evitando così che essi possano raggiungere la griglia schermo per qualsiasi valore della tensione anodica.

La presenza della griglia di soppressione non impedisce l'emissione secondaria ma costringe semplicemente gli elettroni secondari a ritornare alla placca.

Perciò il funzionamento di un pentodo è simile a quello di un triodo nel quale l'emissione secondaria che si manifesta a partire da una certa tensione anodica, non ha alcun effetto sul funzionamento del tubo, poiché tra placca e griglia controllo non vi è alcun punto a potenziale positivo verso il quale gli elettroni secondari possono essere attirati, per cui essi ritornano alla placca.

Le caratteristiche anodiche del pentodo, che rappresentano la funzione:

$$I_a = f(V_a) \quad \text{per} \quad V_{g_1}, V_{g_2}, V_{g_3}, = \text{cost.},$$

non presentano più l'avvallamento negativo caratteristico del tetrodo, e perciò salgono rapidamente, per mantenersi poi approssimativamente orizzontali per un ampio intervallo di valori della tensione anodica.

La figura 12.22 rappresenta l'andamento di una famiglia di curve caratteristiche anodiche di un pentodo, ottenute per diversi valori della tensione di griglia controllo.

Le curve caratteristiche si ricavano con lo stesso procedimento e con lo stesso schema di figura 12.19 non avendo la griglia di soppressione alcuna alimentazione esterna.

Anche la griglia di soppressione come la griglia schermo, viene costruita con fili sottili a larghe maglie per facilitare il passaggio degli elettroni verso la placca.

## 12.7. IL TUBO A FASCIO ELETTRONICO

In un pentodo la presenza di tre griglie limita il valore della potenza di uscita del tubo, soprattutto per le distorsioni provocate dalla curvatura della caratteristica anodica per bassi valori della tensione di placca, curvatura dovuta principalmente alla griglia di soppressione che, per la sua struttura meccanica e geometrica, non agisce uniformemente sugli elettroni.

D'altra parte le griglie, anche se a potenziale negativo, in pratica riescono sempre a sottrarre degli elettroni in transito verso la placca, incanalandoli nei loro rispettivi circuiti, con conseguente diminuzione della corrente anodica e quindi della potenza d'uscita del tubo. Il pentodo infatti viene usato per potenze di qualche watt.

Il tubo a fascio elettronico è un tetrodo nel quale l'effetto di soppressione dell'emissione secondaria è ottenuto non con l'introduzione della griglia di soppressione, ma con un addensamento degli elettroni in transito nello spazio griglia schermo-placca, e cioè con la formazione di una carica spaziale negativa

tra griglia schermo e placca che impedisce il flusso in senso inverso degli elettroni secondari.

Questa carica spaziale negativa, che costituisce una griglia di soppressione virtuale, è ottenuta costruendo e disponendo opportunamente gli elettrodi del tubo (fig. 12.23).

Il catodo è a sezione ovale, affinché il numero degli elettroni emessi dalle facce maggiori sia enormemente superiore a quello emesso dalle altre due facce.

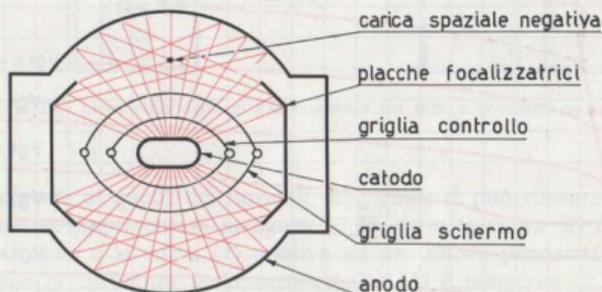


Fig. 12.23 - Tubo a fascio elettronico.

Le griglie di comando e di schermo sono molto avvicinate tra loro, e hanno lo stesso numero di spire ugualmente spaziate, in modo che la griglia schermo si trovi nell'ombra elettronica della griglia controllo. In tal modo il fascio elettronico viene suddiviso secondo piani paralleli e gli elettroni possono proseguire verso la placca senza urtare lo schermo e senza essere sensibilmente devianti.

Si ottiene così il duplice vantaggio di una elevata densità elettronica in prossimità della placca e di una forte diminuzione della corrente di griglia schermo, con conseguente aumento della corrente anodica e cioè della potenza del tubo.

La placca è tenuta abbastanza distante dalla griglia. Allo scopo poi di limitare l'apertura del fascio elettronico che, per la repulsione reciproca tra gli elettroni, tenderebbe a divergere, e cioè allo scopo di aumentare l'addensamento degli elettroni in prossimità della placca e di impedire inoltre che eventuali elettroni dispersi dell'emissione secondaria raggiungano la griglia schermo passando dalle estremità del tubo, vengono disposti, come in figura 12.23, due schermi metallici o placchette focalizzatrici collegate elettricamente al catodo e quindi a potenziale zero.

Le caratteristiche anodiche del tubo a fascio elettronico, che si rilevano usando lo stesso schema di figura 12.19, vengono ad avere l'andamento rappresentato in figura 12.24. Esse differiscono da quelle del pentodo per il brusco cambiamento di pendenza in corrispondenza della curvatura che unisce i tratti rettilinei, che risultano pertanto più estesi, e per la maggior pendenza del tratto

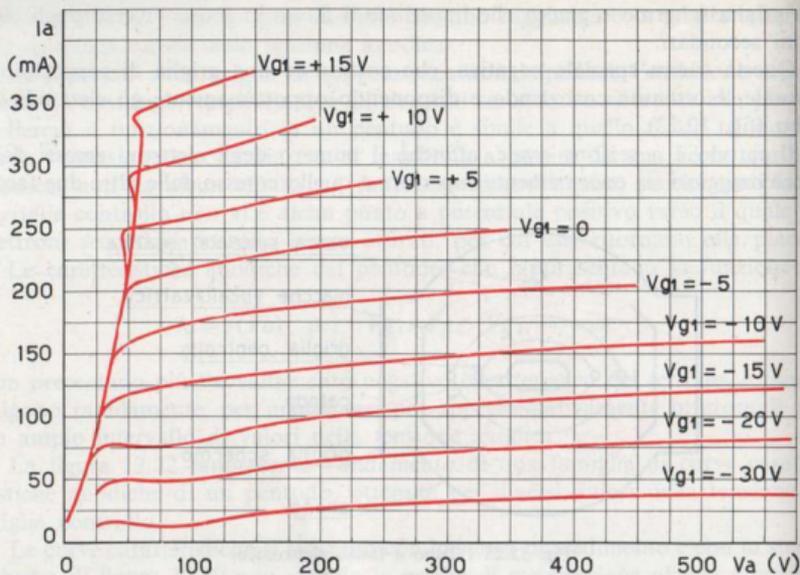


Fig. 12.24 - Caratteristiche anodiche del tubo a fascio elettronico.

iniziale rispetto a quella della caratteristica di un corrispondente pentodo. Ciò comporta un aumento dell'ampiezza di variazione della corrente e della tensione anodica, a parità di variazione di tensione di griglia e quindi una maggiore potenza di uscita di quanto non consenta un pentodo.

## 12.8. I TUBI A PENDENZA VARIABILE

I tubi a pendenza variabile, detti anche tubi ad alto taglio, sono pentodi oppure tetrodi, i cui coefficienti  $R_d$ ,  $G_m$  e  $\mu$  possono variare gradatamente al variare della polarizzazione della griglia controllo.

Sono tubi normali nei quali però la griglia controllo è costituita da una spirale a diametro costante e a passo variabile (fitta alle estremità e rada al centro) come in figura 12.25-a, oppure a passo costante e a diametro variabile (maggiore al centro e minore alle estremità) come in figura 12.25-b.

Una tale costruzione permette alla griglia di arrestare gli elettroni in corrispondenza delle estremità quando questa è portata ad un certo potenziale negativo, mentre permette ancora alla corrente di fluire attraverso la parte centrale. Ne deriva che il tubo giunge all'interdizione per tensioni negative di griglia

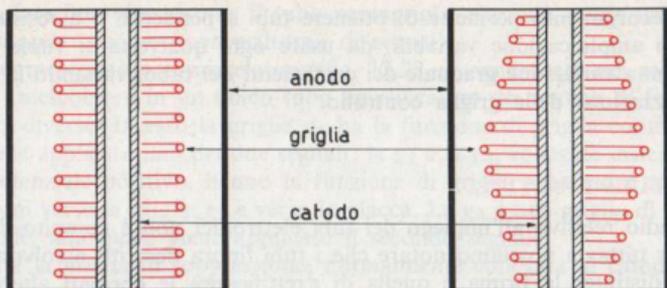


Fig. 12.25 - Geometria della griglia controllo nei tubi a pendenza variabile.

molto più elevate di quelle dei normali tubi, come si può rilevare dalle caratteristiche mutue rappresentate in figura 12.26, dove la curva (2) è relativa ad un tubo ordinario e la curva (1) relativa ad un tubo a pendenza variabile.

Si noti che la curvatura della caratteristica (1) è maggiore di quella della caratteristica (2), per cui nel primo caso la variazione dei coefficienti del tubo è molto più graduale al variare della polarizzazione della griglia controllo.

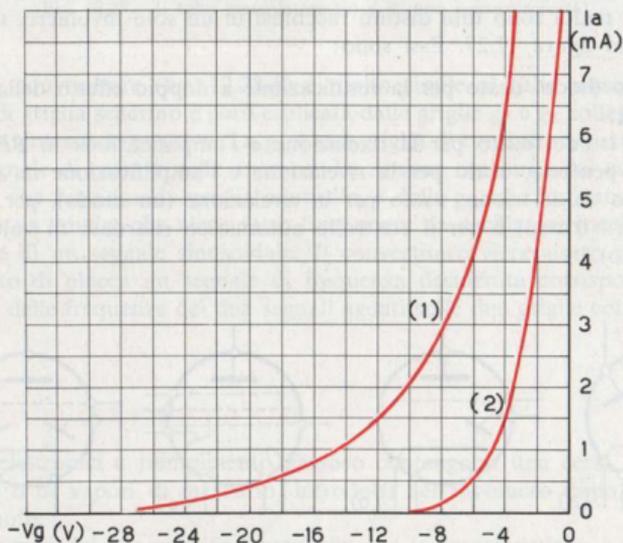


Fig. 12.26 - Caratteristica mutua del tubo a pendenza variabile (1) e normale (2).

Questo accorgimento permette di ottenere tubi a pendenza o a resistenza o a fattore di amplificazione variabili, da usare ogni qualvolta si vuole appunto ottenere una variazione graduale dei coefficienti del tubo, variando la tensione di polarizzazione della griglia controllo.

## 12.9. I TUBI MULTIPLI

Lo studio relativo all'impiego dei tubi elettronici non è compito di questo testo, pur tuttavia possiamo notare che i tubi finora descritti assolvono a due funzioni distinte: la prima è quella di «rettificare» le correnti alternate per effetto della conduzione unidirezionale dei tubi, la seconda è quella di «amplificare» dei segnali e cioè di trasformare dei segnali di debole potenza introdotti nel circuito di griglia controllo, in segnali di maggiore potenza ricavati dal circuito di placca.

Il diodo assolve alla prima funzione, sebbene anche gli altri tubi in genere possono essere utilizzati come raddrizzatori.

Il triodo assolve alla seconda funzione, come pure il tetrodo, il pentodo, il tubo a fascio elettronico, che sono fondamentalmente dei triodi, che, per l'aggiunta di altre griglie, assumono caratteristiche più idonee a svolgere la loro funzione di amplificatori a radio frequenza.

Per ragioni di spazio e di costo esistono in commercio altri tubi, detti multipli, che in realtà sono tubi distinti racchiusi in un solo involucro, come rappresentato in figura 12.27. Essi sono:

- a) il doppio diodo, usato per la rettificazione a doppio effetto della corrente alternata;
- b) il diodo-triodo, usato per la rivelazione e l'amplificazione in *BF*;
- c) il diodo-pentodo, usato per la rivelazione e l'amplificazione in *AF*;
- d) il doppio diodo-triodo, usato per la rivelazione (un diodo), per l'amplificazione (il triodo) e per il controllo automatico ritardato di volume (l'altro diodo).

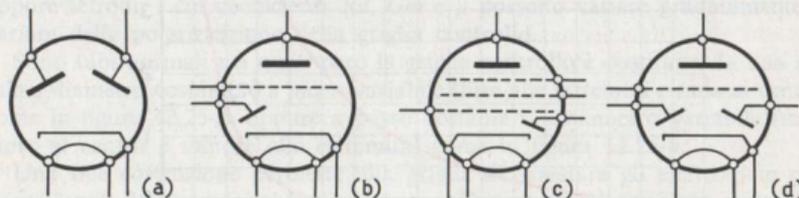


Fig. 12.27 - Tubi multipli: (a) doppio diodo, (b) diodo-triodo, (c) diodo-pentodo, (d) doppio diodo triodo.

Particolare interesse assume il tubo pentagridia che può essere usato come «mescolatore» o come «convertitore» di segnali.

Il tubo mescolatore o miscelatore (fig. 12.28-*a*) viene usato nei radioricevitori per «mescolare» in un unico tubo amplificatore dei segnali di forma e di frequenza diverse. In esso la griglia  $g_1$  ha la funzione di griglia controllo, alla quale viene applicato uno dei due segnali; la  $g_2$  e la  $g_4$ , collegate insieme e portate a potenziale positivo, hanno la funzione di griglia schermo e accelerano gli elettroni verso la griglia  $g_3$  e verso la placca. La  $g_3$  è una griglia di controllo addizionale, alla quale viene applicato il secondo segnale.

La  $g_5$  è la griglia di soppressione, normalmente collegata al catodo.

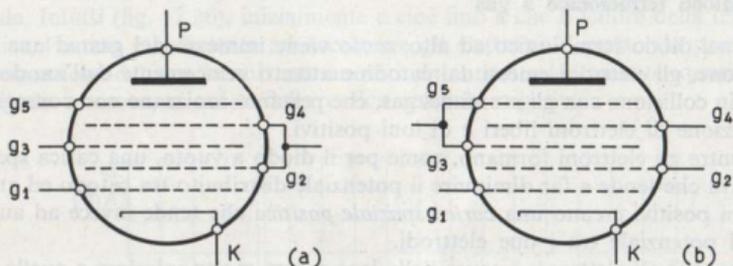


Fig. 12.28 - Il tubo mescolatore (*a*) e il tubo convertitore (*b*).

Il tubo convertitore (fig. 12.28-*b*) è molto simile al tubo mescolatore. La funzione di griglia schermo è però esplicitata dalle griglie  $g_3$  e  $g_5$  collegate insieme e portate a potenziale positivo. La  $g_4$  è una griglia di controllo a cui viene applicato il segnale di entrata delle antenne. La sezione costituita dal catodo, dalla griglia  $g_1$ , che funziona da griglia controllo, e dalla  $g_2$ , che funziona da anodo, costituisce un triodo, che viene fatto funzionare da oscillatore locale e cioè da generatore di un segnale sinusoidale. Il convertitore viene usato per ottenere nel circuito di placca un segnale di frequenza desiderata corrispondente alla differenza delle frequenze dei due segnali agenti sulle due griglie controllo (battimento).

## 12.10. I TUBI ELETTRICI A GAS

I tubi elettronici a riempimento gassoso contengono una certa quantità di gas inerte o di vapori di mercurio, introdotti nell'involucro dopo aver praticato il vuoto.

La presenza del gas modifica notevolmente le caratteristiche e i valori dei coefficienti del tubo elettronico.

I tubi a riempimento gassoso vengono suddivisi in quattro categorie a seconda del catodo impiegato. Si hanno così i tubi a gas:

- a) a catodo termoionico;
- b) a catodo freddo;
- c) a catodo fotoelettrico;
- d) a catodo liquido (pozzetto di mercurio).

Descriviamo brevemente solo il diodo e il triodo a gas con catodo termoionico.

### 1) Il diodo termoionico a gas

Se nel diodo termoionico ad alto vuoto viene immesso del gas ad una certa pressione, gli elettroni emessi dal catodo e attratti velocemente dall'anodo vengono in collisione con gli atomi del gas, che pertanto ionizzano con conseguente produzione di elettroni liberi e di ioni positivi.

Mentre gli elettroni formano, come per il diodo a vuoto, una carica spaziale negativa che tende a far diminuire il potenziale distribuito tra catodo ed anodo, gli ioni positivi creano una *carica spaziale positiva* che tende invece ad aumentare il potenziale tra i due elettrodi.

Senonché gli elettroni, a causa della loro massa molto inferiore a quella degli ioni, sottoposti al campo elettrico agente nel tubo, si muovono verso l'anodo con una velocità molto maggiore di quella degli ioni positivi, che si spostano verso il catodo.

Gli elettroni rimangono cioè nello spazio interelettrodico un tempo molto più breve di quello degli ioni positivi, per cui l'influenza di questi ultimi sulla distribuzione del potenziale è più sentita di quanto non lo sia quella degli elettroni.

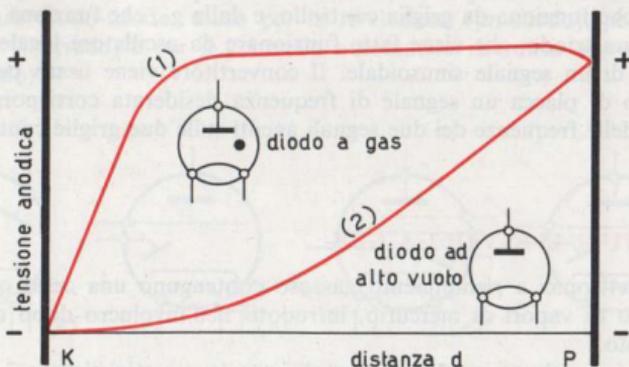


Fig. 12.29 - Distribuzione del potenziale in un diodo a gas (1) e in un diodo a vuoto spinto (2).

La presenza del gas nel tubo termoionico determina in definitiva una carica spaziale positiva molto rilevante nelle vicinanze del catodo, per cui la distribuzione del potenziale tra anodo e catodo segue l'andamento della curva (1) della figura 12.29, dove è pure rappresentata, per raffronto, la curva (2) relativa alla distribuzione del potenziale in un diodo ad alto vuoto.

Il potenziale cresce rapidamente nelle immediate vicinanze del catodo a causa della forte carica spaziale positiva e rimane quasi costante nel successivo spazio verso l'anodo a causa della quasi uniforme distribuzione di ioni positivi e di elettroni, determinanti una carica spaziale quasi nulla.

La caratteristica anodica del diodo a gas assume di conseguenza un andamento molto diverso da quello di un diodo ad alto vuoto, se si esclude il tratto iniziale. Infatti (fig. 12.30), inizialmente e cioè fino a che il valore della tensione anodica  $V_a$  non è sufficiente ad accelerare gli elettroni al punto da provocare la ionizzazione del gas, la corrente anodica  $I_a$  aumenta lentamente, quasi come nel diodo a vuoto, a causa della carica spaziale negativa.

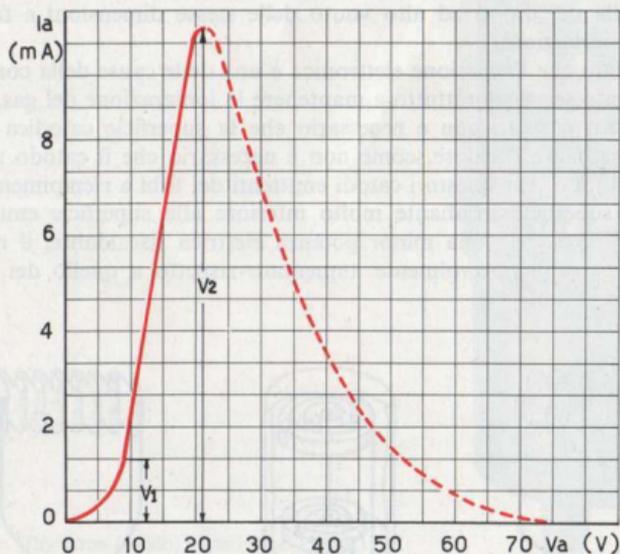


Fig. 12.30 - Caratteristica anodica di un diodo a gas.

Ma non appena la tensione raggiunge un certo valore, di solito compreso tra 10-20 V, detta *tensione critica* ( $V_1$ , in fig.), inizia la ionizzazione del gas, con conseguente *processo a valanga* in quanto gli elettroni liberi concorrono

con quelli emessi ad aumentare la ionizzazione e questa a produrre altri elettroni liberi ed altri ioni positivi.

La corrente anodica che inizialmente era formata dai soli elettroni di emissione catodica, è ora costituita anche dagli elettroni liberi del gas diretti verso l'anodo e dagli ioni positivi diretti verso il catodo, per cui essa subisce un brusco aumento e cresce quasi indipendentemente dalla tensione anodica.

Nell'interno del tubo la resistenza diviene quasi nulla per cui la corrente anodica deve essere limitata mediante una resistenza posta nel circuito anodico.

Gli ioni positivi non devono però venire accelerati oltre un determinato limite, perché, a causa della loro notevole massa, disintegrerebbero il catodo verso il quale sono diretti. Per questo la tensione anodica non deve superare un determinato valore detto *tensione di disintegrazione* ( $V_2$  in fig.), superato il quale la corrente tende a diminuire a causa della progressiva diminuzione della superficie catodica emittente.

Da quanto esposto si deduce che in un tubo a riempimento gassoso la caduta di tensione interna, e di conseguenza la potenza perduta, è notevolmente inferiore a quella del diodo ad alto vuoto delle stesse dimensioni e funzionante nelle stesse condizioni.

Inoltre, dato che l'emissione elettronica è una delle cause della corrente anodica, in quanto serve soprattutto a mantenere la ionizzazione del gas, nel diodo a riempimento gassoso non è necessario che la superficie catodica eguagli la superficie irradiante il calore, come non è necessario che il catodo sia esposto e vicino all'anodo. Per questo i catodi emittenti dei tubi a riempimento gassoso hanno una superficie irradiante molto inferiore alla superficie emittente, per cui, essendo necessaria una minor potenza elettrica riscaldante, il rendimento di emissione risulta notevolmente aumentato rispetto a quello dei catodi dei tubi a vuoto.

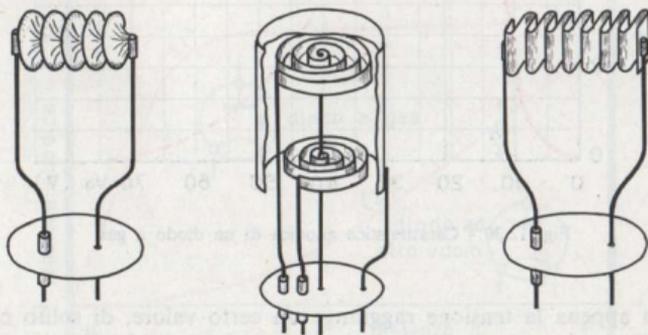


Fig. 12.31 - Tipi di catodi per tubi a gas.

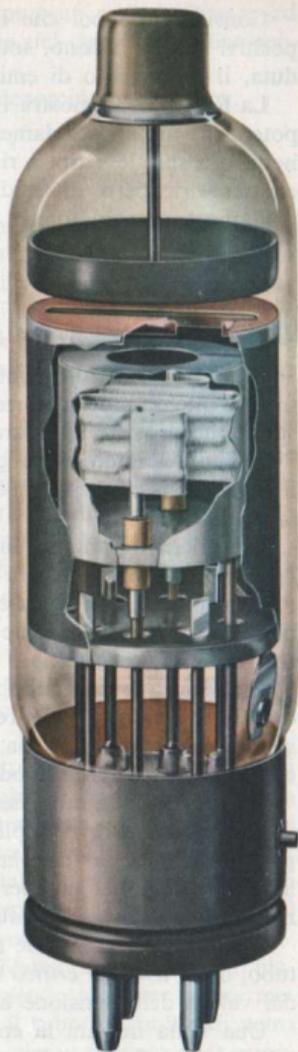


Tavola N. 7 - Thyatron (triodo) a gas inerte. PL 6011.

Tensione di accensione del filamento: 2,5 V.

Corrente di accensione del filamento: 9 A.

Tensione di arco: 10 V.

Tensione di bloccaggio: 1250 V.

Corrente anodica: 2,5 A.

(Documento Philips).

Considerando poi che il catodo è soggetto al bombardamento degli ioni positivi che gli cedono, sotto forma di calore, l'energia cinetica da essi posseduta, il rendimento di emissione del tubo risulta ulteriormente migliorato.

La figura 12.31 mostra i tipi più comuni di catodi per tubi a gas di piccola potenza: i tipi a riscaldamento diretto sono costituiti da nastri piegati ad organetto o a spirale, i tipi a riscaldamento indiretto sono costituiti da un cilindro emittente ricoperto di ossidi nella parte interna, mentre lungo l'asse è disposto il filamento riscaldatore.

## 2) Il triodo termoionico a gas

In un triodo ad alto vuoto, il potenziale applicato alla griglia controllo determina l'intensità della corrente anodica, secondo l'andamento delle caratteristiche mutue viste in figura 12.11.

Nei tubi termoionici a gas il potenziale applicato alla griglia non controlla il valore della corrente anodica, ma determina solo l'istante in cui il tubo inizia la conduzione.

Consideriamo ancora un diodo a riempimento gassoso. Quando la tensione applicata all'anodo supera il valore della tensione critica, il gas presente nel tubo si ionizza, per cui la corrente anodica aumenta rapidamente fino ad assumere un valore dipendente dalla tensione anodica e dalla resistenza complessiva del circuito esterno.

Introducendo tra catodo ed anodo una griglia a potenziale negativo sufficientemente alto, gli elettroni emessi dal catodo vengono respinti e non possono attraversare la griglia, per cui non si avrà né ionizzazione del gas, né circolazione di corrente anodica.

Riduciamo ora progressivamente il potenziale negativo di griglia. Quando il potenziale positivo applicato all'anodo prevarrà sul potenziale negativo di griglia, comincerà a circolare un certo valore di corrente anodica che produrrà la ionizzazione del gas, per cui la stessa corrente anodica assumerà istantaneamente il valore determinato dalle condizioni di carico.

Il valore della tensione negativa di griglia che determina la conduzione del tubo, detta *tensione critica di griglia*, dipende dal tipo e dalla pressione del gas, dal valore della tensione anodica e dalla temperatura del catodo.

Una volta iniziata la conduzione del tubo, il potenziale di griglia non ha più alcuna influenza sul valore della corrente anodica anche se viene riportato agli stessi elevati valori di prima: il triodo funziona ora come un diodo.

Infatti gli ioni positivi formati in seguito al processo di ionizzazione, dirigendosi verso il catodo e cioè in direzione opposta a quella degli elettroni, neutralizzano, con la loro carica spaziale positiva, il campo elettrico negativo prodotto dalla tensione negativa applicata alla griglia.

Il triodo a riempimento gassoso funziona cioè come un relè elettronico ad alta velocità capace di controllare una forte potenza del circuito anodico mediante un piccolo segnale applicato alla griglia.

Un triodo a gas impiegato a tale scopo viene denominato *thyatron*.

## 12.11. AFFINATORE DI VUOTO O GETTER

In tutti i tubi deve essere praticato il vuoto spinto: nei tubi ad alto vuoto la presenza di eccessivo gas residuo comporta un irregolare funzionamento dovuto alla ionizzazione del gas stesso sotto gli urti degli elettroni emessi, per cui verrebbero modificate le caratteristiche proprie di tale categoria di tubi; nei tubi che devono contenere gas occorre prima fare un alto vuoto per poi immettere solo il gas desiderato, dato che la presenza di ossigeno e di vapor d'acqua è particolarmente dannosa.

Il vuoto viene praticato con pompe pneumatiche, ma poiché le parti metalliche e di vetro sono capaci di assorbire una grande quantità di gas, anche le più perfezionate pompe sono insufficienti ad estrarre il gas occluso nelle parti solide, a meno che queste non vengano fortemente riscaldate. Per questo i tubi devono essere mantenuti ad elevate temperature durante lo svuotamento.

Il riscaldamento dei tubi ad involucro di vetro viene ottenuto normalmente provocando intense correnti parassite nella struttura metallica, sottoponendo i tubi ad un campo magnetico di elevata frequenza. I tubi ad involucro metallico vengono invece scaldati mediante una fiamma a gas.

Evidentemente anche con i sistemi e con i mezzi più perfetti non è possibile ottenere il vuoto assoluto, per cui nel tubo rimangono sempre molti atomi di gas.

Per ottenere il vuoto più elevato possibile, nei tubi ricevanti, si ricorre ai cosiddetti *affinatori di vuoto o getters* e cioè a particolari sostanze che hanno la proprietà di rimuovere e di assorbire il gas residuo e i gas che si sprigionano successivamente nell'interno del tubo durante il suo normale funzionamento.

Uno dei getters più soddisfacente è costituito dallo stesso materiale della superficie emittente e precisamente dal bario. Largamente usati sono pure il tantalio, lo zirconio, il fosforo, il magnesio e numerosi miscugli.

I getters vengono depositati entro il tubo o sotto forma di crogiuoli o di filamenti. Nel primo caso vengono fatti evaporare fornendo al getter calore mediante un appropriato campo a radio frequenza se il tubo è a bulbo di vetro o mediante passaggio di corrente attraverso il getter, che in tal caso deve essere collegato attraverso i piedini dello zoccolo, se il tubo è a bulbo metallico.

Nel secondo caso vengono mantenuti ad una determinata temperatura mediante passaggio continuo di corrente e vengono connessi con il filamento.

I getters, portati ad alte temperature, acquistano la proprietà di assorbire elevate quantità di gas.

I getters ad evaporazione si condensano sulle parti interne del tubo, e potrebbero depositarsi in punti delicati compromettendo il buon funzionamento del tubo, per cui devono essere disposti in modo che si depositino su una piccola parte dell'involucro dove non possono causare disturbi.

## Capitolo Tredicesimo

### Diodi a semiconduttori e transistori

I diodi a semiconduttori e i transistori sono conduttori *non lineari*, come lo sono i tubi termoionici.

Le proprietà rettificatrici della barriera di potenziale che si manifesta nei contatti e nelle giunzioni tra un metallo e un semiconduttore o tra due semiconduttori inquinati, l'uno di tipo  $p$  e l'altro di tipo  $n$ , descritte al paragrafo 2.5., hanno permesso di realizzare dei dispositivi elettronici che possono sostituire, in molti casi, i tubi elettronici, anche se tali dispositivi sono caratterizzati da un diverso principio di funzionamento. Nei tubi infatti il funzionamento è condizionato alla conduzione elettrica nel vuoto o nel gas, nei semiconduttori alla conduzione elettronica nei solidi.

Tuttavia gli apparecchi elettronici che applicano i dispositivi a semiconduttore non differiscono sostanzialmente, per quanto riguarda la realizzazione dei circuiti, da quelli costruiti con tubi elettronici. Ne deriva piuttosto il vantaggio di una minor richiesta di energia per l'alimentazione, di un ridottissimo ingombro e di una grande robustezza.

Il diodo termoionico ad alto vuoto può essere così costituito da un diodo a semiconduttore, il triodo da un transistore, il thyatron da un diodo Zener.

#### 13.1. GENERALITÀ SUI DIODI A SEMICONDUTTORE

Si hanno diversi tipi di diodi: diodi a giunzione, diodi a cristallo a punta di contatto e diodi a contatto metallo-semiconduttore, e tutti possiedono la stessa essenziale caratteristica di una elevata conduttività elettrica in un senso, detto *senso diretto*, e una bassa conduttività in senso opposto, detto *senso inverso*.

Richiamiamo le principali proprietà rettificatrici delle giunzioni e dei contatti già descritte al paragrafo 2.5.

In una giunzione  $p-n$ , per il fatto che la zona  $p$  contiene più lacune che elettroni mobili e che la zona  $n$  contiene più elettroni mobili che lacune, gli elet-

troni hanno tendenza a diffondersi, attraverso la giunzione, dalla zona  $n$  alla zona  $p$  e le lacune hanno tendenza a passare dalla zona  $p$  alla zona  $n$ .

Si formano perciò due correnti, una di elettroni in un senso e l'altra di lacune in senso opposto, dette *correnti di diffusione*.

Conseguentemente si forma da parte e parte della giunzione uno strato relativamente sottile dove le cariche libere di segno opposto, che si sono diffuse, si neutralizzano, lasciando in prossimità della superficie di contatto le cariche positive dei donatori nella zona  $n$  e le cariche negative degli accettori nella zona  $p$ , immobilizzate nel reticolo del cristallo.

Tra le due zone si viene quindi a formare uno strato di transizione, detto *strato di sbarramento*, e quindi una differenza di potenziale definita solitamente con il termine di *barriera di potenziale*.

In prossimità della giunzione viene dunque a formarsi un campo elettrico che tende a trasferire gli elettroni liberi della zona  $p$ , che si trovano nella sua influenza, verso la zona  $n$  e a trasferire le lacune della zona  $n$  nella zona  $p$ . Attraverso la giunzione, a causa della barriera di potenziale, si verificano perciò altre due correnti, dette *correnti di campo*, che hanno senso opposto a quelle di diffusione.

Il valore della barriera di potenziale, che aumenta con l'aumentare della corrente di diffusione, si stabilizza quando viene raggiunta la condizione di equilibrio corrispondente alla perfetta compensazione tra le correnti di diffusione e le correnti di campo e cioè quando la corrente risultante che attraversa la giunzione è uguale a zero.

È importante notare che le correnti di campo sono costanti, per una determinata temperatura del cristallo.

Se ora si applica al dispositivo una tensione in senso diretto, collegando la zona  $n$  al polo negativo e la zona  $p$  al polo positivo di una batteria di alimentazione, la barriera di potenziale si riduce e di conseguenza aumentano le correnti di diffusione, ossia la *corrente diretta*, la cui intensità cresce con l'aumentare della tensione applicata.

In tal caso la giunzione presenta minima resistenza, ossia elevata conducibilità.

Se si applica invece una tensione inversa, collegando la zona  $n$  al polo positivo e la zona  $p$  al polo negativo della batteria di alimentazione, la barriera di potenziale viene rafforzata per cui le cariche di diffusione vengono maggiormente allontanate dalla giunzione con conseguente aumento dello strato di sbarramento.

Attraverso la giunzione passano allora solamente le correnti di campo e cioè una corrente inversa, detta *corrente di dispersione*, che è però centinaia e migliaia di volte meno intensa della corrente diretta.

La giunzione in tal caso presenta una elevata resistenza, ossia una scarsa conducibilità.

L'effetto della conduttività unilaterale della barriera di potenziale e dello strato di sbarramento è però limitato da due fattori: la temperatura e la tensione inversa.

È noto che i semiconduttori hanno un coefficiente di dilatazione termica negativo, (aumentando la temperatura, aumenta il numero delle coppie elettroni-lacune) e perciò cresce la conduttività del semiconduttore. Nella giunzione cresce la corrente diretta, ma più sensibilmente cresce la corrente inversa, per cui scompare l'effetto rettificante. Per questo i dispositivi elettronici a semiconduttore non devono mai superare una determinata temperatura che dipende dal tipo di cristallo semiconduttore usato.

D'altra parte, pur rimanendo entro i limiti della temperatura ammessa, l'effetto della barriera di potenziale varia con il variare della temperatura, per cui dove, a causa della variazione della corrente diretta e quindi della temperatura, si vuole mantenere costante la conduttività della giunzione, si ricorre a speciali circuiti di stabilizzazione, come vedremo al paragrafo 13.7.

In tutti i modi però è necessario stabilire per ogni tipo di contatto la giusta densità di corrente diretta in relazione alla possibilità che lo stesso contatto ha di disperdere il calore.

Alcuni dispositivi sono muniti di alette di raffreddamento e di altri sistemi di dispersione del calore, allo scopo di poter aumentare la densità della corrente e quindi la potenza trasferibile attraverso il contatto o la giunzione.

Anche la tensione inversa che può essere applicata allo strato di sbarramento non deve superare un prestabilito valore che dipende dai componenti del contatto. Una tensione inversa superiore può causare delle scariche elettriche in più punti del contatto con conseguente distruzione o forte indebolimento dello strato di sbarramento e quindi della conduttività unilaterale del dispositivo elettronico.

Per i contatti metallo-semiconduttore valgono le considerazioni teoriche viste al paragrafo 2.5.c, che del resto sono molto simili a quelle relative alle giunzioni, ora esposte.

Descriviamo brevemente i diversi tipi di diodi.

### 1) Diodo a cristallo a punta di contatto (fig. 13.1)

Un elemento del diodo è costituito da una piastrina di germanio tipo  $n$  (1) saldata all'estremità di un elettrodo di rame stagnato (2). L'altro elemento è formato da un filo di tungsteno o di oro (3) (baffo di gatto), saldato con una estremità al secondo elettrodo (4), mentre con l'altra estremità appuntita viene pressato sulla piastrina di germanio.

Il tutto viene introdotto in un bulbo di vetro, saldato agli elettrodi (5), che costituisce l'involucro o contenitore del diodo.

Viene poi fatta passare una corrente alternata di determinata intensità, attraverso il diodo. La punta del filo di tungsteno viene così a saldarsi al cristallo di germanio formando una connessione elettrica a prova d'urto.

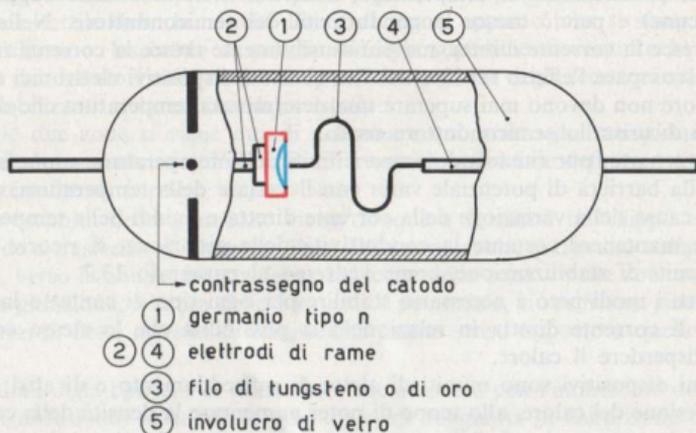


Fig. 13.1 - Sezione di un diodo al germanio a punta di contatto.

Nello stesso tempo alcuni atomi del filo di tungsteno si diffondono nel cristallo di germanio tipo *n* e costituiscono delle impurità che, insieme ai difetti della struttura del reticolo cristallino dovuti al riscaldamento, creano una zona *p* nel germanio. Si ottiene così una giunzione *p-n*. Il cristallo di germanio funziona da catodo e il baffo di gatto da anodo.

Il bulbo di vetro deve essere laccato con vernice opaca per proteggere il diodo dalle radiazioni luminose che possono provocare fenomeni indesiderabili.

La massima corrente diretta che il diodo a punta di contatto può tollerare è di 300 mA, corrispondente ad una temperatura di circa 60-65 °C, mentre la massima tensione inversa è di 60 volt.

Data la piccola area di contatto che costituisce la barriera di potenziale, i diodi a punta di contatto presentano una capacità assai piccola e cioè di  $1 \div 2 \text{ pF}$ . Per questo vengono utilizzati soprattutto nelle applicazioni a radio frequenza. Però non possono convogliare grandi flussi di corrente per cui non possono essere impiegati che per piccole potenze.

Per potenze maggiori i diodi a punta di contatto vengono sostituiti con i diodi a giunzione.

## 2) Diodi a giunzione

Sono di due tipi: diodi a lega e diodi a diffusione.

I diodi a lega vengono ottenuti riscaldando una pallina di alluminio su una piastrina di germanio di tipo  $n$  ad una temperatura intermedia tra quella di fusione del germanio e quella dell'alluminio.

Avvenuta la solidificazione, si osserva che nel germanio, in corrispondenza della pallina di alluminio, si è formata una zona  $p$ , essendo l'alluminio un elemento trivalente e quindi un accettore.

Si è formata cioè una giunzione  $p-n$  (fig. 13.2).

Il cristallo così ottenuto (1) è saldato su un elettrodo di rame (2), l'altro elettrodo, pure di rame (3), porta una molla di contatto (4) che poggia sulla pallina di alluminio.

Il tutto viene poi racchiuso in un bulbo di vetro, saldato agli elettrodi, che costituisce l'involucro (5).

I diodi a diffusione vengono invece ottenuti applicando al cristallo di silicio di tipo  $n$  uno strato di boro che è pure un materiale accettore. Mediante il riscaldamento il boro si diffonde nel silicio formando una zona di tipo  $n$ .

Si ottiene così una giunzione  $p-n$ .

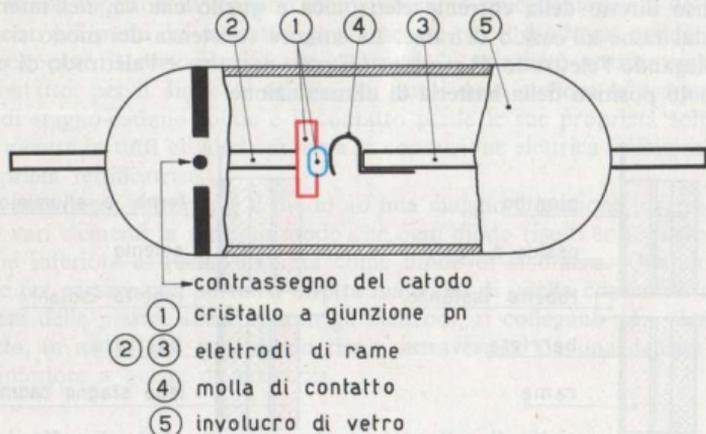


Fig. 13.2 - Sezione di un diodo al germanio a giunzione.

Il silicio è atto a sopportare correnti dirette molto più intense di quelle che possono attraversare una giunzione di germanio, perché può sopportare senza alcun inconveniente una temperatura anche maggiore di  $100^{\circ}\text{C}$ .

I diodi a giunzione presentano però una capacità tra gli elettrodi maggiore di quella del diodo a punta di contatto e perciò non si adattano meno bene

all'utilizzatore in alta frequenza. Tuttavia nei circuiti di media e grande potenza sono ancora preferibili ai diodi a punta di contatto anche per frequenze abbastanza elevate.

### 3) Diodi a contatto metallo-semiconduttore

I diodi a contatto metallo-semiconduttore, detti anche a *contatto esteso*, sono i comuni raddrizzatori ad ossido di rame ( $Cu_2O$ ) e al selenio, molto usati soprattutto per correnti a frequenza industriale, essendo inadatti per correnti a radio frequenza a causa della notevole capacità fra gli elettrodi.

Il raddrizzatore ad ossido di rame si ottiene ossidando all'aria in appositi forni elettrici la superficie di un disco di rame di elevata purezza ed assoggettandolo quindi ad opportuni bagni acidi.

Il disco di rame (metallo) costituisce uno degli elettrodi, il sottile strato di ossido di rame (semiconduttore), posto direttamente a contatto con un disco di piombo, fortemente pressato e depositato elettroliticamente, costituisce l'altro elettrodo (fig. 13.3-a).

Tra il rame metallico e l'ossido di rame si stabilisce la barriera di potenziale, che conferisce al diodo una conduzione diversa nei due sensi.

Il senso diretto della corrente elettronica è quello che va, nell'interno del diodo, dal rame all'ossido di rame. La minore resistenza del diodo si ottiene cioè collegando l'elettrodo di rame con il polo negativo e l'elettrodo di piombo con il polo positivo della batteria di alimentazione.

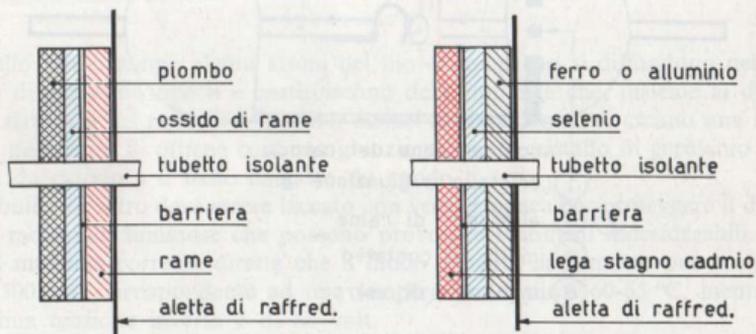


Fig. 13.3 - Sezione di un diodo ad ossido di rame (a) e al selenio (b).

Il diodo al selenio si ottiene depositando su un elettrodo di ferro nichelato o di alluminio a forma di disco uno strato di selenio fuso (semiconduttore) che, con opportuni trattamenti termici, viene portato allo stato cristallino. Sullo

strato di selenio viene spruzzata una speciale lega a basso punto di fusione, normalmente di stagno e cadmio (metallo), che costituisce l'altro elettrodo (fig. 13.3-b).

Fra lo strato di selenio e la lega stagno-cadmio si forma lo strato di sbarramento che ha una conduttività elevata dalla lega al selenio, per cui il senso diretto della corrente elettronica si ottiene collegando l'elettrodo di stagno-cadmio al polo negativo e l'elettrodo di ferro nichelato o di alluminio al polo positivo della batteria.

La massima temperatura di funzionamento consentita per i diodi ad ossido di rame è di 60 °C, mentre per i diodi al selenio è di 70 °C.

Per temperature superiori si ha la distruzione della barriera di potenziale per cui il diodo perde le sue proprietà rettificatrici.

Da qui la necessità di stabilire la giusta densità della corrente diretta: per i diodi ad ossido di rame è di circa 20 mA/cm<sup>2</sup>, mentre per i diodi al selenio è di 200 mA/cm<sup>2</sup>.

La corrente può comunque superare questi valori massimi, purché venga provveduto a disperdere il calore che essa produce.

Anche la tensione inversa che può essere applicata al contatto non deve superare un certo valore, che per questi due tipi di diodi è di 25 V.

Per valori superiori avvengono, come abbiamo precedentemente detto, delle scariche in più punti del contatto, però, mentre per il diodo ad ossido di rame esse provocano il cortocircuito che distrugge le proprietà rettificatrici dell'intero contatto, per il diodo al selenio nei punti dove avviene la scarica, l'elettrodo di stagno-cadmio fonde e il contatto perde le sue proprietà solo in tali punti, mentre in tutti gli altri conserva la conduzione elettrica unilaterale e cioè la proprietà rettificatrice.

Ove occorresse sottoporre il diodo ad una maggiore tensione inversa, si collegano vari elementi in serie, in modo che ogni diodo risulti sottoposto ad una tensione inferiore a quella stabilita come limite di sicurezza. Quando invece occorre far passare una corrente diretta maggiore di quella consentita dalle dimensioni delle piastre che formano gli elettrodi, si collegano vari elementi in parallelo, in modo che ogni diodo risulti attraversato da una densità di corrente inferiore a quella di sicurezza.

### **13.2. CARATTERISTICHE DEI DIODI A SEMICONDUTTORI**

In base alle considerazioni ora esposte appare chiaro che i diodi a semiconduttori hanno un comportamento analogo a quello dei diodi termoionici ad alto vuoto.

Come in questi ultimi una tensione diretta applicata ai due elettrodi, positiva alla placca e negativa al catodo, determina un flusso di elettroni diretto dal catodo all'anodo, così in un diodo a semiconduttori una tensione diretta

applicata con il positivo al semiconduttore di tipo *p* (anodo) e con il negativo al semiconduttore di tipo *n* o al metallo (catodo), determina una corrente elettronica diretta dal catodo all'anodo (fig. 13.4), oppure, secondo la convenzione, un flusso di cariche positive o di lacune dirette dall'anodo al catodo. Facciamo osservare che il simbolo grafico del diodo a semiconduttore indica il senso della corrente convenzionale e cioè il senso opposto a quello della corrente elettronica.

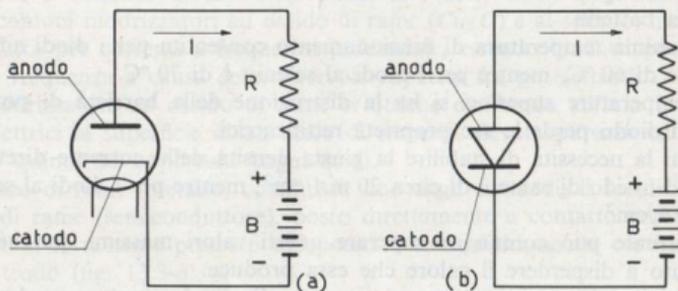


Fig. 13.4 - Tensione e corrente dirette di un diodo ad alto vuoto (a) e di un diodo a semiconduttore (b).

La differenza tra i due dispositivi elettronici sta nel comportamento con la tensione inversa. Quando in un diodo ad alto vuoto viene applicato il potenziale negativo all'anodo e il potenziale positivo al catodo, la corrente è nulla e il tubo si comporta da perfetto isolante; quando invece viene applicata una tensione inversa ad un diodo a semiconduttore, in questo fluisce una corrente inversa, centinaia di volte inferiore alla corrente diretta: il diodo si comporta da cattivo isolante.

Il comportamento ed il campo di applicabilità di un diodo a semiconduttore vengono determinati, come per i diodi ad alto vuoto, dalle curve caratteristiche che mettono in evidenza il modo con cui varia la corrente in funzione della tensione applicata.

Le curve caratteristiche di un diodo a semiconduttore esprimono le funzioni:

$$I = f(V) \quad \text{e} \quad -I = f(-V), \quad (13.1)$$

(dove  $I$  e  $-I$  sono rispettivamente la corrente diretta e la corrente inversa e  $V$  e  $-V$  le corrispondenti tensioni diretta ed inversa), e mettono in evidenza l'andamento della corrente diretta ed inversa al variare della tensione diretta e rispettivamente inversa, per una determinata temperatura.

Per rilevare le curve caratteristiche dirette si realizza lo schema di polarizzazione e di misura rappresentato in figura 13.5-a, mentre per rilevare le curve caratteristiche inverse occorre non solo invertire la polarità della batteria di

alimentazione, ma sostituire eventualmente il milliamperometro  $mA$  con il microamperometro  $\mu A$  e variare la portata del voltmetro, come rappresentato in figura 13.5-*b*.

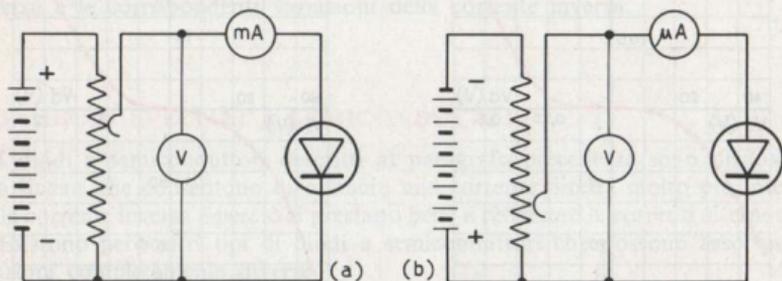


Fig. 13.5 - Circuiti per il rilievo delle caratteristiche dirette (a) ed inverse (b) di un diodo a semiconduttore.

Portando sulle ascisse di un sistema di assi cartesiani i valori delle tensioni dirette ed inverse e sulle ordinate i corrispondenti valori delle correnti dirette ed inverse, rilevati sui rispettivi strumenti di misura, si tracciano le curve caratteristiche dirette ed inverse.

In figura 13.6-*a* sono rappresentate le caratteristiche di un diodo al germanio a punta di contatto.

Le caratteristiche di un diodo al germanio e al silicio del tipo a giunzione sono raffigurate rispettivamente in figura 13.6-*b* e in figura 13.6-*c*.

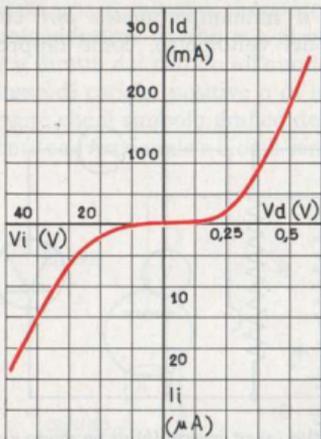
Le caratteristiche di un diodo ad ossido di rame e al selenio sono illustrate in figura 13.6-*d*.

Facciamo osservare che generalmente le caratteristiche dei diodi a semiconduttore sono molto simili a quelle dei diodi termoionici ad alto vuoto, ma si differenziano da queste ultime non solo per la presenza di una corrente inversa, ma anche per una maggiore conduttività in senso diretto e cioè per una maggiore pendenza.

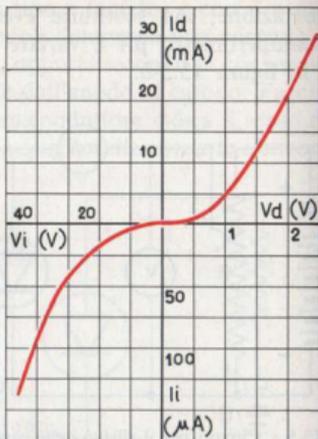
Anche i diodi a semiconduttore, come i tubi termoionici, sono inoltre caratterizzati dalla loro resistenza differenziale, che viene data sia per la conduzione diretta che per la conduzione inversa.

$$R_d = \frac{\Delta V}{\Delta I},$$

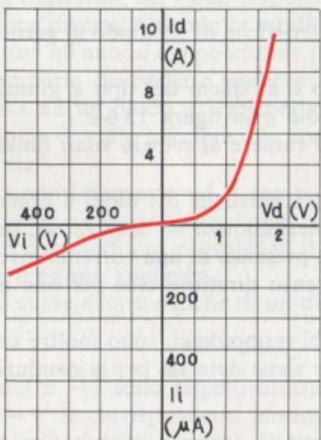
$$R_i = \frac{\Delta(-V)}{\Delta(-I)}. \quad (13.2)$$



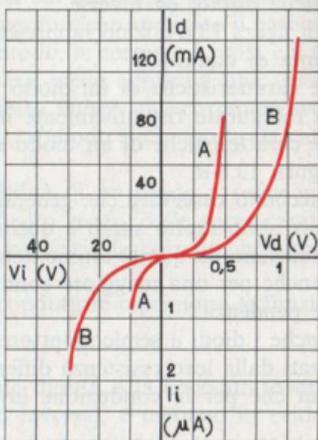
(a)-Diodo al Germanio a punta di contatto.



(b)-Diodo al Germanio a giunzione



(c) - Diodo al Silicio a giunzione.



(d)-Diodi a Ossido di Rame (A) ed al Selenio (B)

Fig. 13.6 - Caratteristiche dirette ed inverse di diodi a semiconduttori.

Dunque la resistenza diretta  $R_d$  è definita dal rapporto tra la variazione  $\Delta V$  della tensione diretta e la corrispondente variazione  $\Delta I$  della corrente diretta, riferite al tratto di caratteristica su cui il diodo lavora. Analogamente, la resistenza inversa  $R_i$  si calcola facendo il rapporto tra le variazioni della tensione inversa e le corrispondenti variazioni della corrente inversa.

### 13.3. DIODI SPECIALI A SEMICONDUTTORI

I diodi a semiconduttori descritti al paragrafo precedente sono dispositivi non lineari che consentono di ottenere una corrente diretta molto più intensa della corrente inversa e perciò si prestano bene a rettificare le correnti alternative.

Esistono però altri tipi di diodi a semiconduttori che possono assolvere a funzioni completamente diverse.

Tra i principali diodi speciali esaminiamo il diodo Zener, il diodo Tunnel e il diodo Varicap.

#### 1) Il diodo Zener

È noto che applicando ad una giunzione  $p-n$  una tensione inversa si ottiene nel diodo una corrente inversa di intensità molto inferiore a quella della corrente diretta, ed è indipendente, almeno teoricamente, dalla tensione, in quanto dovuta all'agitazione termica degli elettroni liberi e quindi alla temperatura.

Quando la tensione inversa supera però un certo valore, si verifica attraverso la giunzione un improvviso aumento di corrente, molto simile alla scarica negli isolanti, che può raggiungere intensità maggiori di quella diretta. Tale corrente risulta ancora virtualmente indipendente dalla tensione applicata, così come avviene nei tubi elettronici a gas.

Il fenomeno, che prende il nome di *effetto Zener*, potrebbe portare alla distruzione della barriera di potenziale e quindi delle proprietà rettificatrici del diodo, se la corrente inversa producesse nel cristallo una temperatura maggiore di quella massima ammissibile.

L'effetto Zener viene sfruttato in opportuni diodi, detti appunto *diodi Zener*, aventi una regione di barriera molto stretta, costituiti da zone  $n$  e  $p$  molto più inquinate di quelle dei normali diodi, e quindi ricche di donatori e di accettori in modo da ottenere, da parte e parte della giunzione, cariche spaziali di elevata densità.

A partire da una certa tensione inversa, detta *tensione Zener*, l'elevata intensità di campo elettrico che si determina nella regione della barriera, accelera fortemente gli elettroni liberi i quali, per urto, spezzano alcuni legami di valenza liberando altri elettroni che a loro volta spezzano altri legami, producendo, per effetto cumulativo, un rapido aumento della conduttività del diodo.

Si determina perciò nel diodo un brusco aumento di corrente inversa a spese degli elettroni di valenza, senza ulteriore aumento della tensione applicata, come risulta dalla caratteristica tensione-corrente di figura 13.7.

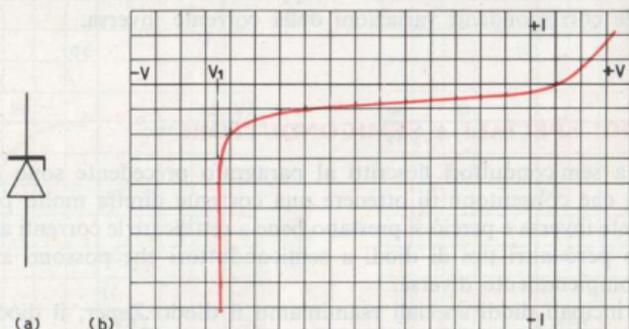


Fig. 13.7 - Caratteristica tensione-corrente di un diodo zener (b) e suo simbolo grafico (a).

Tale corrente, come s'è detto, potrebbe assumere intensità così elevate da distruggere, a causa del calore prodotto, la barriera di potenziale, se non venisse limitata da resistenze di opportuno valore inserite nel circuito.

Sfruttando questo fenomeno, i diodi Zener vengono impiegati come stabilizzatori di tensione, con il vantaggio, rispetto ad altri stabilizzatori, di avere piccole dimensioni e di essere leggeri e robusti e di lunga durata.

Essi vengono costruiti per una vasta gamma di tensioni Zener, agendo sia sullo spessore della giunzione che sul grado di inquinamento delle zone.

## 2) Il diodo Tunnel

È un diodo a giunzione nel quale il livello di inquinamento delle zone  $p$  e  $n$  è così elevato e lo strato di sbarramento, o regione delle cariche spaziali, così sottile da rendere possibile la fuga attraverso la giunzione di elettroni in un senso e di lacune in senso opposto, sia per debolissime tensioni inverse che per tensioni dirette insufficienti a vincere la barriera di potenziale.

Il fenomeno viene denominato *effetto tunnel*. Di conseguenza la caratteristica tensione-corrente di un *diodo tunnel* assume l'andamento di figura 13.8, dove si osserva che la corrente inversa aumenta subito rapidamente e quasi proporzionalmente alla tensione inversa, in quanto gli elettroni di valenza dagli atomi della zona  $p$  vicini alla giunzione passano, per effetto tunnel, nella zona  $n$ .

Anche la corrente diretta, sempre per effetto tunnel, aumenta rapidamente per tensioni dirette inferiori alla barriera di potenziale, fino a raggiungere un

massimo  $I_M$  in corrispondenza ad un massimo  $V_M$  di tensione dell'ordine di circa un decimo di volt. A questo punto il fenomeno del tunnelaggio cessa in quanto gli elettroni di conduzione si trovano di fronte alla barriera di potenziale che si è costituita con la fuga degli elettroni di valenza e che la tensione diretta non è ancora in grado di vincere.

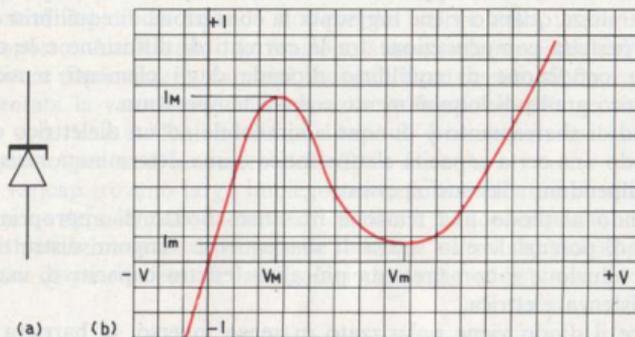


Fig. 13.8 - Caratteristica tensione-corrente di un diodo tunnel (b) e suo simbolo grafico (a).

La corrente diretta, perciò, diminuisce bruscamente fino ad un minimo  $I_m$  prossimo allo zero. Il corrispondente valore  $V_m$  della tensione diretta è ora in grado di controbilanciare la barriera di potenziale e la corrente aumenta con l'aumentare della tensione secondo l'andamento della caratteristica di un normale diodo.

Il diodo tunnel presenta dunque due particolari proprietà. La prima è quella di avere un tratto di *caratteristica a pendenza negativa* (tratto  $V_M-V_m$ ) a cui corrisponde una *resistenza differenziale negativa*. La seconda è quella di passare da una *corrente di picco*  $I_M$  ad una *corrente di valle*  $I_m$  in un brevissimo intervallo di tempo, dell'ordine di micro-micro secondi.

Il diodo tunnel, per il fatto di comportarsi come una resistenza negativa nel tratto  $V_M-V_m$ , dove all'aumentare della tensione la corrente diminuisce, viene impiegato negli oscillatori e negli amplificatori di segnali deboli e di frequenza molto elevata. Viene usato invece come interruttore elettronico nel campo delle frazioni di micro-secondi, per la rapidità con cui la corrente passa dal valore  $I_M$  di picco al valore  $I_m$  di valle.

### 3) Il diodo varicap

S'è detto che un diodo a semiconduttori presenta da parte e parte della giunzione uno strato di sbarramento a cui corrisponde una barriera di potenziale,

dove le cariche libere di segno opposto che si sono diffuse, si neutralizzano, lasciando in prossimità della superficie di contatto soltanto le cariche positive dei donatori nella zona  $n$  e le cariche negative degli accettori nella zona  $p$ , immobilizzate nel reticolo del cristallo.

Tra le due zone si viene perciò a formare uno strato di transizione non ionizzato, ossia isolante, detto appunto strato di sbarramento. Lo spessore di tale strato si stabilizza quando viene raggiunta la condizione di equilibrio corrispondente alla perfetta compensazione tra le correnti di diffusione e le correnti di campo. La condizione di equilibrio dipende dagli elementi semiconduttori usati, dal loro grado di inquinamento e dalla temperatura.

Lo strato di sbarramento è dunque assimilabile ad un dielettrico che conferisce al diodo una certa capacità elettrostatica e una determinata resistenza elettrica che dipendono dal suo spessore.

Applicando al diodo una tensione in senso diretto di appropriato valore, la barriera di potenziale e lo strato di sbarramento vengono distrutti: il diodo entra in conduzione e non presenta più alcun effetto capacitivo, ma solo una debole resistenza elettrica.

Se invece il diodo viene polarizzato in senso inverso, la barriera di potenziale si rafforza e lo strato di sbarramento si allarga, la capacità del diodo diminuisce e in esso fluisce solo una debole corrente di campo, detta *corrente di dispersione*, che però è centinaia e migliaia di volte meno intensa della corrente diretta.

Tale corrente di dispersione, che dipende dalle sostanze costituenti i semiconduttori inquinati e dalla temperatura, non può essere trascurata quando il diodo viene impiegato come condensatore, in quanto influisce sul fattore di merito del diodo stesso.

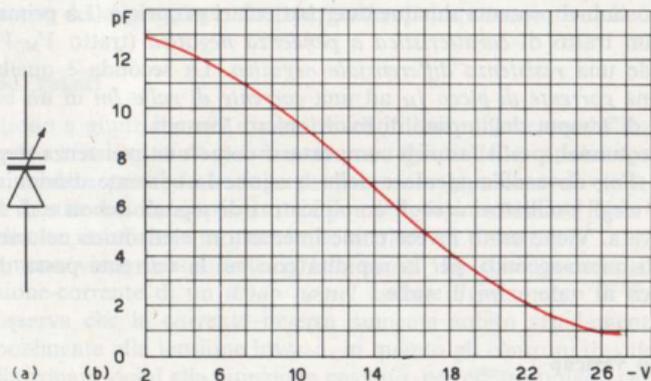


Fig. 13.9 - Diagramma della variazione di capacità di un diodo varicap in funzione della tensione inversa (b). Simbolo grafico del diodo varicap (a).

La scelta del diodo con funzioni di condensatore dipende proprio dalla corrente di dispersione. I diodi al germanio presentano delle perdite relativamente alte specialmente a temperature superiori a quella ambiente. I diodi al silicio sono invece meno sensibili alle variazioni di temperatura e presentano perdite molto basse, per cui possono considerarsi condensatori ideali, sempre che vengano progettati per funzionare in modo corretto alla frequenza di lavoro.

La capacità del diodo dipende dunque dal valore della tensione inversa a cui è sottoposto. Aumentando la tensione aumenta lo spessore dello strato di sbarramento e diminuisce la capacità secondo l'andamento di figura 13.9, dove è rappresentata la variazione della capacità in funzione della tensione inversa da 2 a 28 volt. Vi è evidentemente un limite di tensione inversa che non deve essere superato per non incorrere nell'effetto zener.

I diodi varicap trovano largo impiego nei circuiti oscillatori di alte frequenze in sostituzione dei normali condensatori variabili. La loro capacità viene variata tramite un potenziometro che regola la tensione inversa ad essi applicata, con il vantaggio di poter eseguire la regolazione anche a distanza.

### 13.4. GENERALITÀ SUI TRANSISTORI

Il transistor è un dispositivo elettronico costituito da tre zone contigue di semiconduttori diversamente inquinate, così da costituire due giunzioni  $p-n$ . È formato cioè da due diodi aventi una zona in comune o di tipo  $p$  o di tipo  $n$ . Nel primo caso si ottiene un transistor del tipo  $n-p-n$ , nel secondo caso si ottiene un transistor del tipo  $p-n-p$ .

La zona comune è chiamata *base* (B), le due zone esterne vengono dette l'una *emettitore* (E) e l'altra *collettore* (C).

Sono stati costruiti svariatisimi tipi di transistori, alcuni particolarmente adatti a funzionare alle alte frequenze ed altri capaci di dissipare notevoli potenze, e che si possono comunque raggruppare in tre categorie e precisamente:

- a) transistori a contatti puntiformi;
- b) transistori a giunzione;
- c) transistori ad effetto di campo.

Ogni categoria comprende un numero più o meno grande di tipi che si differenziano tra loro sia per le caratteristiche elettriche che per i procedimenti tecnologici adottati per la costruzione, ma non per quanto riguarda il principio fisico su cui si basa il loro funzionamento.

Il tipo a contatti puntiformi è ormai abbandonato a causa delle sue scarse proprietà elettriche e delle difficoltà costruttive. Il tipo ad effetto di campo trova diverse applicazioni nell'elettronica industriale, ma il transistor di più largo impiego è del tipo a giunzione sia per la relativa semplicità di costruzione che per le buone prestazioni che offre a causa della linearità delle sue caratteristiche.

Il transistoro al germanio a giunzione per diffusione del tipo  $p-n-p$ , la cui sezione trasversale è rappresentata in figura 13.10, è formato da una piastrina di germanio tipo  $n$  che ne costituisce la base e da due semisferette di indio di dimensioni diverse che costituiscono: la più piccola l'emettitore e la più grande il collettore.

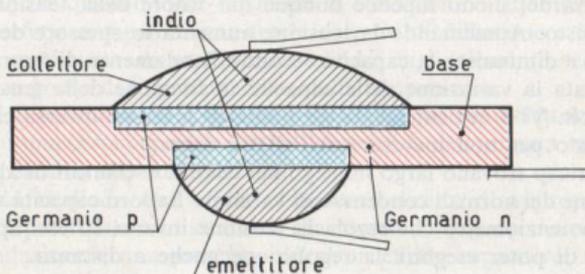


Fig. 13.10 - Sezione trasversale di un transistoro a giunzione per lega del tipo  $p-n-p$ .

Le piastrine di germanio, per lo più di forma rettangolare, hanno lo spessore di alcuni centesimi di millimetro e una superficie le cui dimensioni dipendono dalla potenza dissipata dal collettore.

Lo spessore della base è determinante per le proprietà elettriche e per il funzionamento del transistoro. Vedremo infatti che i portatori di carica (lacune per i tipi  $p-n-p$ , elettroni per i tipi  $n-p-n$ ) provenienti dall'emettitore, passando attraverso la base, inquinata in senso opposto, tendono a combinarsi con le cariche di segno contrario che ivi incontrano, con conseguente riduzione della corrente di collettore. Se poi la corrente di emettitore ha frequenza tanto elevata per cui il suo periodo è inferiore al tempo di transito dei portatori di carica attraverso la base, questi non possono arrivare al collettore.

Ogni piastrina viene appoggiata con uno dei lati minori su un nastro stagnato, su ogni faccia della piastrina viene quindi fatta aderire una semisferetta di indio.

Il tutto viene fatto passare in un apposito forno ad atmosfera inerte e ad una temperatura opportuna. La piastrina si salda al nastro e le due semisferette di indio, fondendosi, si diffondono nel germanio dando luogo alla formazione delle due giunzioni. La diffusione consiste nella penetrazione di alcuni atomi di indio nella piastrina di germanio per una certa profondità, determinando nel germanio due sottili strati di tipo  $p$ .

La ricristallizzazione della lega deve essere fatta molto lentamente e con opportuni accorgimenti.



Tavola N. 8 - Transistore al germanio.

Ottenuto con processo di lega. Viene impiegato per amplificare deboli segnali.

(Documento Philips).

Ottenuto così il transistoro, vengono applicati all'emettitore e al collettore i reofori o terminali. Il transistoro viene poi chiuso in un involucro di vetro o di metallo, nel quale, prima della chiusura ermetica, viene introdotto gas inerte.

Il transistoro a giunzione del tipo  $n-p-n$  viene ottenuto in tutt'altro modo e cioè con un procedimento costoso e lento che consiste nell'inquinare alternativamente un lingotto monocristallino di germanio in via di formazione, con sostanze trivalenti e con sostanze pentavalenti, in modo da ottenere una successione di giunzioni  $p-n$ .

Tagliando poi il lingotto nella mezzaria delle zone di tipo  $n$ , si ottengono i transistori di tipo  $n-p-n$ .

È importante osservare che qualunque sia il procedimento tecnologico adottato per la costruzione dei transistori, il dosaggio delle impurità inquinanti è sempre più basso nella base che nel collettore e nell'emettitore.

Nelle condizioni di funzionamento normali il diodo base-emettitore viene polarizzato in *senso diretto* con una tensione di qualche decimo di volt, mentre il diodo collettore-base, viene polarizzato in *senso inverso* con una tensione di qualche volt.

La differenza allora tra i due transistori sta solamente nel fatto che le polarità delle barriere di potenziale delle due giunzioni, e perciò il senso di circolazione delle correnti e le polarità delle tensioni applicate durante il funzionamento, sono, nel transistoro  $p-n-p$ , di segno opposto rispetto a quelle agenti nei transistori di tipo  $n-p-n$ .

Il funzionamento del transistoro si basa sul fatto che la corrente diretta che attraversa la giunzione emettitore-base invece di chiudersi attraverso la base si chiude per la massima parte attraverso il collettore.

Consideriamo lo schema di un transistoro di tipo  $p-n-p$  rappresentato in figura 13.11 nel quale la base fa parte contemporaneamente del circuito dell'emettitore e del circuito del collettore (configurazione circuitale con *base comune*).

Quando gli interruttori 1 e 2 sono aperti, nel transistoro si hanno due barriere di potenziale  $E_b$  e  $E_c$ , una opposta all'altra, formatesi in seguito alla diffusione di elettroni mobili dalla base verso il collettore e verso l'emettitore e di lacune dal collettore e dall'emettitore verso la base (fig. 13.11-a).

Chiudendo l'interruttore 1, il diodo base-emettitore risulta polarizzato in senso diretto (emettitore collegato al polo positivo della batteria  $V_b$  e la base collegata al polo negativo). La tensione  $V_b$  abbassa la barriera di potenziale  $E_b$  e conseguentemente si ha uno spostamento di lacune dall'emettitore verso la base (fig. 13.11-b) e uno spostamento dalla base verso l'emettitore di un minor numero di elettroni, perché minore è la concentrazione di impurità nella base (correnti dirette di diffusione). Quindi la corrente nella giunzione base-emettitore  $I_e$  risulta costituita quasi esclusivamente da lacune.

Aperto l'interruttore 1 e chiudendo l'interruttore 2, il diodo base-collet-

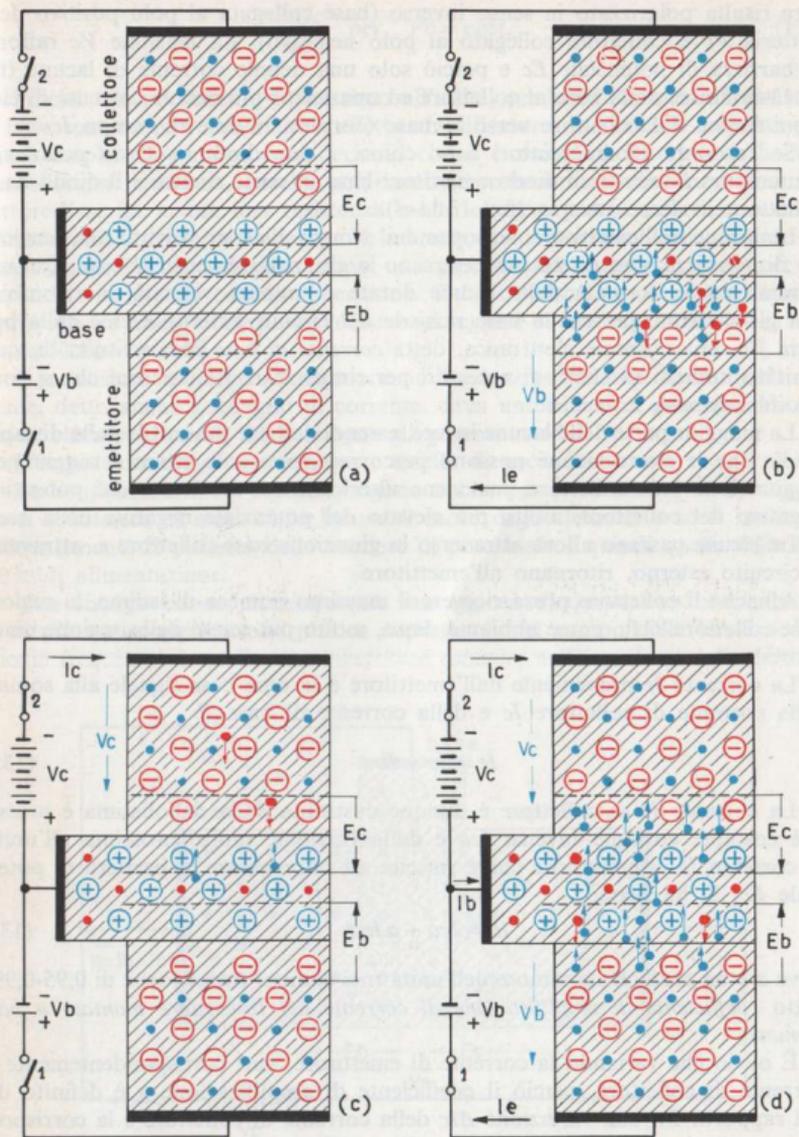


Fig. 13.11 - Funzionamento di un transistor di tipo *p-n-p* montato con base comune.

tore risulta polarizzato in senso inverso (base collegata al polo positivo della batteria  $V_c$  e collettore collegato al polo negativo). La tensione  $V_c$  rafforza la barriera di potenziale  $E_c$  e perciò solo una debole corrente di lacune (fig. 13.11-c) fluisce dalla base al collettore ed una ancor più debole corrente di elettroni fluisce dal collettore verso la base (correnti inverse di campo  $I_{co}$ ).

Se entrambi gli interruttori sono chiusi, i due diodi risultano polarizzati contemporaneamente: il diodo emettitore-base in senso diretto e il diodo base-collettore in senso inverso (fig. 13.11-d).

Le lacune dell'emettitore, sottoposte al campo elettrico dovuto alla tensione  $V_b$  di polarizzazione diretta, attraversano la giunzione emettitore-base. Qui una minima parte, formata dalle lacune dotate di minore velocità, si ricombina con gli elettroni, per cui la base richiede dal circuito esterno e cioè dalla batteria  $V_b$ , una corrente elettronica, detta *corrente di base*  $I_b$ , costituita da quel limitato numero di elettroni necessari per rimpiazzare gli elettroni che si sono ricombinati con le lacune.

La maggior parte delle lacune invece, essendo la base più sottile della distanza media che le stesse lacune possono percorrere, non solo riesce a raggiungere la giunzione base-collettore, ma viene ulteriormente accelerata dal potenziale negativo del collettore, molto più elevato del potenziale negativo della base.

Le lacune passano allora attraverso la giunzione base-collettore e, attraverso il circuito esterno, ritornano all'emettitore.

Affinché il collettore possa ricevere il massimo numero di lacune, la regione base-collettore si fa, come abbiamo detto, molto più estesa della regione emettitore-base.

La corrente  $I_e$  proveniente dall'emettitore è in ogni caso uguale alla somma della corrente di collettore  $I_c$  e della corrente di base  $I_b$ :

$$I_e = I_c + I_b \quad (13.3)$$

La corrente  $I_c$  di collettore è dunque costituita dalla debolissima è pressoché costante corrente inversa  $I_{co}$  e dalla frazione, molto prossima all'unità, di corrente  $I_e$  di emettitore che è riuscita ad oltrepassare la barriera di potenziale  $E_c$ . Si ha perciò:

$$I_c = I_{co} + \alpha I_e, \quad (13.4)$$

dove  $\alpha$  è un coefficiente minore dell'unità (nei comuni transistori è di 0,95-0,99), detto *coefficiente di amplificazione di corrente del transistor montato a base comune*.

È ovvio che variando la corrente di emettitore, vari corrispondentemente la corrente di collettore, perciò il coefficiente di amplificazione  $\alpha$  è definito dal dal rapporto fra una variazione  $\Delta I_c$  della corrente di collettore e la corrispondente variazione  $\Delta I_e$  della corrente di emettitore che l'ha provocata, fermo restando il valore della tensione  $V_c$  di collettore:

$$\alpha = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_e} \quad \text{per } V_c = \text{cost.} \quad (13.5)$$

Poiché tale coefficiente è prossimo all'unità, sembrerebbe che il transistor a base comune non abbia alcun effetto amplificatore. In realtà la corrente non viene amplificata, ma se consideriamo che il circuito emettitore-base ha una piccolissima resistenza, perché polarizzato direttamente e che il circuito collettore-base ha invece una resistenza molto elevata, perché polarizzato inversamente, risulta subito evidente che ad una eguale variazione di corrente nei due circuiti corrisponde nel primo una piccolissima caduta di tensione, nel secondo una grande caduta di tensione. Si ha cioè che da un piccolo segnale applicato tra emettitore e base si ottiene un segnale di tensione molto più grande tra collettore e base.

Il transistor montato a base comune ha dunque un'amplificazione di corrente, detto anche guadagno di corrente, circa unitario e un guadagno di tensione elevato e quindi un guadagno di potenza medio.

L'impedenza d'ingresso è bassa e quella di uscita elevata.

Le considerazioni su esposte valgono anche per i transistori di tipo *n-p-n*, se si sostituisce al moto delle lacune il moto degli elettroni e se si invertono evidentemente le polarità delle barriere di potenziale e quindi quelle delle batterie di alimentazione.

Una configurazione circuitale più vantaggiosa di quella con base comune e di più vasta applicazione pratica soprattutto nel campo delle basse e delle medie frequenze, è quella con *emettitore comune*, nella quale cioè l'emettitore

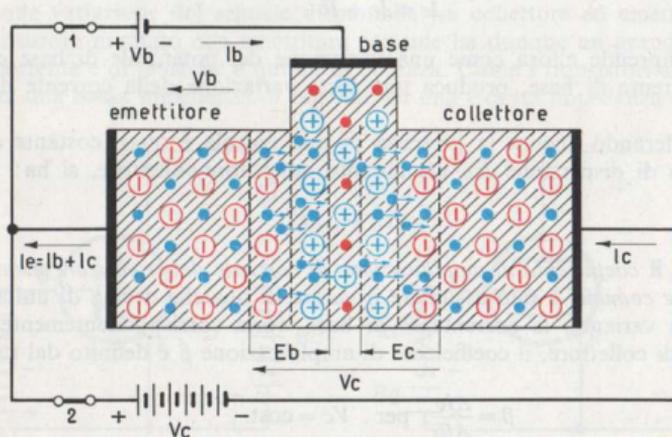


Fig. 13.12 - Funzionamento di un transistor di tipo *p-n-p* montato con emettitore comune.

fa parte contemporaneamente del circuito d'ingresso (base-emettitore) e del circuito di uscita (emettitore-collettore), secondo lo schema rappresentato in figura 13.12.

Il maggior vantaggio derivante dal circuito ad emettitore comune è una grande amplificazione di corrente oltre ad una elevata amplificazione di tensione, con conseguente elevato guadagno di potenza.

Chiudendo l'interruttore 1 il diodo base-emettitore, polarizzato direttamente, acquista proprietà conduttive, come nel caso visto precedentemente.

Aperto l'interruttore 1 e chiudendo l'interruttore 2, la tensione  $V_c$  applicata tra emettitore e collettore polarizza in senso inverso la giunzione base-collettore: la barriera di potenziale  $E_c$  viene rafforzata e il corrispondente diodo non conduce.

Quando entrambi gli interruttori vengono chiusi, la tensione  $V_b$  applicata tra base ed emettitore riduce la barriera di potenziale  $E_b$ : il diodo base-emettitore conduce.

Senonché anche la tensione  $V_c$  concorre con la tensione  $V_b$  a ridurre la barriera di potenziale  $E_b$ , per cui si ha una grande quantità di lacune che attraversa le due barriere e cioè una corrente nel circuito emettitore-collettore molto più intensa, a parità di polarizzazione, di quella uscente dal medesimo transistor montato a base comune.

Anche in questo caso la base richiede dal circuito esterno una corrente  $I_b$  corrispondente al numero degli elettroni che devono rimpiazzare quelli che si sono ricombinati, entro la base, con le lacune provenienti dall'emettitore.

Vale perciò ancora la relazione:

$$I_e = I_c + I_b . \quad (13.6)$$

Si comprende allora come una variazione del potenziale di base e quindi della corrente di base, produca una forte variazione della corrente di collettore  $I_c$ .

Considerando ancora la presenza di una piccola e quasi costante corrente inversa o di dispersione  $I_{co}$  nel circuito emettitore-collettore, si ha:

$$I_c = I_{co} + \beta I_b , \quad (13.7)$$

dove  $\beta$  è il coefficiente di amplificazione di corrente del transistor montato con emettitore comune, e può assumere il valore di qualche decina di unità.

Poiché variando la corrente  $I_b$  di base, varia corrispondentemente la corrente  $I_c$  di collettore, il coefficiente di amplificazione  $\beta$  è definito dal rapporto:

$$\beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b} \quad \text{per } V_c = \text{cost.} , \quad (13.8)$$

ed è legato al coefficiente di amplificazione  $\alpha$ .

Infatti dalla (13.5) si ha:

$$\Delta I_c = \alpha \Delta I_e,$$

e dalla (13.6) si ha:

$$\Delta I_b = \Delta I_e - \Delta I_c,$$

per cui, sostituendo, si ottiene:

$$\beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b} = \frac{\alpha \Delta I_e}{\Delta I_e - \Delta I_c} = \frac{\alpha \Delta I_e}{\Delta I_e - \alpha \Delta I_e} = \frac{\alpha}{1 - \alpha}, \quad (13.9)$$

e, reciprocamente:

$$\alpha = \frac{\beta}{1 + \beta}. \quad (13.10)$$

Ponendo  $\alpha = 0,98$ , si ricava:

$$\beta = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{0,98}{1 - 0,98} = 49,$$

da cui si deduce che per una piccola variazione della corrente di base si ottiene una grande variazione della corrente di collettore, e che di conseguenza, per una piccola variazione del segnale applicato tra base ed emettitore si ricava una grande variazione del segnale disponibile tra collettore ed emettitore.

Il transistoro montato con emettitore comune ha dunque un grande guadagno di corrente e di tensione e quindi di potenza. Come i transistori a base comune, ha una bassa impedenza di ingresso ed una elevata impedenza di uscita.

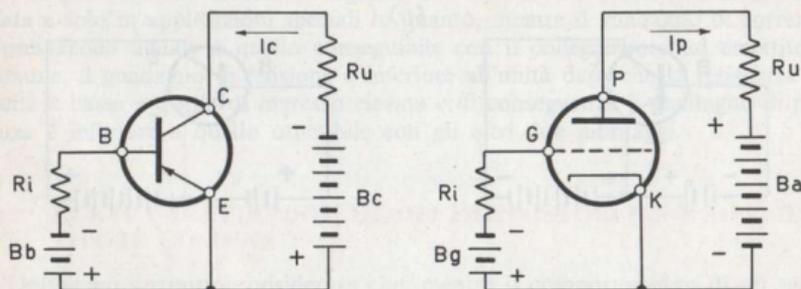


Fig. 13.13 - Corrispondenza tra un transistoro *p-n-p* con emettitore comune e un triodo ad alto vuoto con catodo comune.

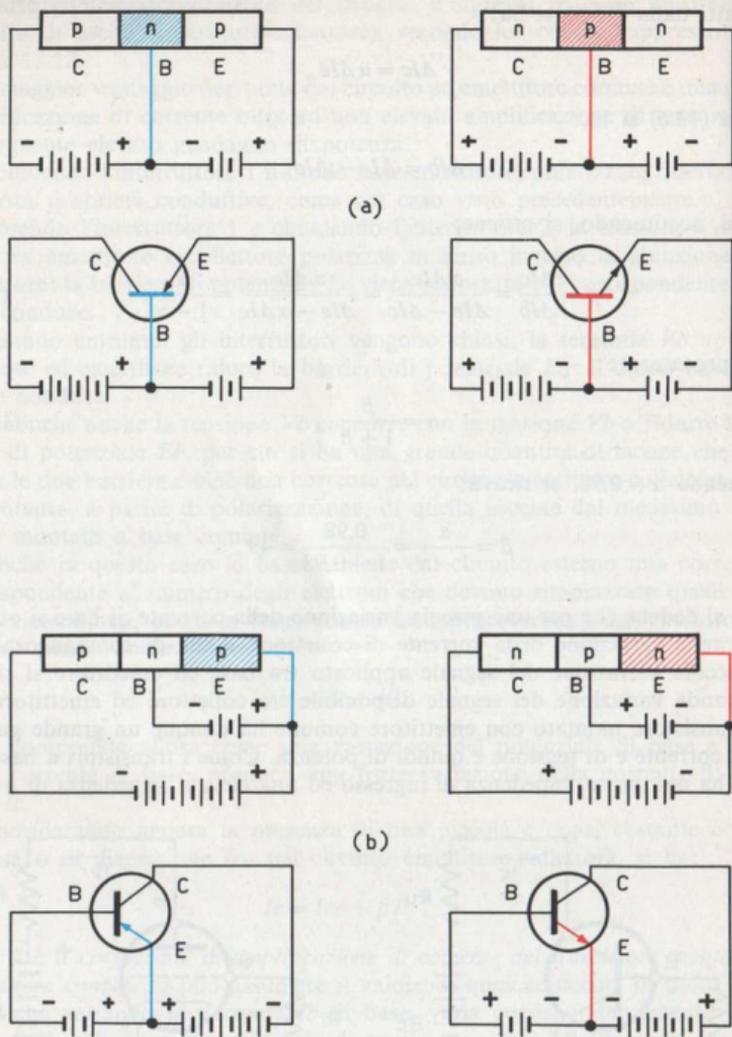


Fig. 13.14 - Schemi di polarizzazione relativi alla configurazione circuitale con base comune (a) e con emettitore comune (b) dei transistori di tipo  $p-n-p$  e di tipo  $n-p-n$  e relativi simboli grafici.

Queste caratteristiche giustificano la preferenza che si suole dare al collegamento con emettitore comune, che d'altronde corrisponde dualmente al collegamento usuale dei tubi con catodo comune.

Infatti, il transistoro del tipo  $p-n-p$  montato con emettitore comune è da considerarsi, con le dovute riserve sulle caratteristiche e sul principio di funzionamento notevolmente differenti, l'equivalente di un triodo termoionico ad alto vuoto e degli altri tubi multigriglia.

Dagli schemi di polarizzazione del transistoro e del triodo di figura 13.13, si osserva che la base B del transistoro sta al posto della griglia di controllo G del tubo, l'emettitore E sta al posto del catodo K e il collettore C al posto della placca P.

Si osservi anche che mentre i circuiti d'ingresso dei due dispositivi elettronici sono polarizzati dello stesso segno, i circuiti di uscita sono invece polarizzati in senso opposto.

La corrispondenza fra il triodo e il transistoro con emettitore comune dobbiamo ricercarla nel fatto che nel triodo una variazione della tensione applicata tra griglia e catodo provoca una variazione della corrente anodica, a causa della variazione della carica spaziale negativa; nel transistoro una variazione della corrente elettrica nel circuito emettitore-base, provoca una variazione della tensione nel circuito del collettore, a causa della variazione della barriera di potenziale nella giunzione base-collettore.

Nel triodo e nel transistoro un segnale applicato alla resistenza  $R_i$  di entrata provoca ai capi della resistenza  $R_u$  di uscita un segnale amplificato: nel triodo di  $\mu$  volte e nel transistoro di  $\beta$  volte rispetto al segnale di entrata.

In figura 13.14 sono rappresentati gli schemi di polarizzazione relativi alle configurazioni circuitali con emettitore comune e con base comune dei transistori di tipo  $p-n-p$  e del tipo  $n-p-n$ , dei quali sono rappresentati anche i simboli grafici.

Altra configurazione è quella con *collettore comune*, nella quale il collettore fa parte sia del circuito di ingresso che del circuito d'uscita. È raramente usata e solo in applicazioni speciali in quanto, mentre il guadagno di corrente è pressapoco uguale a quello conseguibile con il collegamento ad emettitore comune, il guadagno di tensione è inferiore all'unità dato che la resistenza di uscita è bassa e quella di ingresso elevata e di conseguenza il guadagno di potenza è inferiore a quello ottenibile con gli altri due montaggi.

### 13.5. CURVE CARATTERISTICHE DEI TRANSISTORI P-N-P AD EMETTITORE COMUNE

Dobbiamo anzitutto considerare che, mentre il comportamento di un tubo termoelettronico ad alto vuoto può essere compiutamente definito da una sola famiglia di curve caratteristiche statiche, il comportamento e le proprietà elet-

triche di un transistoro sono definite invece da un insieme di famiglie di caratteristiche parziali.

Ciò è dovuto al fatto che in un triodo ad alto vuoto, la griglia di controllo, essendo normalmente a potenziale negativo rispetto al catodo, non assorbe corrente, pur influenzando sul valore della corrente anodica. Di conseguenza questa può essere definita da una sola equazione funzionale che la mette in relazione con le due tensioni di griglia e di placca.

Nel transistoro invece, a causa della connessione diretta tra i due circuiti emettitore-base e collettore-emettitore, una frazione sia pur piccola, della corrente di emettitore si chiude attraverso la base e cioè attraverso l'elettrodo di controllo, per cui le varie tensioni e correnti risultano interdipendenti e legate le une alle altre da determinate relazioni.

Infatti la tensione collettore-emettitore dipende dalla corrente di collettore, la corrente di collettore è funzione della corrente di base, la corrente di base dipende a sua volta dalla tensione base-emettitore.

È evidente allora che una sola equazione funzionale non è sufficiente a definire compiutamente le caratteristiche di un transistoro, ma occorrono sempre almeno due equazioni e cioè due famiglie di curve caratteristiche.

Inoltre, mentre le caratteristiche statiche di un tubo ad alto vuoto rimangono invariate qualunque sia l'elettrodo che viene scelto come elettrodo comune, le caratteristiche dei transistori assumono andamenti diversi a seconda che si considera come elettrodo comune o la base o l'emettitore o il collettore.

Limitiamo il nostro studio alle caratteristiche e ai principali parametri dei transistori di più largo impiego e cioè dei transistori del tipo  $p-n-p$  a configurazione circuitale con *emettitore comune* o a massa.

Per scegliere un opportuno punto di lavoro e determinare il comportamento di un transistoro dobbiamo dunque rilevare una serie di caratteristiche statiche che mostrano le relazioni esistenti tra le seguenti grandezze elettriche variabili:

- a) *corrente di emettitore*  $I_e$  (che corrisponde alla corrente spaziale  $I_k$  di un tubo ad alto vuoto);
- b) *corrente di base*  $I_b$  (che corrisponde alla corrente  $I_g$  di griglia);
- c) *corrente di collettore*  $I_c$  (che corrisponde alla corrente anodica  $I_a$ );
- d) *tensione base-emettitore*  $V_b$  (che corrisponde alla tensione di griglia  $V_g$ );
- e) *tensione collettore-emettitore*  $V_c$  (che corrisponde alla tensione anodica  $V_a$ ).

In figura 13.15 vengono rappresentate le tensioni e le correnti, secondo il senso elettronico, di un transistoro con *emettitore comune* del tipo  $p-n-p$  (a) e  $n-p-n$  (b).

Allo scopo di rilevare l'interdipendenza delle varie tensioni e correnti che agiscono nel transistoro, i cataloghi riportano in genere, per ciascun tipo di transistoro, quattro famiglie di curve caratteristiche rappresentate nei quattro quadranti di un sistema di assi cartesiani.

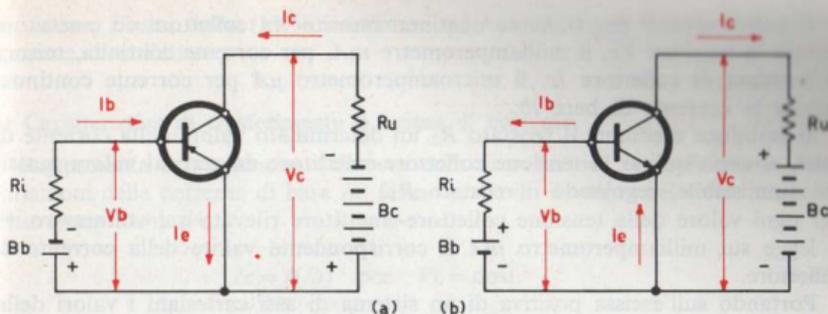


Fig. 13.15 - Tensioni e correnti elettroniche in un transistoro *p-n-p* (a) e *n-p-n* (b) ad emettitore comune.

Vediamo ora come vengono tracciate separatamente le caratteristiche statiche di un transistoro *p-n-p* nella utilizzazione con *emettitore comune*, mantenendo l'orientamento degli assi ortogonali relativamente al quadrante che ciascuna caratteristica deve occupare.

#### a) Caratteristica di uscita o di collettore

Rappresenta la variazione della corrente di collettore  $I_c$  in funzione delle variazioni della tensione collettore-emettitore  $V_c$ , fermo restando il valore della corrente di base  $I_b$ :

$$I_c = f(V_c) \text{ per } I_b = \text{cost.} \quad (13.11)$$

Per rilevare la caratteristica di uscita si realizza il circuito rappresentato in figura 13.16.

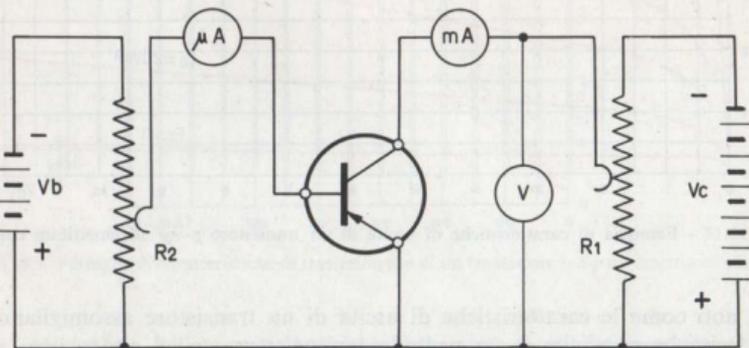


Fig. 13.16 - Circuito di polarizzazione e di misura per il rilievo delle caratteristiche di uscita e di trasferimento di un transistoro.

Il voltmetro  $V$  per corrente continua inserito tra collettore ed emettitore misura la tensione  $V_c$ , il milliamperometro  $mA$ , per corrente continua, misura la corrente di collettore  $I_c$ , il microamperometro  $\mu A$  per corrente continua, misura la corrente di base  $I_b$ .

Si stabilisce mediante il reostato  $R_2$  un determinato valore della corrente di base; si varia quindi la tensione collettore-emettitore da zero al valore massimo ammissibile, regolando il reostato  $R_1$ .

Per ogni valore della tensione collettore-emettitore rilevato sul voltmetro  $V$ , si legge sul milliamperometro  $mA$  il corrispondente valore della corrente di collettore.

Portando sull'ascissa positiva di un sistema di assi cartesiani i valori della  $V_c$  e sull'ordinata positiva i corrispondenti valori della  $I_c$ , si traccia la caratteristica di uscita.

Ripetendo la prova per diversi valori della  $I_b$ , si ottiene una famiglia di caratteristiche di uscita, il cui andamento è rappresentato in figura 13.17.

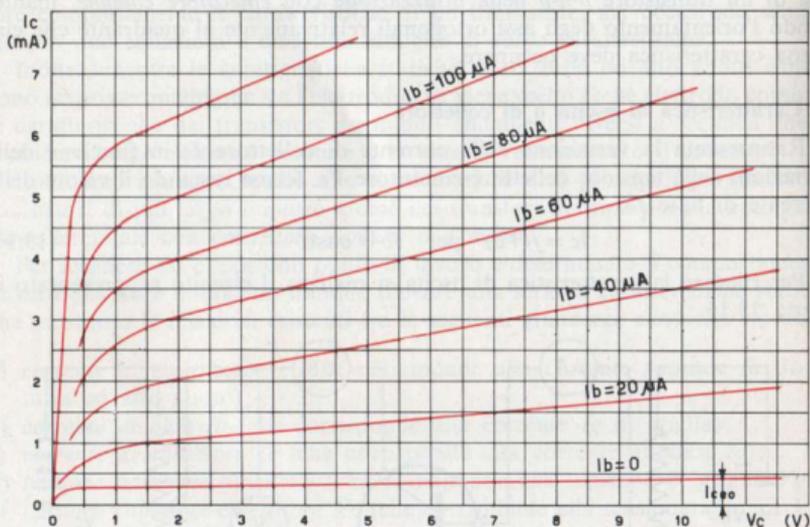


Fig. 13.17 - Famiglia di caratteristiche di uscita di un transistor  $p-n-p$  ad emettitore comune.

Si noti come le caratteristiche di uscita di un transistor assomigliano alle caratteristiche anodiche di un pentodo termoelettronico ad alto vuoto.

Si osservi anche che quando la corrente di base  $I_b$  è nulla, la corrente  $I_c$  di collettore coincide con la corrente inversa  $I_{c0}$  del circuito collettore-emettitore

che, come risulta dalla (13.7), concorre con la corrente di base a formare la corrente di collettore.

### b) Caratteristica di trasferimento o mutua di corrente.

Rappresenta la variazione della corrente di collettore  $I_c$  in funzione delle variazioni della corrente di base  $I_b$ , fermo restando il valore della tensione collettore-emettitore  $V_c$ :

$$I_c = f(I_b) \quad \text{per} \quad V_c = \text{cost.} \quad (13.12)$$

Per rilevare la caratteristica di trasferimento si utilizza ancora lo schema del circuito rappresentato in figura 13.16.

Stabilito un valore della tensione  $V_c$  mediante il reostato  $R_1$ , si varia la corrente di base  $I_b$  da zero al valore ammissibile regolando opportunamente il reostato  $R_2$ .

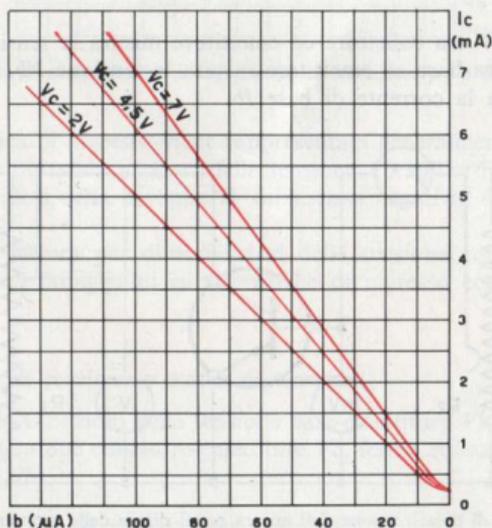


Fig. 13.18 - Famiglia di caratteristiche di trasferimento di un transistor  $p-n-p$  ad emettitore comune.

Per ogni valore della corrente di base, rilevato sul microamperometro  $\mu A$ , si legge sul milliamperometro  $mA$  il corrispondente valore della corrente di collettore  $I_c$ .

Mentre le caratteristiche di uscita vengono rappresentate nel primo quadrante, la caratteristica di trasferimento viene rappresentata generalmente nel secondo quadrante. Perciò le variazioni della corrente di base  $I_b$  si riportano sull'ascissa negativa e i corrispondenti valori della corrente di collettore  $I_c$  sulla ordinata positiva, come rappresentato in figura 13.18.

Volendo ottenere una famiglia di curve caratteristiche di trasferimento, si ripete la prova per diversi valori della  $V_c$  stabiliti regolando il reostato  $R_1$ .

### c) Caratteristica di ingresso o di base

Rappresenta le variazioni della corrente di base  $I_b$  in funzione delle variazioni della tensione base-emettitore  $V_b$ , fermo restando il valore della tensione collettore-emettitore  $V_c$ :

$$I_b = f(V_b) \quad \text{per} \quad V_c = \text{cost.} \quad (13.13)$$

Per rilevare la caratteristica di ingresso si realizza il circuito rappresentato in figura 13.19.

Il voltmetro  $V$  tra collettore ed emettitore misura la tensione  $V_c$ , il millivoltmetro  $mV$  tra base ed emettitore misura la tensione  $V_b$ , il microamperometro  $\mu A$  misura la corrente di base  $I_b$ .

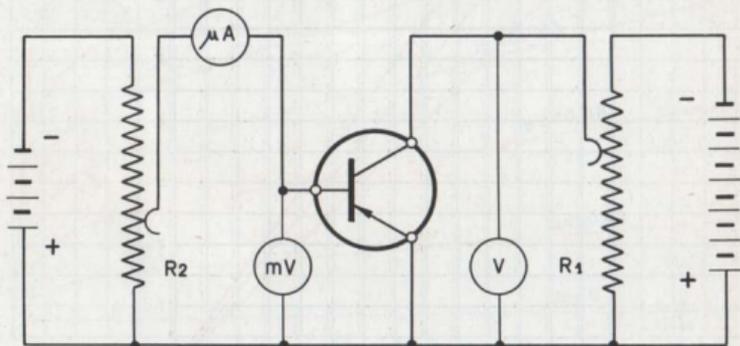


Fig. 13.19 - Circuito di polarizzazione e di misura per il rilievo delle caratteristiche di ingresso e di reazione di un transistor.

Mediante il reostato  $R_1$  si fissa la tensione  $V_c$  su un determinato valore. Si varia quindi la tensione base-emettitore, mediante il reostato  $R_2$ , da zero al valore ammissibile e, per ogni valore di  $V_b$  letto sul millivoltmetro, si rileva sul microamperometro il corrispondente valore della corrente di base.

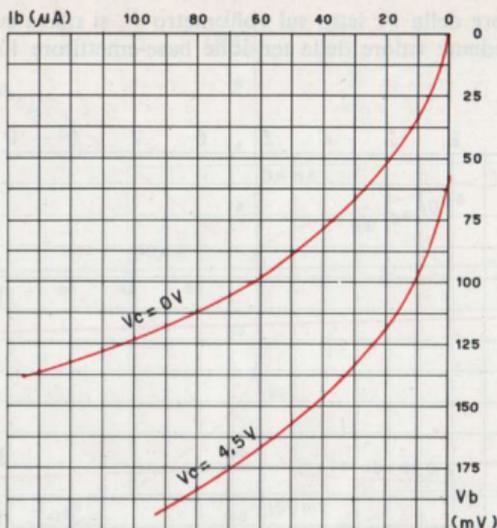


Fig. 13.20 - Famiglia di caratteristiche di ingresso di un transistoro *p-n-p* ad emettitore comune.

La caratteristica di ingresso viene rappresentata generalmente nel terzo quadrante, per cui riportando i valori della tensione  $V_b$  sull'ordinata negativa e i corrispondenti valori della corrente  $I_b$  sull'ascissa negativa, si traccia la curva caratteristica.

Ripetendo la misura per diversi valori della tensione collettore-emettitore  $V_c$ , si ottiene una famiglia di caratteristiche di ingresso come rappresentato in figura 13.20.

#### d) Caratteristica di reazione o mutua di tensione

Rappresenta le variazioni della tensione base-emettitore  $V_b$  in funzione delle variazioni della tensione collettore-emettitore  $V_c$ , fermo restando il valore della corrente di base  $I_b$ :

$$V_b = f(V_c) \quad \text{per} \quad I_b = \text{cost.} \quad (13.14)$$

Il circuito impiegato per il rilievo di questa caratteristica è ancora quello rappresentato in figura 13.19.

Si stabilisce mediante il reostato  $R_2$  un determinato valore della corrente di base  $I_b$ . Si varia quindi la tensione collettore-emettitore  $V_c$  da zero al valore consentito, mediante il reostato  $R_1$ .

Per ogni valore della  $V_c$  letto sul voltmetro  $V$ , si rileva sul millivoltmetro  $mV$  il corrispondente valore della tensione base-emettitore  $V_b$ .

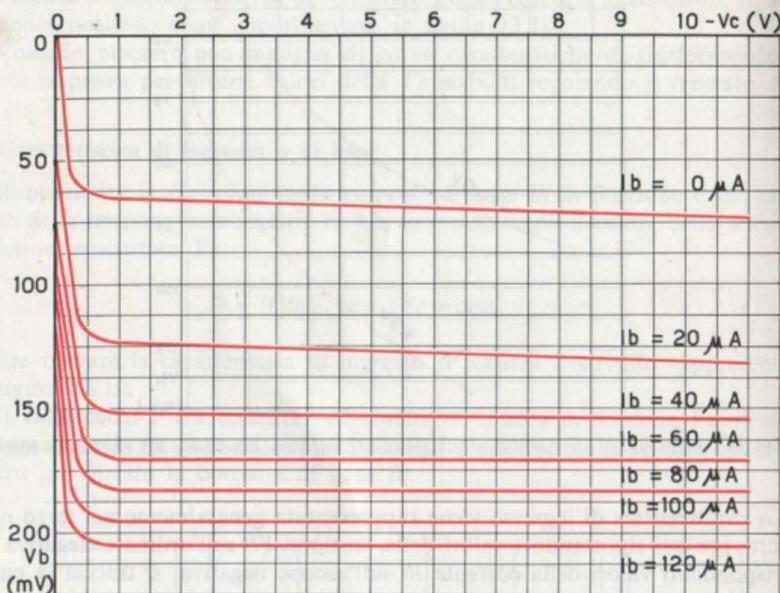


Fig. 13.21 - Famiglia di caratteristiche di reazioni di un transistoro  $p-n-p$  ad emettitore comune.

La caratteristica di reazione si rappresenta normalmente nel quarto quadrante, per cui i valori della  $V_c$  si riportano sull'ascissa positiva e i corrispondenti valori della  $V_b$  si riportano sull'ordinata negativa.

Ripetendo la prova per diversi valori della corrente di base, si ottiene una famiglia di curve caratteristiche di reazione, il cui andamento è rappresentato in figura 13.21.

Dall'insieme delle quattro famiglie di curve caratteristiche si può rilevare il punto di lavoro statico del transistoro.

Infatti dalla figura 13.22 si può rilevare che scegliendo le curve relative ad una tensione costante di collettore di  $-9$  volt rispetto all'emettitore comune e ad una corrente costante di base di  $40 \mu A$ , la tensione di base risulta di  $-150 mV$  e la corrente di collettore di  $3,4 mA$ .

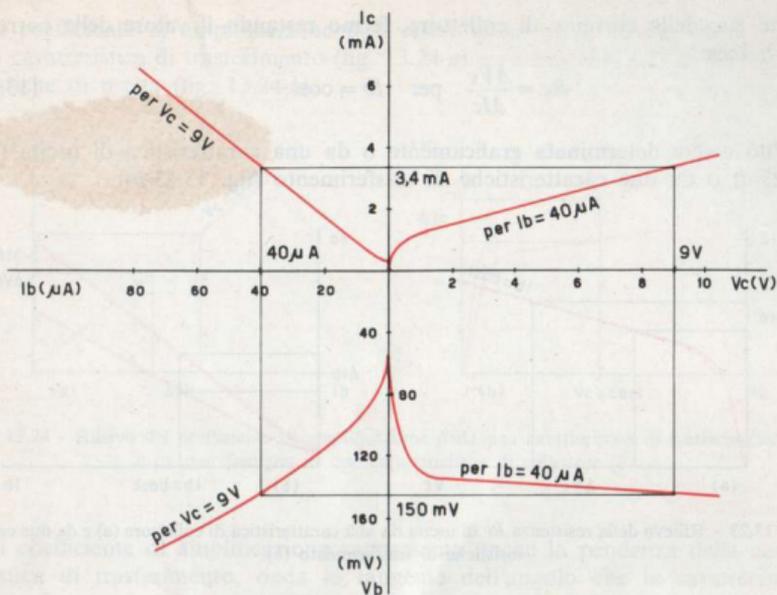


Fig. 13.22 - Relazione tra correnti e tensioni di polarizzazione di un transistoro *p-n-p* ad emettitore comune, attraverso le relative curve caratteristiche.

### 13.6. PARAMETRI CARATTERISTICI DEI TRANSISTORI

I transistori, come i tubi elettronici, vengono caratterizzati anche dai loro parametri, i quali però, a differenza di quelli dei tubi, possono assumere espressioni analitiche diverse a seconda del significato che si vuole ad essi attribuire in ragione dell'impiego del transistoro.

Poiché, per il momento, valgono solamente le considerazioni sul funzionamento del transistoro in regime statico, ossia con polarizzazione in corrente continua, i parametri vengono definiti direttamente dalle curve caratteristiche statiche trattate nel paragrafo precedente.

#### a) La resistenza di uscita o di collettore $R_c$

La resistenza  $R_c$  di uscita di un transistoro ad emettitore comune corrisponde alla resistenza anodica di un tubo ad alto vuoto. Essa viene definita dal rapporto tra la variazione  $\Delta V_c$  della tensione di collettore e la corrispondente varia-

zione  $\Delta I_c$  della corrente di collettore, fermo restando il valore della corrente  $I_b$  di base:

$$R_c = \frac{\Delta V_c}{\Delta I_c} \quad \text{per } I_b = \text{cost.} \quad (13.15)$$

Può essere determinata graficamente o da una caratteristica di uscita (fig. 13.23-a) o da due caratteristiche di trasferimento (fig. 13.23-b).

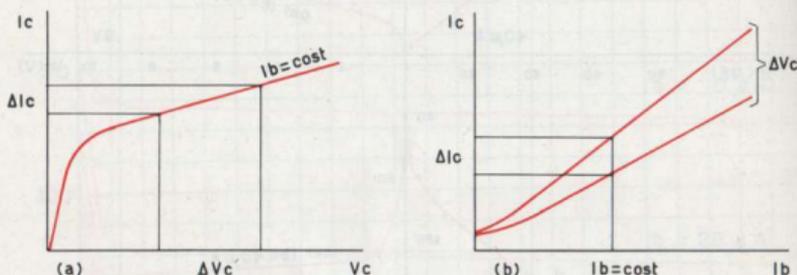


Fig. 13.23 - Rilievo della resistenza  $R_c$  di uscita da una caratteristica di collettore (a) e da due caratteristiche di trasferimento (b).

L'inverso della resistenza di uscita è una conduttanza e rappresenta la pendenza della caratteristica di uscita, ossia la tangente dell'angolo  $\alpha$  che la caratteristica forma con la retta parallela all'ascissa.

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{R_c} = \frac{\Delta I_c}{\Delta V_c}. \quad (13.16)$$

Si osserva che aumentando la corrente di riposo di base diminuisce la resistenza di collettore ed aumenta la pendenza della caratteristica di uscita. Il valore della resistenza di uscita varia da qualche unità a qualche decina di Kohm, a seconda del tipo di transistorore.

#### b) Il coefficiente di amplificazione $\beta$ di corrente

Il coefficiente di amplificazione  $\beta$  di corrente di un transistorore ad emettitore comune, già analizzato al paragrafo 13.4., corrisponde al coefficiente di amplificazione  $\mu$  di un triodo ad alto vuoto. Esso è definito dal rapporto fra la variazione  $\Delta I_c$  della corrente di collettore e la corrispondente variazione  $\Delta I_b$  della corrente di base, fermo restando il valore della tensione  $V_c$  di collettore:

$$\beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b} \quad \text{per } V_c = \text{cost.} \quad (13.17)$$

Il coefficiente di amplificazione può essere determinato graficamente o da una caratteristica di trasferimento (fig. 13.24-*a*) o da una famiglia di due caratteristiche di uscita (fig. 13.24-*b*).

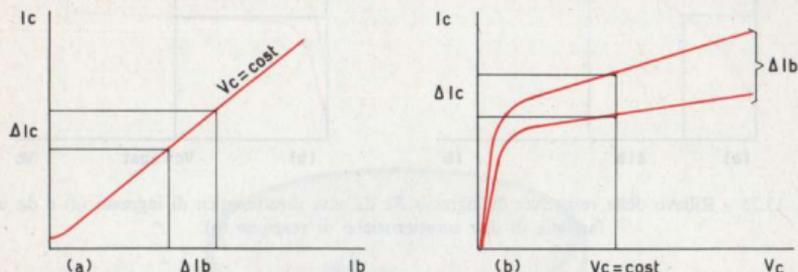


Fig. 13.24 - Rilievo del coefficiente di amplificazione  $\beta$  da una caratteristica di trasferimento (*a*) e da una famiglia di due caratteristiche di collettore (*b*).

Il coefficiente di amplificazione rappresenta anche la pendenza della caratteristica di trasferimento, ossia la tangente dell'angolo che la caratteristica forma con la retta parallela all'ascissa.

In genere la caratteristica di trasferimento di un transistor di piccola potenza ha andamento rettilineo: la pendenza è allora costante e il fattore di amplificazione non varia con il variare della corrente di collettore. Invece l'andamento della caratteristica di trasferimento di un transistor di grande potenza è più o meno convesso, per cui il coefficiente di amplificazione diminuisce quando la corrente di collettore aumenta. Il valore di  $\beta$  può variare da 25 a 150 unità.

### c) La resistenza di ingresso o di base $R_e$

La resistenza di ingresso  $R_e$  di un transistor ad emettitore comune è definita dal rapporto fra una variazione  $\Delta V_b$  della tensione di base e la corrispondente variazione  $\Delta I_b$  della corrente di base, fermo restando il valore della tensione  $V_c$  di collettore:

$$R_e = \frac{\Delta V_b}{\Delta I_b} \quad \text{per } V_c = \text{cost.} \quad (13.18)$$

Può venire determinata graficamente o da una caratteristica di ingresso (fig. 13.25-*a*) o da una famiglia di due caratteristiche di reazione (fig. 13.25-*b*).

La resistenza di ingresso rappresenta anche la pendenza della caratteristica di base, ossia la tangente dell'angolo che la caratteristica forma con l'asse delle

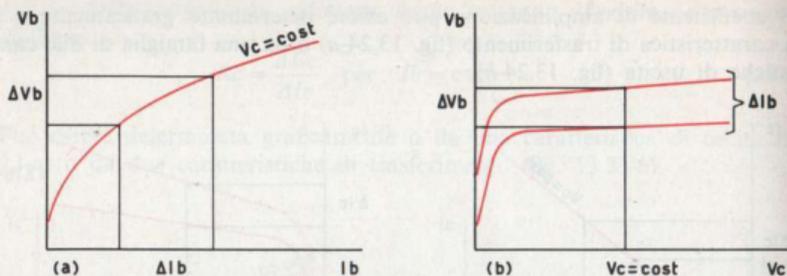


Fig. 13.25 - Rilievo della resistenza di ingresso  $R_e$  da una caratteristica di ingresso (a) e da una famiglia di due caratteristiche di reazione (b).

ascisse. Essa diminuisce con il diminuire della tensione  $V_c$  di collettore. Il suo valore può variare da qualche centinaia a qualche migliaia di ohm a seconda del tipo di transistor.

#### d) Il coefficiente di controreazione di tensione $y$

Il coefficiente di controreazione di tensione  $y$  rappresenta l'ammontare della reazione negativa della tensione di collettore sulla tensione di base, per corrente di base costante; viene perciò definito dal rapporto tra una variazione  $\Delta V_c$  della tensione di collettore per la corrispondente variazione  $\Delta V_b$  della tensione di base, fermo restando il valore della corrente di base  $I_b$ .

$$y = \frac{\Delta V_c}{\Delta V_b} \quad \text{per } I_b = \text{cost.} \quad (13.19)$$

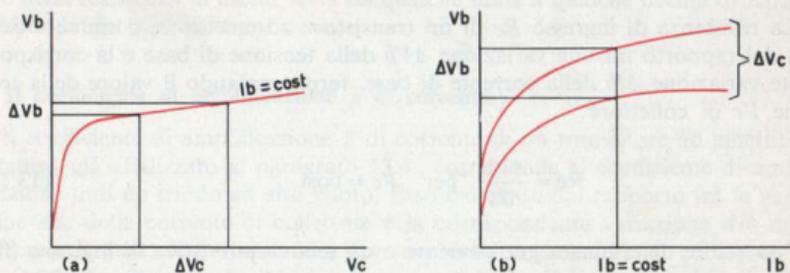


Fig. 13.26 - Rilievo del coefficiente di controreazione  $y$  da una caratteristica di reazione (a) o da una famiglia di due caratteristiche di ingresso (b).

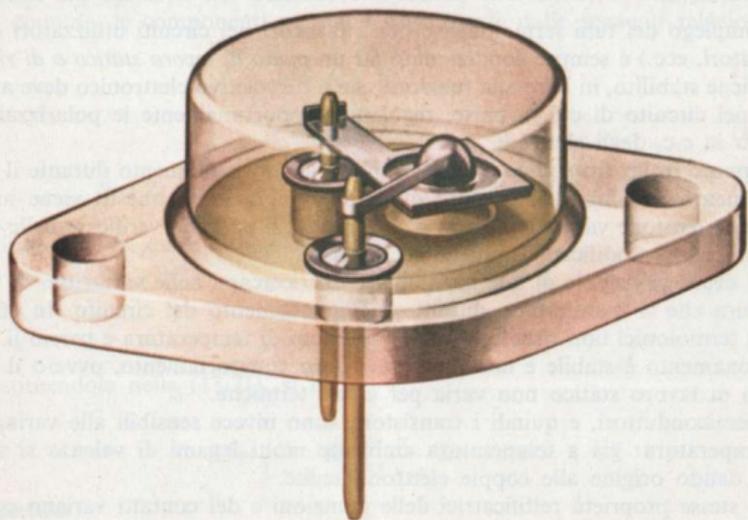


Tavola N. 9 - Transistore al germanio.  
Ottenuto con processo di lega. Viene impiegato negli stadi finali e di potenza.  
(Documento Philips).

Il coefficiente di controreazione, il cui valore è dell'ordine dei decimillesimi di unità, può essere determinato graficamente da una caratteristica di reazione (fig. 13.26-a) o da una famiglia di due caratteristiche di ingresso (fig. 13.26-b).

Esistono, come s'è detto, altri parametri che completano lo studio delle proprietà di un transistoro, molto utili soprattutto in sede di progettazione dei circuiti, che verranno discussi appunto nelle applicazioni pratiche dei transistori.

### 13.7. STABILIZZAZIONE TERMICA DEI TRANSISTORI

L'impiego dei tubi termoionici e dei transistori nei circuiti utilizzatori (amplificatori, ecc.) è sempre condizionato ad un *punto di lavoro statico o di riposo* che viene stabilito, in base alla funzione che il dispositivo elettronico deve assolvere nel circuito di cui fa parte, regolando opportunamente le polarizzazioni fisse o in c.c. degli elettrodi.

Il punto di lavoro statico non deve subire alcun spostamento durante il funzionamento del circuito, neppure quando all'ingresso di questo viene applicata una tensione variabile. Tuttavia, in pratica, si possono verificare delle condizioni che lo modificano, rendendolo instabile.

La causa principale di tale instabilità è da ricercarsi nelle variazioni di temperatura che si manifestano durante il funzionamento del circuito. In effetti, i tubi termoionici non risentono delle variazioni di temperatura e perciò il loro funzionamento è stabile e non alterano il loro comportamento, ovvero il loro punto di lavoro statico non varia per cause termiche.

I semiconduttori, e quindi i transistori, sono invece sensibili alle variazioni di temperatura: già a temperatura ambiente molti legami di valenza si spezzano dando origine alle coppie elettroni-lacune.

Le stesse proprietà rettificatrici delle giunzioni e dei contatti variano con il variare della temperatura e se questa supera un determinato valore, la barriera di potenziale viene distrutta e la giunzione conduce la corrente in ambo i sensi senza differenza alcuna.

Le variazioni di temperatura di un transistoro dipendono dalle variazioni sia della temperatura ambiente che della corrente elettrica che attraversa le giunzioni.

Dalle relazioni (13.7) e (13.8):

$$I_c = \beta I_b + I_{co}, \quad \text{e} \quad \beta = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_b},$$

risulta evidente che aumentando la temperatura, aumentano le coppie elettroni-lacune che determinano la corrente inversa di saturazione  $I_{co}$  (questa raddoppia per ogni aumento di 10 °C), per cui aumenta la corrente  $I_c$  di collettore e, a parità di corrente  $I_b$  di base, aumenta il coefficiente di amplificazione  $\beta$  di cor-

rente. Ma un aumento di  $I_c$  produce un ulteriore aumento di temperatura e quindi della  $I_{co}$  che a sua volta fa aumentare ancora la  $I_c$  e perciò anche la temperatura. Questa, se non venisse dissipata o compensata, potrebbe causare la distruzione del transistor.

Un aumento della temperatura produce dunque uno slittamento delle caratteristiche statiche (quelle di uscita si innalzano perché cresce  $\beta$ ) e uno spostamento del punto di lavoro statico (che pure si innalza sulle caratteristiche di uscita).

La valutazione quantitativa del fenomeno viene definita dalle componenti continue che agiscono nel transistor. Facendo riferimento al collegamento a base comune, le componenti continue sono legate dalle seguenti relazioni:

$$I_e = I_c + I_b, \quad (13.20)$$

$$I_c = \alpha I_e + I_{co}, \quad (13.21)$$

$$I_b = I_e - I_c = I_e - \alpha I_e - I_{co} = (1 - \alpha) I_e - I_{co}. \quad (13.22)$$

Ricavando da quest'ultima espressione  $I_e$ :

$$I_e = \frac{I_b}{1 - \alpha} + \frac{I_{co}}{1 - \alpha},$$

e sostituendola nella (13.21), si ha:

$$I_c = \frac{\alpha}{1 - \alpha} I_b + \frac{\alpha}{1 - \alpha} I_{co} + I_{co}.$$

Essendo:

$$\frac{\alpha}{1 - \alpha} = \beta, \quad \text{e} \quad \frac{\alpha}{1 - \alpha} + 1 = \frac{1}{1 - \alpha},$$

si ha anche:

$$I_c = \beta I_b + \frac{1}{1 - \alpha} I_{co}, \quad (13.23)$$

da cui si deduce che per un certo valore di  $I_b$ , ogni variazione della  $I_{co}$  dovuta alla temperatura provoca una variazione della  $I_c$  che è  $1/1 - \alpha$  volte maggiore della variazione di  $I_{co}$ .

Facendo il rapporto tra la variazione  $\Delta I_c$  della corrente di collettore per la variazione  $\Delta I_{co}$  della corrente inversa di saturazione che l'ha provocata, o,

più precisamente, derivando l'espressione (13.23) della  $I_c$  rispetto a  $I_{co}$ , si ottiene, per  $\beta I_b$  costante:

$$S = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_{co}} = \frac{1}{1 - \alpha}, \quad (13.24)$$

dove  $S$  prende il nome di *fattore di stabilità del transistor a polarizzazione fissa* (più propriamente  $S$  dovrebbe essere chiamato fattore di instabilità perché al suo aumentare cresce l'instabilità del circuito).

Idealmente, il fattore di stabilità dovrebbe assumere valori molto prossimi all'unità, affinché una discreta variazione della  $I_{co}$  si ripercuota in modo trascurabile sulla corrente  $I_c$  di collettore; in pratica però lo si ritiene accettabile fino a 10 unità.

Risolvendo la (13.24), per  $\alpha = 0,96 \div 0,99$ , si ottiene invece un fattore di stabilità variabile da 25 a 100 unità, il che dimostra che l'instabilità del punto di funzionamento statico è così elevata da non poterla tollerare. Occorre perciò intervenire sul circuito per stabilizzare i valori delle grandezze corrispondenti alle specifiche condizioni di impiego, mantenendo il transistor ad una temperatura il più costante possibile.

La compensazione alle variazioni di temperatura si ottiene mediante opportuni circuiti di stabilizzazione, dei quali descriviamo quelli di più largo impiego.

In figura 13.27 è rappresentato un circuito di stabilizzazione termica ottenuta mediante una resistenza  $R_e$  di emettitore, detto *circuito di stabilizzazione con resistenza di emettitore*.

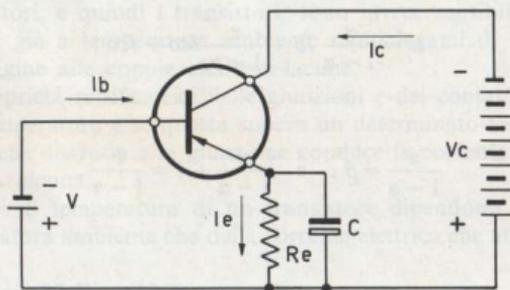


Fig. 13.27 - Circuito di stabilizzazione con resistenza di emettitore.

La tensione di ingresso  $V$  viene in tal modo ripartita tra base-emettitore e ai capi della  $R_e$ . Infatti deve essere:

$$V = V_b + I_e \cdot R_e .$$

Essendo la corrente di base  $I_b$  sempre molto piccola, si può ritenere con sufficiente approssimazione che la corrente di collettore  $I_c$  sia uguale alla corrente di emettitore  $I_e$ . Pertanto si può scrivere:

$$V = V_b + I_c \cdot R_e .$$

Se allora la corrente  $I_c$  aumenta a causa della temperatura, aumenta proporzionalmente la caduta di tensione ai capi della resistenza  $R_e$ . Di conseguenza diminuisce la tensione  $V_b$  tra base ed emettitore, dato che la tensione  $V$  della batteria rimane costante.

La diminuzione della  $V_b$  provoca una diminuzione della corrente di base  $I_b$  e perciò la corrente di collettore  $I_c$ , che dipende grandemente dalla corrente di base ( $I_c = I_{c0} + \beta I_b$ ), subirà una diminuzione.

La resistenza  $R_e$  inserita nel circuito di emettitore compensa quindi l'aumento della corrente di collettore provocato dalla variazione della temperatura.

Nei circuiti pratici di impiego dei transistori, ai quali viene applicato un segnale alternativo, occorre collegare in parallelo alla resistenza  $R_e$  di emettitore un condensatore  $C$  affinché la componente alternativa del segnale passi esclusivamente dal condensatore e non dalla resistenza  $R_e$  che deve essere percorsa esclusivamente dalla componente continua di polarizzazione. Ciò è possibile solo se la capacità  $C$  ha valore tale da determinare in corrispondenza della più bassa frequenza del segnale una reattanza trascurabile, quasi un cortocircuito.

In pratica, il valore di tale reattanza si fa corrispondere a  $0,1 \div 0,05$  volte il valore della resistenza  $R_e$ .

Il circuito ora descritto ha l'inconveniente di dover essere polarizzato con due batterie. Nella pratica applicazione si fa uso invece di una sola batteria: le diverse polarizzazioni si ottengono sfruttando le cadute di tensione provocate da resistenze, dette *resistenze di polarizzazione*, di valore opportuno.

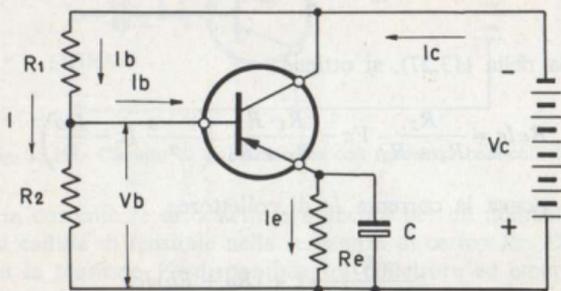


Fig. 13.28 - Circuito di stabilizzazione con resistenza di emettitore e partitore di tensione di base.

Si può realizzare così il circuito di figura 13.28, detto *circuito di stabilizzazione con resistenza di emettitore e partitore di tensione di base*.

La tensione di polarizzazione di base è ottenuta per mezzo del partitore di tensione  $R_1$  e  $R_2$ . Essa dipende dalla tensione di alimentazione  $V_c$  e dal rapporto tra le due resistenze  $R_1$  e  $R_2$ .

Se si trascurano la piccola caduta di tensione che la corrente  $I_b$  di base provoca nella resistenza  $R_1$  del partitore di tensione, e la tensione  $V_{be}$  che si manifesta tra base ed emettitore polarizzate direttamente, in modo da poter considerare uguali fra loro, rispetto al polo positivo della batteria di alimentazione, le tensioni continue di base e di emettitore, si ha, per il teorema di Thevenin:

$$V_b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_c,$$

e

$$R_b = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}, \quad (13.25)$$

dove  $V_b$  e  $R_b$  sono rispettivamente la tensione e la resistenza serie del generatore equivalente di tensione ( $V_b$ ,  $R_b$ ) applicato alla base.

Vale pertanto la relazione:

$$R_e I_e = V_b - R_b I_b, \quad (13.26)$$

od anche:

$$R_e I_e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_c - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} I_b. \quad (13.27)$$

Ricavando dalla (13.23) la corrente  $I_b$ :

$$I_b = \frac{1 - \alpha}{\alpha} I_c - \frac{I_{c0}}{\alpha},$$

e sostituendola nella (13.27), si ottiene:

$$R_e I_e = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_c - \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \left( \frac{1 - \alpha}{\alpha} I_c - \frac{I_{c0}}{\alpha} \right), \quad (13.28)$$

dalla quale si ricava la corrente  $I_c$  di collettore:

$$I_c = \frac{\alpha R_2}{R_1 + R_2} V_c + \frac{(R_e + R_b) I_{c0}}{R_e + R_b(1 - \alpha)}.$$

Poiché il primo termine del numeratore è costante, facendo la derivata di  $I_c$  rispetto a  $I_{co}$ , ossia il rapporto tra una variazione  $\Delta I_c$  della corrente di collettore per la corrispondente variazione  $\Delta I_{co}$  della corrente inversa che l'ha provocata, si ottiene:

$$S = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_{co}} = \frac{R_e + R_b}{R_e + R_b(1 - \alpha)}, \quad (13.29)$$

che rappresenta il fattore di stabilità  $S$  del transistor a polarizzazione fissa con resistenza  $R_e$  di stabilizzazione sull'emettitore.

Confrontando quest'ultima espressione con la (13.24) si osserva che il fattore di stabilità è diminuito e può essere contenuto nei limiti 1 e 10 dimensionando opportunamente la  $R_e$ , con conseguente accettabile stabilizzazione del punto di lavoro statico del transistor.

Infatti, anche per il circuito di figura 13.28 valgono le stesse considerazioni fatte per il circuito di figura 13.27. Un aumento di temperatura fa crescere la corrente inversa  $I_{co}$  che a sua volta fa aumentare la corrente  $I_c$  di collettore e quindi anche la corrente  $I_e$  di emettitore. Aumenta allora la caduta di tensione in  $R_e$  e la tensione  $V_b$  di base diminuisce e con essa la corrente  $I_b$ , per cui anche la corrente  $I_c$  subisce la diminuzione desiderata.

Un certo grado di stabilizzazione si ottiene anche collegando una resistenza  $R_b$  tra base e collettore secondo lo schema di figura 13.29, detto *circuito di stabilizzazione con resistenza base-collettore*.

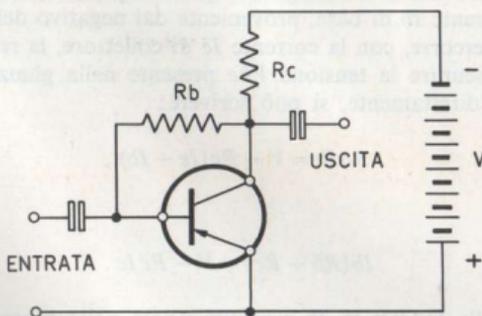


Fig. 13.29 - Circuito di stabilizzazione con resistenza base-collettore.

Infatti, se la corrente  $I_c$  di collettore aumenta per un aumento di temperatura, cresce la caduta di tensione nella resistenza di carico  $R_c$ . Di conseguenza diminuisce sia la tensione  $V_c$  disponibile tra collettore ed emettitore:

$$V_c = V - R_c I_c,$$

che la tensione  $V_b$  disponibile tra collettore e base:

$$V_b = R_b I_b .$$

La corrente  $I_b$  di base allora diminuisce e con essa la corrente  $I_c$  di collettore che si riporta all'incirca al valore di prima.

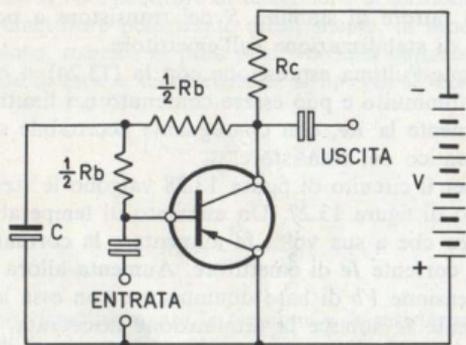


Fig. 13.30 - Circuito di stabilizzazione con resistenza base-collettore dimezzata.

Il fattore di stabilità  $S$  ottenibile con questo tipo di rete, si ricava considerando che la corrente  $I_b$  di base, proveniente dal negativo della batteria di alimentazione  $V$ , percorre, con la corrente  $I_c$  di collettore, la resistenza di carico  $R_c$ . Potendo trascurare la tensione  $V_{be}$  presente nella giunzione base-emettitore polarizzata direttamente, si può scrivere:

$$R_b I_b = V - R_c (I_c + I_b) ,$$

od anche:

$$I_b (R_b + R_c) = V - R_c I_c .$$

Ricavando dalla (13.23) la  $I_b$  e sostituendola nella precedente, si ottiene:

$$\frac{(1 - \alpha) I_c + I_{co}}{\alpha} (R_c + R_b) = V - R_c I_c ,$$

dalla quale si ricava  $I_c$ :

$$I_c = \frac{\alpha V + I_{co} (R_c + R_b)}{R_c + R_b (1 - \alpha)} .$$

TREVISINI EDITORE - MILANO

PREZZO L. 8000

I. V. A. compresa.

Il fattore di stabilità  $S$  risulta perciò:

$$S = \frac{\Delta I_c}{\Delta I_{c0}} = \frac{R_c + R_b}{R_c + R_b(1 - \alpha)},$$

il cui valore è tanto più prossimo all'unità quanto più  $R_b$  è minore di  $R_c$ , compatibilmente con le esigenze di funzionamento del circuito.

In pratica, per ridurre gli inconvenienti, precedentemente accennati, dovuti alle componenti alternative del segnale di ingresso, la resistenza  $R_b$  viene divisa in due parti uguali (fig. 13.30) e il punto di mezzo viene collegato a massa attraverso un condensatore elettrolitico  $C$ , la cui reattanza deve risultare trascurabile in corrispondenza alla più bassa frequenza del segnale.